研究速報

アクロボットの振り上げ倒立制御と特異点問題

南 澤 権* 美 多 勉* Ioannis Pantelidis* 山 北 昌 毅*

Swing-up Control and Singular Problem of an Acrobot System

Taek-Kun Nam*, Tsutomu Mita*, Ioannis Pantelidis* and Masaki Yamakita*

We described a technique for the swingup control of a 2 link acrobat robot using backstepping and discussed singular problems.

Key Words: Nonholonomic System, Acrobat Robot, Swing up Control

1. は じ め に

劣駆動系は一般化座標の数より少ない数のアクチュエータで一般化座標全部を制御する機構である [1]. 特に, 根元に駆動関節を待たないマニピュレータはアクロボットと呼ばれ, 鉄棒選手などの簡略化されたモデルとしても用いられている. 本論文は, 2 リンクアクロボットを使い, 懸垂姿勢から振り上げ動作を経て倒立姿勢を実現するための新しい制御法の提案とシミュレーション結果に関して述べたものである.

アクロボットの振り上げや倒立に関する従来の研究を見ると, Spong [4] らは単振動する Zero Dynamics や Pumping エネルギー関数を用いて振り上げ倒立制御を行っている. しかし, 前者は過大な入力が必要となり, また, 収束も遅く, 後者は収束するまでの時間が極端に長い. Hauser [3] らは, 平衡マニフォールド内で線形化されたシステムと等価な近似非線形システムを構成し, 倒立制御について論じている. しかし, 収束性が悪い. 一方, Saber [5] [6] はアクロボットの直列表現を提案し, さらに陰関数定理を使った Backstepping 制御則による振り上げ倒立制御を提案している. しかし, 陰関数定理に基づいて入力となる関数を逆算するのは困難であり, Saber 自身も具体的な制御則を明示していない. 実は, この直列表現は我々が独立に開発してきた, 角運動量表現による正準系 [1] と重心角による 2 リンク浮遊ロボットの表現 [1] を統合したものである. 一方, Cambrini [7] は歩行機械において角運動量に安定な Zero Dynamics を加えた変数を制御することにより, 倒立制御を実現しようとしている. これらの研究の目的はほぼ同一であるが, “制御途中で入力が発散してしまう特異点の出現”, “運動が原点以外の平衡マニフォールドで止まってしまう”, という問題が共通にある. しかし, 特異点問題は以上で引用した論文では言及されていない.

本論文では, まず, 制御系の表現として直列制御系を Saber の方法とは独立に直接的に導く. そして, 角運動量を零にする制御則 (以下, 制御則 A とする) をまず検討する. その結果, 特異平面が存在し, 懸垂姿勢から倒立制御を一つの制御で行うのは難しいことが分かり, 制御を正弦波入力による振り上げ, 角運動量を 0 にする制御, 線形近似制御の繰り返しの 3 段階で行うとよいことをまず示す.

次に, 第 2, 3 段階の制御を一つの制御則で行える可能性がある Cambrini らの提案に基づく方法 (以下, 制御則 B とする) について, 特異点問題を検討する. そして, 角運動量が零でない場合には制御則 A の場合より条件が厳しく, 2, 3 段階を一つにまとめて行うのは難しいと判断されることを述べる. そこで, 制御則 A で角運動量を一度零にしておいてから, 線形近似制御の繰り返し適用の代わりに, この制御を使うと第 3 段階の制御が短時間でできることを示す. すなわち, 本論文としては, 特異点問題を解析した結果, 正弦波入力による振り上げ, 制御則 A, 制御則 B の 3 段階の適用を提案する.

2. 制御対象と直列系の導出

Fig. 1 のような重力場での 2 リンクロボットを制御対象とする. このロボットにおいて, 第 1, 第 2 リンクの質量をそれぞれ m_1, m_2 , 長さを l_1, l_2 , 第 1 関節から第 1 リンクの重心までの距離を a_1 , 第 2 関節から第 2 リンクの重心までの距離を a_2 , 重心回りの慣性モーメントを, それぞれ J_1, J_2 とする. また, θ は第 1 リンクの絶対角, ψ は第 2 リンクの相対角とする.

ここで, 第 1 関節を非駆動関節とすると, このロボットの運動方程式は

$$(\alpha + \gamma + 2\beta\cos\psi)\ddot{\theta} + (\gamma + \beta\cos\psi)\ddot{\psi} - \beta\dot{\psi}(2\dot{\theta} + \dot{\psi})\sin\psi + k_1\cos\theta + k_2\cos(\theta + \psi) = 0 \quad (1)$$

$$(\gamma + \beta\cos\psi) + \gamma\ddot{\psi} + \beta\dot{\theta}^2\sin\psi + k_2\cos(\theta + \psi) = \tau_2 \quad (2)$$

原稿受付 2000 年 9 月 18 日

*東京工業大学

*Tokyo Institute of Technology

となる [1]. ただし, τ_2 は ψ を駆動するトルクであり

$$\alpha = J_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l_1^2, \beta = m_2 l_1 a_2, \gamma = J_2 + m_2 a_2^2$$

$$k_1 = (m_1 a_1 + m_2 l_1)g, k_2 = m_2 a_2 g$$

である. 制御目的は $\theta = -\pi/2, \psi = 0$ の懸垂状態から振子を振り上げ, $\theta = \pi/2, \psi = 0$ で倒立させることである.

