学術・技術論文

二つの非駆動関節を持つ平面 4 自由度マニピュレータの
可制御性小林 啓 吾^{*1} 井 村 順 一^{*2} 吉 川 恒 夫^{*1}

Controllability of a 4-D.O.F. Planar Manipulator with Two Unactuated Joints

Keigo Kobayashi^{*1}, Jun-ich Imura^{*2} and Tsuneo Yoshikawa^{*1}

In this paper, we prove that a 4-D.O.F planar manipulator which consists of two actuated joints and two unactuated joints is completely controllable, namely, there exists an input to drive the system from any given initial state to any state in finite time. The proof exploits the mechanical properties of the planar systems.

Key Words: Underactuated Manipulator, Nonholonomic, Complete Controllability

1. は じ め に

近年, 非ホロノミック拘束を持つシステムの制御問題が注目を集めている. 非ホロノミック拘束を持つシステムの中で, 車両系に代表されるように速度間の拘束を持つシステムについては, 対称アフィンシステムとしての定式化がなされ, ベクトル場のリー積によって可制御性の判別ができることが知られている. これに対して, 2 階の微分方程式で表される拘束, すなわち加速度間に拘束を有するシステムについては, ドリフト項を含むためリー積による可制御性の判別は難しいのが現状である.

加速度間に拘束を有するシステムには, 自由関節を含むマニピュレータがある [1]~[10]. Oriolo らは, 自由関節を持つリンク系が一般には積分できない 2 階の微分方程式で表される拘束を持つ, すなわち非ホロノミック拘束であることを示し, その拘束式が可積分となる条件を導出した. また特にリンク系の動きが水平面内に限定される場合にはシステムの線形近似系が可制御にならないことを示している.

中村らは, 回転駆動関節と回転自由関節を一つずつ水平面内で結合したマニピュレータの制御問題を扱っている [5]. しかし, このシステムは入力一つのため, 位置と速度の両方を同時に制御するのは困難であり, 任意の状態から目標の姿勢で静止させることができるかどうかは不明である. 最近, 荒井らはこの系の軌道計画問題を双方向アプローチと時間軸変換を利用して求めている. しかし, 可制御性に関する厳密な議論はない [3]. また, 荒井は, 水平面内において駆動関節二つ, 自由関節一つからなるマニピュレータを取り上げ, この系が二つの入

力で三つの関節角と関節速度を任意の状態へ遷移させることができることを, 実際に入力を求めることにより示した [2]. 筆者らもこのシステムが 2 階のチェインド形式に変換できることを示している [6]. この 2 階のチェインド形式は, 系が可制御であることだけでなく, すべての状態において STLC (Small Time Locally Controllable) [11] であることを保証する.

駆動関節と非駆動関節の配置には無数の組み合わせがあるにもかかわらず, 今までのところ上の二つ以外の系については研究例が少なく, どのような系が可制御になるかは分かっていない.

一方, これらの系を一般的に議論するために, 系をドリフト項を持つシステムとして定式化し, Sussmann の STLC のための十分条件 [11] を用いる研究がいくつかなされている [7]~[10]. しかし, 上記の二つ以外の非駆動関節を持つ系へ適用すると, 計算が複雑になりすぎて判別できないことが多い. 例えば, 筆者らは二つの駆動関節の先に二つの非駆動関節を連結した系に適用してみたが, 先端の二つのリンクが直線で静止している状態については STLC であることを示せたものの, それ以外の状態については複雑になりすぎて判別できなかった [10].

そこで本論文では, 一般の非駆動関節を有する非ホロノミックマニピュレータの可制御性を判断するための研究の一環として二つの駆動関節と二つの非駆動関節を持つ非ホロノミックマニピュレータが, 完全可制御, すなわち任意に与えられた初期状態から任意に与えられた目標状態へ有限時間で遷移させる入力が存在することを示す. また, n 個の非駆動関節を持つ場合の可制御性についても考察する. 証明では, まず系の逆時間系が元の系と同型であることを示し, ある種の双方向アプローチ [12] を用いることができることを示す. 双方向アプローチとは, 中村らが速度間に拘束を持つ非ホロノミックシステムである宇宙ロボットの軌道を数値的に求めるために提案した手法で

原稿受付 1998 年 3 月 20 日

^{*1} 京都大学

^{*2} 広島大学

^{*1} Kyoto University

^{*2} Hiroshima University

あり、ある初期状態からある目標状態に至る軌道を求める際に、初期状態と目標状態の両方からフィードバック制御により共通の多様体[†]に収束させ、中間状態から目標状態に至る軌道を時間反転させる方法である。なお、中村らの方法では、実際に有限時間の軌道が求まる数学的保証はなかったが、本論文では収束先の多様体近傍における局所的な可制御性を証明することにより、有限時間の軌道が必ず存在することを証明している。