Fig.1 Acrobat robot

まず, 制御則を求めるのに便利
なように, $\dot{\theta}, \dot{\psi}, \theta, \psi$ の非線形
フィードバックと新しいトルク
入力 u によって式 (2) を部分
線形化すれば [1] [4], 以下の
ように簡略化され,

$$\ddot{\psi} = u \quad (3)$$

式 (1) は積分できない加速度
拘束となる [2]. ただし, 角運動
量を持ち込むことによって, 式 (1) は 1 階の微分方程式で表す
ことができる. すなわち, 回転軸 O 点回りの角運動量 P を求めると

$$P = (\alpha + \gamma + 2\beta \cos \psi) \dot{\theta} + (\gamma + \beta \cos \psi) \dot{\psi} \quad (4)$$

となり, 本式を微分してみると, 式 (1) が

$$\dot{P} = -k_1 \cos \theta - k_2 \cos(\psi + \theta) \quad (5)$$

となっていることが分かる. これは, 回転軸 O 回りの角運動量の増分がリンクの姿勢変化に伴う重力変化に影響されることを意味している. また, 式 (4) から

$$\dot{\theta} = \frac{P}{(\alpha + \gamma + 2\beta \cos \psi)} - \frac{(\gamma + \beta \cos \psi)}{(\alpha + \gamma + 2\beta \cos \psi)} \dot{\psi} \quad (6)$$

も得られる. さらに本式第 2 項を 0 とするため

$$z := \theta + \int_0^\psi \frac{\gamma + \beta \cos \psi}{\alpha + \gamma + 2\beta \cos \psi} d\psi - \pi/2$$

$$:= \theta + w(\psi) \quad (7)$$

の座標変換を行えば

$$\dot{z} = \frac{P}{\alpha + \gamma + 2\beta \cos \psi} \quad (8)$$

と簡単化でき, z は $\theta = \pi/2, \psi = 0$ の目標点で 0 となる変数となる. この z は文献 [1] で重心角と呼んだ変数である.

そこで, 状態変数を $q = (z, P, \psi, \dot{\psi})^T$ としてまとめれば,

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{P} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P/h(\psi) \\ d(z, \psi) \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (9)$$

ただし,

$$h(\psi) = \alpha + \gamma + 2\beta \cos \psi > 0$$

$$d(z, \psi) = -k_1 \cos(z - w(\psi)) - k_2 \cos(z - w(\psi) + \psi)$$

となる直列表現を得, 角速度 $\dot{\psi}$ を入力と考えて (z, P) を安定

化する制御則を求めれば, Backstepping によってトルク入力 $u = \ddot{\psi}$ が求まることが期待される. 実際, Saber ら [5] [6] はそのような提案をし, 陰関数定理から入力を求めようとしているが, 具体的な制御則は求められていない.

3. 振り上げ倒立制御

3.1 制御則 A

Backstepping では最終的にトルク入力 u を求めるため, まず, 角速度 $v = \dot{\psi}$ を入力として扱い, 式 (9) を

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{P} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P/h(\psi) \\ d(z, \psi) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (10)$$

としておく. この系に対して, ここでは P が

$$\ddot{P} + f_2 \dot{P} + f_1 P = 0 \quad (11)$$

を満たすような v を求める. ただし, $f_1 > 0, f_2 > 0$ は設計パラメータである. これは,

$$V_1 = (\dot{P}^2 + f_1 P^2)/2 \quad (12)$$

のリアプノフ関数に対して

$$\dot{V}_1 = \dot{P}(\ddot{P} + f_2 \dot{P} + f_1 P) - f_2 \dot{P}^2 = -f_2 \dot{P}^2 \leq 0 \quad (13)$$

を実現する制御であり, 制御則は式 (10), および

$$\ddot{P} = \frac{\partial d}{\partial z} \frac{P}{h} + \frac{\partial d}{\partial \psi} v \quad (14)$$

を式 (11) に代入して

$$v = F_1(z, P, \psi) = -\left(\frac{\partial d}{\partial \psi}\right)^{-1} \left(\frac{\partial d}{\partial z} \frac{P}{h} + f_2 d + f_1 P\right) \quad (15)$$