2. 主要結果

この論文では水平面内において二つの駆動関節と二つの非駆動関節をつないだ系を考える (Fig. 1)。台座側の二つの関節が直動の駆動関節で、手先側の二つの関節が回転の非駆動関節である。ただし、第一、第二リンクは十分な長さがあるものとし、これらの関節の可動範囲に対しては制限がないものとする。この系を今後 $P^2\bar{R}^2$ 系と呼ぶことにする。この名前において P は直動の駆動関節、 $\bar{R}$ は回転の非駆動関節を意味し、右肩の数字は関節の個数を表している。なお、リンクの可動範囲の制限を考えなければ、最初の二つの駆動関節は力学的には 2 自由度の平面マニピュレータとみなせるので、回転関節か直動関節かという違いは本質的ではない。

本論文の目的はこの $P^2\bar{R}^2$ 系が可制御であることを示すことである。

定理 1: $P^2\bar{R}^2$ 系は一般に[†]完全可制御である、すなわち、任意に与えられた初期状態から任意に与えられた目標状態へ有限時間で遷移させる入力が存在する。

我々はこの定理 1 を以下に示す手順で証明する。まず、3 章において任意に与えられた初期状態から原点へ遷移させる入力が存在するときには、原点から任意の状態へ遷移させる入力が存在することを系の逆時間システムを用いて示す。これは、任意の状態から原点を通過して任意の状態へ遷移させる入力が存在することを意味するので、系の可制御性を示すには、任意の状態から原点へ遷移させる入力が存在することを示せばよいことになる。さらに、この問題は二つの別な問題に分割できる。一つは任意の状態から原点近傍への安定化問題であり、もう一つは原点近傍での局所可制御性である。これらはそれぞれ 5 章

Fig. 1 $P^2\bar{R}^2$ system

[†]補題 4 および補題 5 の仮定が成り立つ場合に

と 6 章で扱う。全体を通じて証明の鍵となる運動方程式の導出については 4 章において行う。

3. ラグランジアン系の逆時間システム

m 個の駆動関節と n 個の非駆動関節を持つ、次のラグランジアン系を考える。

$$M(\theta)\ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta}^{[2]}) + g(\theta) = F\tau \quad (1)$$

ここで、 $\theta \in \mathbb{R}^{m+n}$ は関節変位、 M は慣性行列、 h は遠心コリオリ力、 g は重力項を表す。 $\tau \in \mathbb{R}^m$ は関節駆動力、 $F \in \mathbb{R}^{(m+n) \times m}$ は要素が 0 と 1 からなる行列である。 $\dot{\theta}^{[2]}$ は $\dot{\theta}$ の要素の二次の積の項を並べたものである。例えば $m+n=2$ であれば $\dot{\theta}^{[2]} = [\dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2^2]^T$ である。なお、当然ながら $P^2\bar{R}^2$ 系 ($m=n=2$) も式 (1) の形で表現することができる。

式 (1) で表現される系の時間軸を反転した系を考える。状態変数を $[q \ v] = [\theta \ \dot{\theta}]$ とおくと、系の状態方程式表現は次のように得られる。

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = f(q)u + H(q, v^{[2]}) \end{cases} \quad (2)$$

$t = -\tau$ において、時間を反転させた系を考えると

$$\begin{cases} \frac{dq}{d\tau} = -v \\ \frac{dv}{d\tau} = -f(q)u - H(q, v^{[2]}) \end{cases} \quad (3)$$

となる。ここで、 $w = -v$ とおくと

$$\begin{cases} \frac{dq}{d\tau} = w \\ \frac{dw}{d\tau} = f(q)u + H(q, w^{[2]}) \end{cases} \quad (4)$$

となり、式 (4) は式 (2) とまったく同じ形をしている。よって次の補題を得る。

補題 1: 式 (1) で表されるラグランジアン系において、ある初期状態 $[q_a \ v_a]$ から、ある目標状態 $[q_b \ v_b]$ へ遷移させる入力が存在すれば、初期状態 $[q_b \ -v_b]$ から、目標状態 $[q_a \ -v_a]$ へ遷移させる入力もまた存在する。

この補題から、次の補題を得る。

補題 2: 式 (1) で表されるラグランジアン系において、すべての初期状態から原点へ遷移させる入力が存在するならば、その系は完全可制御である。

証明: 任意に与えられた初期状態 $[q_a \ v_a]$ から任意に与えられた終了状態 $[q_b \ v_b]$ へ遷移させる入力が存在することを証明すればよい。仮定より $[q_a \ v_a]$ から原点へ遷移させる入力および $[q_b \ -v_b]$ から原点へ遷移させる入力が存在する。補題 1 より後者は原点から $[q_b \ v_b]$ へ遷移させる入力が存在することを意味するので、 $[q_a \ v_a]$ から原点を通過して $[q_b \ v_b]$ へ遷移させる入力が存在する。□

この補題から、定理 1 を証明するには $P^2\bar{R}^2$ 系においてすべての初期状態から原点へ遷移させる入力が存在することを示せばいいことが分かる。

4. 運動方程式の導出

この章では $P^2\bar{R}^2$ 系の運動方程式を示す. m_i, l_i, l_{gi}, I_i をそれぞれ第 i リンクの質量, 長さ, 重心までの距離, 重心周りの慣性モーメントとする. ただし $l_{gi} > 0, l_i > 0$ とする. 第 i 関節に加えられる力を f_i ($i = 1, 2$) とする. x を第一関節の変位, y を第二関節の変位, ϕ_i を台座に固定した座標系からみた第 i リンクの回転角とする. さらに $n = 2$ および

$$l_{ij} = \begin{cases} l_j & (j < i) \\ l_{gi} & (j = i) \\ 0 & (j > i) \end{cases} \quad (5)$$

$$M_{jk} = \begin{cases} I_j + \sum_{i=3}^{n+2} m_i l_{ij} l_{ij} & (j = k) \\ \sum_{i=3}^{n+2} m_i l_{ij} l_{ik} & (j \neq k) \end{cases} \quad (6)$$

$$P_i = \sum_{j=3}^{n+2} m_j l_{ji} \quad (7)$$

とおく. このとき系の運動方程式はラグランジュ法を用いて以下のように書き表せる. なお, この式の導出方法については付録に示す.

$$\begin{cases} \ddot{x} = u_1 \\ \ddot{y} = u_2 \\ M_{33}\ddot{\phi}_3 + M_{34}\cos(\phi_3 - \phi_4)\ddot{\phi}_4 + M_{34}\sin(\phi_3 - \phi_4)\dot{\phi}_4^2 \\ \quad - P_3\sin\phi_3 u_1 + P_3\cos\phi_3 u_2 = 0 \\ M_{43}\cos(\phi_4 - \phi_3)\ddot{\phi}_3 + M_{44}\ddot{\phi}_4 + M_{43}\sin(\phi_4 - \phi_3)\dot{\phi}_3^2 \\ \quad - P_4\sin\phi_4 u_1 + P_4\cos\phi_4 u_2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

ここで, u_1, u_2 は新たな入力である.

$P^2\bar{R}^2$ 系の制御問題の難しさは, 系が重力の影響を受けていない点にある. 実際, 非駆動関節を持つマニピュレータ系であっても, 重力下にある場合には平衡点近傍において可制御となる場合がほとんどである. よって, $P^2\bar{R}^2$ 系において, 第一関節に $-x$ 軸方向に加速度を生じさせることを, 残りの三つの関節に x 軸方向の重力に相当する慣性力を発生させると解釈することは有効である. つまり, まず第一関節の駆動力によって仮想的な重力を残りの三つの関節に与え, 第二関節の駆動力によって, 残りの三つの関節を平衡点, すなわち, $y = \phi_3 = \phi_4 = 0$ に有限時間で制御し, しかる後に, 第一関節変位 x を 0 へ遷移させるという二段階の制御によって, すべての状態を原点へ遷移させるというアプローチをとることができる.

以上の観点から $P^2\bar{R}^2$ 系を仮想重力発生部

$$\Sigma_G: \ddot{x} = u_1 \quad (9)$$

と, 仮想重力下の振子部

$$\Sigma_T: \begin{cases} \ddot{y} = u_2 \\ M_{33}\ddot{\phi}_3 + M_{34}\cos(\phi_3 - \phi_4)\ddot{\phi}_4 + M_{34}\sin(\phi_3 - \phi_4)\dot{\phi}_4^2 \\ \quad - P_3\sin\phi_3 u_1 + P_3\cos\phi_3 u_2 = 0 \\ M_{43}\cos(\phi_4 - \phi_3)\ddot{\phi}_3 + M_{44}\ddot{\phi}_4 + M_{43}\sin(\phi_4 - \phi_3)\dot{\phi}_3^2 \\ \quad - P_4\sin\phi_4 u_1 + P_4\cos\phi_4 u_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

に分割して考える. これは x 軸方向の加速度 u_1 が, 後者のシステムにとっては重力項として作用するという解釈に基づく分解である. それぞれのシステムの状態変数を $x_G = [x \dot{x}]^T$, $x_T = [y \dot{y} \phi_3 \dot{\phi}_3 \phi_4 \dot{\phi}_4]^T$ とおく.

非駆動関節が原点で静止しているときには, x 軸方向の加速度が非駆動関節に影響を与えないことから, この分解は次の補題に示される条件を満足していることが分かる.

補題 3: 部分システム Σ_T において, すべての初期状態から原点へ遷移させる入力が存在するとき, $P^2\bar{R}^2$ 系全体において, すべての初期状態から原点へ遷移させる入力が存在する.

証明: Σ_T の運動方程式 (10) より, $x_T = 0$ かつ $u_2 = 0$ のときには u_1 にかかわらず $\dot{x}_T = 0$ である. したがって, $x_T = 0$ のときには $x_T = 0$ を保ったまま, x_G を任意の値から 0 へ遷移させることができる. したがって, まず仮定より Σ_T の状態を原点へ遷移させ (このときに生じる Σ_G の状態の変化は問題にしない), しかる後 Σ_G の状態を原点へ遷移させる (このとき Σ_T の状態は変化しない) ことができる. $\square$

この補題より, $P^2\bar{R}^2$ 系に任意の状態から原点へ遷移させる入力があることを示すには, Σ_T に任意の状態から原点へ遷移させる入力が存在することを示せばよいことが分かる. 以降の節において, この Σ_T を原点へ制御させるという問題を, 原点近傍への大域的安定化問題と, 原点近傍での可制御性という二つの問題に分割し, それぞれについて論じていく.

5. Σ_T の大域的安定化

この章では Σ_T を大域的に安定化できることを示し, 安定可制御を適当な有限時間で打ち切るにより, どんな初期状態からでも有限時間で原点の任意近傍まで遷移させることができることを示す.

基本的には, 仮想重力下で系の運動エネルギーと仮想位置エネルギーの総和を考え, これが減少するように駆動入力を定めることを考える. 少なくとも駆動入力 u_2 を 0 にすれば, 総エネルギーは保存されるので, 総エネルギーは非増加関数となる. そこで, 仮想重力を $u_1 = -K_0$ とし, 次のリヤプノフ関数を考える.

$$V = \frac{1}{2} M_{33} \dot{\phi}_3^2 + M_{34} \cos(\phi_3 - \phi_4) \dot{\phi}_3 \dot{\phi}_4 + \frac{1}{2} M_{44} \dot{\phi}_4^2 + \frac{1}{2} K_4 \dot{y}^2 + K_0 P_3 (1 - \cos \phi_3) + K_0 P_4 (1 - \cos \phi_4) + \frac{1}{2} K_2 (P_3 \sin \phi_3 + P_4 \sin \phi_4 - K_4 y)^2 \quad (11)$$

ここで第 1 行目が運動エネルギー, 第 2 行目が仮想重力によるポテンシャルに対応する. また, y の変位は仮想重力に対して仕事をしないので, V を x_T の正定関数にするために第 3 行目を加えている. V の時間微分を考え, 運動方程式 (10) を代入すると

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (P_3 \sin \phi_3 \dot{\phi}_3 + P_4 \sin \phi_4 \dot{\phi}_4)(u_1 + K_0) \\ &\quad - (P_3 \cos \phi_3 \dot{\phi}_3 + P_4 \cos \phi_4 \dot{\phi}_4 - K_4 \dot{y}) \\ &\quad \times (u_2 - K_2 (P_3 \sin \phi_3 + P_4 \sin \phi_4 - K_4 y)) \end{aligned} \quad (12)$$

を得る. ここから K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 を任意の正定数として

$$\begin{cases} u_1 = -K_0 - K_1(P_3 \sin \phi_3 \dot{\phi}_3 + P_4 \sin \phi_4 \dot{\phi}_4) \\ u_2 = K_2(P_3 \sin \phi_3 + P_4 \sin \phi_4 - K_4 y) \\ \quad + K_3(P_3 \cos \phi_3 \dot{\phi}_3 + P_4 \cos \phi_4 \dot{\phi}_4 - K_4 \dot{y}) \end{cases} \quad (13)$$

とすれば, V は非増加関数となり, 0 に収束することが期待できる. 実際, 次の定理が成り立つ.

定理 2: $P_3 \neq P_4$ であれば, Σ_T に式 (13) の制御則を適用すると, $x_T(0)$ が $[0 \ 0 \ \pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \pi \ 0]^T$, $[0 \ 0 \ \pi \ 0 \ \pi \ 0]^T$ のいずれでもないときには

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_T(t)\| = 0 \quad (14)$$

が成り立つ.

証明は付録に示す. $x_T(0)$ が $[0 \ 0 \ \pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \pi \ 0]^T$, $[0 \ 0 \ \pi \ 0 \ \pi \ 0]^T$ のいずれかである場合には $x_T(t)$ は定数となり原点には収束しないが, このような場合には u_2 にわずかな擾乱を与えることにより容易にこれらの状態から脱出することができ, その後状態を原点に収束させることができる. 以上から次の補題が証明された.

補題 4: $P_3 \neq P_4$ のときには, Σ_T には原点を含む空でない開集合が存在し, すべての状態から有限時間でその集合の内部へ遷移させる入力が存在する.

定理 2 のみでは有限時間内に x_T を原点に遷移させることはできない. しかしながら, 安定化制御をある有限時間で打ち切ることにより状態を原点のごく近傍にまで収束させることは可能である. さらに次章において, 原点に十分近い状態であればそこから原点に遷移させる入力が存在することを示す. こうして x_T は有限時間で原点に遷移可能なことが示される.

数値例: 定理 2 の有効性を調べるために数値シミュレーションを行った. 系の諸元を $m_i = 1$, $l_i = 1$, $l_{gi} = 0.5$, $I_i = m_i l_i^2 / 12$ ($i = 3, 4$) とし, 制御則のパラメータを $K_0 = K_1 = 20$, $K_2 = K_3 = 5$, $K_4 = 0.5$ とした. 初期状態を $x_T(0) = [0 \ 0 \ \pi/4 \ 0 \ -\pi/4 \ 0]^T$ としたときの計算結果を Fig. 2 に示す. また, リヤプノフ関数 $V(t)$ の応答を Fig. 3 に示す. Fig. 3 から状態変数が指数関数的に収束していることが分かる. なお, この制御の間に u_1 は Σ_G に大きな変化を生

じている (Fig. 4). よって, 定理 2 は必ずしも実用的な軌道を与えないことが分かる.

x の変化を小さく押さえる方法の一つとして, 原点周りの線形近似系に対して線形フィードバック則を構築する方法が考えられる. 線形近似系に対する最適レギュレータを構成して求めた制御則, $u_1 = -2$, $u_2 = [-25.0798 \ -49.7683 \ 35.8337 \ -31.3407 \ 6.4737 \ -7.8072] x_T$ を適用した場合の計算結果を Fig. 5, 6 に示す. x の変化は Fig. 4 に比べて小さくなっている. ただし, この場合は大域的な収束性は保証されておらず, 安定化できる範囲は限定されている.

Fig. 3 Lyapunov function V

Fig. 4 Response of x

Fig. 2 state

Fig. 5 State (Linear feedback control)

Fig. 6 Response of x (Linear feedback control)

6. Σ_T の局所可制御性

この章では、 Σ_T が原点近傍で局所的に可制御、すなわち、原点からある有限時間以内に到達できる状態の集合が空でない開集合であることを示す。このための十分条件として、系の線形近似系が可制御であればいいということが知られている [13]。そこで、 Σ_T の線形近似系について考察する。新たな状態変数を $z = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$, $z_1 = y$, $z_2 = (M_{33}\phi_3 + M_{34}\phi_4)/P_3$, $z_3 = (M_{34}\phi_3 + M_{44}\phi_4)/P_4$ とおき、 $u_1 = -K$ とおくと原点近傍での線形近似系は次のようになる。

$$\dot{z} = \frac{K}{\Delta} Az + Bu_2 \quad (15)$$

ここで $\Delta = M_{33}M_{44} - M_{34}M_{43}$ であり

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P_3M_{44} & P_4M_{34} \\ 0 & P_3M_{43} & -P_4M_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

である。よって、線形制御理論から式 (15) が可制御であるのは

$$\text{rank}[B \ AB \ A^2B] = 3 \quad (16)$$

のときということが分かる。行列式を計算すると、この条件は

$$\Delta P_3 P_4 (M_{34} P_3 + M_{44} P_3 - M_{43} P_4 - M_{33} P_4) \neq 0 \quad (17)$$

となる。 $\Delta P_3 P_4 > 0$ より、次の補題を得る。

補題 5: $M_{34}P_3 + M_{44}P_3 \neq M_{43}P_4 + M_{33}P_4$ のときには、 Σ_T には原点を含む空でない開集合が存在し、その集合内のすべての状態から原点へ有限時間で遷移させる入力が存在する。

証明: $M_{34}P_3 + M_{44}P_3 \neq M_{43}P_4 + M_{33}P_4$ のときには Σ_T は原点近傍で可制御となるため、原点からある有限時間までに到達できる状態の集合は原点を含む空でない開集合となる。よって、補題 1 から、原点を含む空でない開集合が存在し、その集合内のすべての状態から原点へ有限時間で遷移させる入力が存在する。 $\square$

補題 2-5 より、定理 1 が証明できる。

定理 1 の証明: 補題 4 と補題 5 から Σ_T にはすべての初期状態から原点へ状態を遷移させる入力が存在する。よって、補題

3 から、 $P^2\bar{R}^2$ 系にはすべての初期状態から原点に状態を遷移させる入力が存在し、補題 2 から $P^2\bar{R}^2$ 系は完全可制御となる。 $\square$

補題 4 と補題 5 の仮定を満足しない $P_3 = P_4$ および $M_{34}P_3 + M_{44}P_4 = M_{43}P_4 + M_{33}P_4$ の場合には可制御性についての証明はできていない。しかし、数値シミュレーションにおいてはどちらの場合にも Σ_T を原点近傍まで安定化することができておりこれらの場合にも $P^2\bar{R}^2$ 系が可制御である可能性はある。

7. より一般的な場合の考察

この章では、さらに手先に非駆動関節を増やし二個の駆動関節の先に n 個の非駆動関節をつないだ系について考察する。この系を $P^2\bar{R}^n$ 系と呼ぶことにする。この系の可制御性を示す場合にも、やはり仮想重力発生部と仮想重力下の振子部に分けて考えることは有効だと思われる。その場合、補題 2, 3 はそのまま成立し、補題 5 も拡張は容易である。しかし、補題 4 に関しては簡単にはいかない。式 (11) および式 (13) に相当する式は簡単に求まり、 V が収束する数値的な例を得ることは可能だが定理 2 の証明は難しい。これは今後の研究課題である。

8. おわりに

本論文では二つの駆動関節と二つの非駆動関節を持つ非ホロノミックマニピュレータが、完全可制御性、すなわち任意に与えられた初期状態から任意に与えられた目標状態へ遷移させる入力が存在することを示した。また、 n 個の非駆動関節を持つ場合の可制御性について考察した。

$P^2\bar{R}^2$ 系が完全可制御であることが証明されたので、次の問題はこの系をいかに制御するかということである。しかし、この論文での証明により導出された、任意に与えられた初期状態から目標状態に遷移させる入力は必ずしも実用的なものではない。特に x の変化が大きくなるという点に対しては何らかの対策をする必要があるであろう。本論文でも線形近似系を用いた制御を考察してはみたが、まだまだ改良の余地があると思われる。また、仮に実用的な軌道が求まったとしても、開ループ制御では十分な制御ができない可能性がある。それはこのシステムがわずかな初期状態の誤差に敏感なシステムと思われるためである。フィードバック制御系を設計することも今後の研究課題の一つである。

参考文献

- [1] G. Oriolo and Y. Nakamura: "Free-joint manipulators: Motion control under second-order nonholonomic constraints," Proc. IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems '91, pp.1248-1253, 1991.
- [2] 荒井: "非駆動関節を有する 3 自由度マニピュレータの非ホロノミック拘束下における可制御性", 日本ロボット学会誌, vol.14, no.5, pp.751-758, 1996.
- [3] 荒井, 谷江, 城間: "非駆動関節を有する水平 2 軸マニピュレータの軌道計画", 第 15 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, pp.19-20, 1997.
- [4] 鈴木, 中村: "受動関節を持つ多リンク系の非ホロノミック制御", 第 13 回ロボット学会学術講演会予稿集, pp.707-708, 1995.
- [5] T. Suzuki, M. Koinuma and Y. Nakamura: "Chaos and

nonlinear control of a nonholonomic free-joint manipulator," IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.2668-2675, 1996.

- [6] J. Imura, K. Kobayashi and T. Yoshikawa: "Nonholonomic control of 3 link planar manipulator with a free joint," IEEE Conference on Decision and Control, pp.1435-1436, 1996.
- [7] M. Reyhanoglu, A. van der Schaft and N. Harris: "Nonlinear control of a class of under actuated systems," IEEE Conference on Decision and Control, pp.1682-1687, 1996.
- [8] A.D. Lewis and R.M. Murray: "Configuration controllability for a class of mechanical systems," IEEE Conference on Decision and Control, pp.4288-4293, 1995.
- [9] A. De Luca, R. Mattone and G. Oriolo: "Dynamic mobility of redundant robots using end-effector commands," IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.1760-1767, 1996.
- [10] 小林, 井村, 吉川: "非駆動関節を有する平面マニピュレータ系の可制御性に関する一考察", 第20回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, pp.137-140, 1997.
- [11] H.J. Sussmann: "A general theorem on local controllability," SIAM Journal on Control and Optimization, vol.25, pp.158-194, 1987.
- [12] Y. Nakamura and R. Mukherjee: "Nonholonomic path planning of space robots via a bidirectional approach," IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol.7, no.4, pp.500-514, 1991.
- [13] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft: Nonlinear Dynamical Control Systems. Springer-Verlag, 1990.

付録 A. P^2R^n 系の運動方程式

ここでは, 2 個の駆動関節の先に n 個の非駆動関節がったマニピュレータ系の運動方程式を導出する. 第 i リンクの重心位置 r_i は $r_1 = [x \ 0]^T$, $r_2 = [x \ y]^T$ および

$$r_i = \left[x + \sum_{j=3}^{n+2} l_{ij} \cos \phi_j \ y + \sum_{j=3}^{n+2} l_{ij} \sin \phi_j \right]^T \quad (i \geq 3) \quad (18)$$

と表せる. なお, これ以降 $\sum_{i=3}^{n+2}$ を $\sum_i$ と略記する. 第 i リンクの持つ運動エネルギーを T_i とおくと $T_1 = m_1 \dot{x}^2/2$, $T_2 = m_2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$ および, $i \geq 3$ に対して

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2} I_i \dot{\phi}_i^2 + \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^T \dot{r}_i \\ &= \frac{1}{2} I_i \dot{\phi}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_j \sum_k m_i l_{ij} l_{ik} \cos(\phi_j - \phi_k) \dot{\phi}_j \dot{\phi}_k \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_j m_i (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2l_{ij}(-\sin \phi_j \dot{x} + \cos \phi_j \dot{y}) \dot{\phi}_j) \end{aligned}$$

よって, 系の総エネルギーは

$$\begin{aligned} T &= \sum_i T_i = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k M_{jk} \cos(\phi_j - \phi_k) \dot{\phi}_j \dot{\phi}_k \\ &\quad + \frac{1}{2} m_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_y \dot{y}^2 + \sum_j P_j (-\sin \phi_j \dot{x} + \cos \phi_j \dot{y}) \dot{\phi}_j \end{aligned}$$

となる. ただし $m_x = \sum_{i=1}^{n+2} m_i$, $m_y = \sum_{i=2}^{n+2} m_i$ とおいた. θ_i を第 $i-1$ リンクに固定した座標系からみた第 i リンクの回転角とすると, 第 i 関節 ($i \geq 3$) に加えられるトルクは 0 な

ので, ラグランジュの方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = f_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = f_2 \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_i} = 0 \quad (i = 3, 4, \dots, n+2) \quad (20)$$

と与えられる. 式 (20) を $\phi_k = \sum_{i=3}^k \theta_i$ すなわち

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \dot{\phi}_j}{\partial \dot{\theta}_i} = \begin{cases} 1 & (i \leq j) \\ 0 & (i > j) \end{cases} \quad (21)$$

および $M_{jk} = M_{kj}$ に注意して計算する. 左辺第一項は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} \right) &= \sum_{j=i}^{n+2} \left(\sum_k M_{jk} \cos(\phi_j - \phi_k) \ddot{\phi}_k \right. \\ &\quad \left. - \sum_k M_{jk} \sin(\phi_j - \phi_k) (\dot{\phi}_j \dot{\phi}_k - \dot{\phi}_k^2) \right) \\ &\quad + \sum_{j=i}^{n+2} P_j (-\cos \phi_j \ddot{x} + \cos \phi_j \ddot{y} - (\cos \phi_i \dot{x} + \sin \phi_i \dot{y}) \dot{\phi}_j) \end{aligned}$$

であり, 同様に左辺第二項は

$$\begin{aligned} -\frac{\partial T}{\partial \theta_i} &= \sum_{j=i}^{n+2} \sum_k M_{jk} \sin(\phi_j - \phi_k) \dot{\phi}_j \dot{\phi}_k \\ &\quad + \sum_{j=i}^{n+2} P_j (\cos \phi_j \dot{x} + \sin \phi_j \dot{y}) \dot{\phi}_j \quad (22) \end{aligned}$$

となる. よって式 (20) は次式のように書き表せる.

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^{n+2} \left\{ \sum_k M_{jk} \cos(\phi_j - \phi_k) \ddot{\phi}_k + \sum_k M_{jk} \sin(\phi_j - \phi_k) \dot{\phi}_k^2 \right. \\ \left. - P_j \sin \phi_j \ddot{x} + P_j \cos \phi_j \ddot{y} \right\} = 0 \quad (i = 3, \dots, n+2) \quad (23) \end{aligned}$$

この式の階差をとり, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \sum_j M_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j) \ddot{\phi}_j + \sum_j M_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j) \dot{\phi}_j^2 \\ - P_i \sin \phi_i \ddot{x} + P_i \cos \phi_i \ddot{y} = 0 \quad (i = 3, \dots, n+2) \quad (24) \end{aligned}$$

運動方程式の残りの部分は式 (19) より

$$\begin{cases} m_x \ddot{x} - \sum_j P_j \sin \phi_j \ddot{\phi}_j - \sum_j P_j \cos \phi_j \dot{\phi}_j^2 = f_1 \\ m_y \ddot{y} + \sum_j P_j \cos \phi_j \ddot{\phi}_j - \sum_j P_j \sin \phi_j \dot{\phi}_j^2 = f_2 \end{cases} \quad (25)$$

となる. 式 (24) で $n=2$ の場合を考えると式 (8) を得る. 新たな入力 u_1, u_2 は式 (24), (25) を $\ddot{x}, \ddot{y}$ について解くこと

によって次式のように得られる.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & o \\ 0 & 1 & o \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} m_x & 0 & -P_S^T \\ 0 & m_y & P_C^T \\ \hline -P_S & P_C & M_C \end{array} \right]^{-1} \\ \times \left\{ \begin{bmatrix} P_C^T \\ P_S^T \\ -M_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_3^2 \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{n+2}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ o \end{bmatrix} \right\} \quad (26)$$

ここで $P_S = [P_3 \sin \phi_3 \cdots P_{n+2} \sin \phi_{n+2}]^T$, $P_C = [P_3 \cos \phi_3 \cdots P_{n+2} \cos \phi_{n+2}]^T$ であり, M_C はその第 (i, j) 要素が $M_{i+2, j+2} \cos(\phi_{i+2} - \phi_{j+2})$ からなる $n \times n$ 行列, M_S はその第 (i, j) 要素が $M_{i+2, j+2} \sin(\phi_{i+2} - \phi_{j+2})$ からなる $n \times n$ 行列である.

付録 B. 定理 2 の証明

$V(x_T) \geq 0$ であり, $V = 0$ ならば $x_T = 0$ であることは明らかである. 式 (12) に式 (13) を代入して

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -K_1(P_3 \sin \phi_3 \dot{\phi}_3 + P_4 \sin \phi_4 \dot{\phi}_4)^2 \\ &\quad -K_3(P_3 \cos \phi_3 \dot{\phi}_3 + P_4 \cos \phi_4 \dot{\phi}_4 - K_4 \ddot{y})^2 \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (27)$$

を得る. よって, 微分方程式の解の唯一性を考慮すれば

I) $\lim_{t \rightarrow 0} V(t) = 0$.

II) すべての $t \geq 0$ に対して $\dot{V}(t) = 0$.
のいずれかであることが分かる.

I) の場合には明らかに式 (14) が成立するので, II) の場合について考察する. このとき

$$\frac{d}{dt}(P_3 \cos \phi_3 + P_4 \cos \phi_4) = 0 \quad (28)$$

および

$$\frac{d}{dt}(P_3 \sin \phi_3 + P_4 \sin \phi_4 - K_4 y) = 0 \quad (29)$$

となるので, ある積分定数 C_a, C_b に対して

$$\begin{cases} P_3 \cos \phi_3 + P_4 \cos \phi_4 = C_a \\ P_3 \sin \phi_3 + P_4 \sin \phi_4 - K_4 y = C_b \end{cases} \quad (30)$$

が成り立つ.

$$\ddot{y} = u_2 = K_2 C_b \quad (31)$$

より, ある積分定数 C_1, C_2 を用いて次の式を得る.

$$y = \frac{1}{2} K_2 C_b t^2 + C_1 t + C_2 \quad (32)$$

$V(t)$ は非増加関数なので, $C_b = C_1 = 0$ となる. よって

$$\begin{cases} P_3 \cos \phi_3 + P_4 \cos \phi_4 = C_a \\ P_3 \sin \phi_3 + P_4 \sin \phi_4 = K_4 C_2 \end{cases} \quad (33)$$

である. 仮定より $P_3 \neq P_4$ であり, このとき ϕ_3, ϕ_4 は定数となる. 式 (8) に, $u_2 = 0$, 式 (13), $\dot{\phi}_i = \ddot{\phi}_i = 0$ ($i = 3, 4$) を代入すれば $\sin \phi_3 = \sin \phi_4 = 0$ を得る. また, このとき $y = C_2 = 0$ となる. したがって, すべての $t \geq 0$ に対して x_T は $0, [0 \ 0 \ \pi \ 0 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \pi \ 0]^T, [0 \ 0 \ \pi \ 0 \ \pi \ 0]^T$ のいずれかの一定値をとる. 仮定より, $x_T(0)$ は $[0 \ 0 \ \pi \ 0 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \pi \ 0]^T, [0 \ 0 \ \pi \ 0 \ \pi \ 0]^T$ のいずれでもないので, x_T はすべての $t \geq 0$ に対して 0 である. よって II) の場合にも式 (14) が成立する. $\square$

小林啓吾 (Keigo Kobayashi)

1971 年 5 月 10 日生. 1996 年京都大学大学院工学研究科修士課程修了. 同年より同大学大学院工学研究科博士後期課程に進学, 現在に至る. 非ホロノミックシステムの制御の研究に従事. 計測自動制御学会会員. (日本ロボット学会学生会員)

吉川恒夫 (Tsuneo Yoshikawa)

1941 年 12 月 19 日生. 1969 年京都大学大学院工学研究科博士課程修了. 同年同大学工学部助手. 1970 年同大学助教授. 1986 年同大学工学部教授 (オートメーション研究施設, 1989 年より応用システム科学教室, 1991 年より機械工学教室) となり, 現在に至る. ロボット工学, 制御工学の研究に従事. 工学博士. 計測自動制御学会, 日本機械学会, システム制御情報学会, IEEE などの会員. (日本ロボット学会正会員)

井村順一 (Jun-ichi Imura)

1964 年 10 月 11 日生. 1990 年, 京都大学大学院工学研究科修士課程修了. 1992 年同大学大学院工学研究科博士課程中途退学, 同年 10 月より同大学工学部助手. 1997 年広島大学工学部助教授となり, 現在に至る. 非線形システムの制御の研究に従事. 工学博士. 計測自動制御学会, IEEE などの会員. (日本ロボット学会正会員)