として求められる. v が求まったので, 積分型 Backstepping [8] により u を求めよう. このため, $v - F_1$ が零でなく, したがって, 式 (11) が成り立っていないと仮定し

$$V_2 = V_1 + (v - F_1)^2/2 > 0 \quad (16)$$

に対して $\dot{V}_2$ を半負定にするトルク入力 u を求める. すると, $\dot{v} = u$ と式 (14) から

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{P}(\ddot{P} + f_1 P) + (u - \dot{F}_1)(v - F_1) \\ &= \dot{P}\{(\partial d/\partial z)(P/h) + (\partial d/\partial \psi)v + f_1 P\} \\ &\quad + (u - \dot{F}_1)(v - F_1) \\ &= \dot{P}\{(\partial d/\partial z)(P/h) + (\partial d/\partial \psi)(v - F_1 + F_1) + f_1 P\} \\ &\quad + (u - \dot{F}_1)(v - F_1) \\ &= \dot{P}\{(\partial d/\partial z)(P/h) + (\partial d/\partial \psi)F_1 + f_1 P\} \\ &\quad + (u - \dot{F}_1 + (\partial d/\partial \psi)d)(v - F_1) \end{aligned} \quad (17)$$

とおけ, さらに, 式 (15) の F_1 の定義と $d\dot{P} = \dot{P}^2$ を使い

$$\dot{V}_2 = -f_2 \dot{P}^2 - f_3 (v - F_1)^2 \leq 0 \quad (18)$$

となるように u を選べば

$$u = \dot{F}_1 - f_3(v - F_1) - \frac{\partial d}{\partial \psi} d \quad (19)$$

となる。ただし、 $f_3 > 0$ は設計パラメータである。

ただし、 $V_2(V_1)$ は半負定なので、状態は

$$P = 0, \quad \dot{P} = -k_1 \cos \theta - k_2 \cos(\psi + \theta) = 0 \quad (20)$$

を満たす平衡マニフォールドで静止する。これは、軸受けの真上にロボットの重心がある姿勢となる。以下、これを状態 **M** (status **M**) と呼ぶ。この状態は Fig. 2 の実線のように、 $\theta - \psi$ 平面の曲線を描く。

一度、状態 **M** に達したら、 $\theta = \pi/2$, $\psi = 0$ の倒立制御に関しては、平衡点を少しずつ上げていく線形近似制御を採用することが考えられる [1]。

特に、式 (15) において入力を発散させる特異点は $\partial d / \partial \psi = 0$ から

$$-k_1 \sin \theta (\gamma + \beta \cos \psi) + k_2 \sin(\theta + \psi) (\alpha + \beta \cos \psi) = 0 \quad (21)$$

を満たす $\theta - \psi$ 平面の曲線群となる。この特異曲線を Fig. 2 に点線で示す。これから、少なくとも $\theta(0)$, $\psi(0)$ は二つの特異曲線内になくなくてはならない。なお、入力をトルクに変えても新しい特異点は現れない。この特異曲線の存在のため、式 (19) だけに頼っては、懸垂状態からの倒立制御は不可能であることが分かる。なぜなら、 $(\theta, \psi) = (-\pi/2, 0)$, $(\pi/2, 0)$ の間を特異曲線が走っているからである。そこで、懸垂状態から特異曲線内部までの状態推移に関しては、入力 u として正弦波を加え、多少の試行錯誤でその振幅や大きさを決めた。シミュレーション結果は次章で示す。

3.2 制御則 B

次に線形近似制御を使わない方法を示す。前節のように、 P だけを式 (11) を満たすように安定化しても一次の Zero Dynamics (積分型) が残り、状態は式 (20) にとどまり、直接的に $z = 0$ ($\theta = \pi/2$) を実現することはできない。

そこで、Cambrini [7] らが歩行ロボットの研究で提案しているように

$$y = P + Lz \quad (22)$$

を P に代わる制御量とし

$$\ddot{y} + c_2 \dot{y} + c_1 y = 0 \quad (23)$$

として安定化することを考える。ただし、 $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $L > 0$

Fig. 2 Equilibrium and singular lines

は設計パラメータである。この場合、式 (10) から、 $z = P/h$ が成り立つので、 $y = 0$ は

$$y = h(\psi) \dot{z} + Lz = 0 \quad (24)$$

に等しく、 $h(\psi) > 0$ から z は安定となり、 $z = 0$ ($\theta = \pi/2$) への漸近が保証される。一方、 $z = 0$ となった場合、状態は

$$z = \theta + w(\psi) = 0 \quad (25)$$

を満たす別の平衡マニフォールドを構成する。このマニフォールドは Fig. 2 に一点鎖線で示したようになり、状態 **M** を満たすマニフォールドとの交点は $(\theta, \psi) = (\pi/2, 0)$ 唯一となる。さらに、 $y = 0$, $z = 0$ は $P = 0$ を意味するので、結局全変数が安定化される。制御則は式 (22), 式 (10), 式 (14), および

$$\ddot{z} = \frac{\dot{P}}{h} - \frac{(\partial h / \partial \psi) P v}{h^2} \quad (26)$$

を式 (23) に代入して

$$\begin{aligned} v &= F_2(z, P, \psi) \\ &= - \left(\frac{\partial d}{\partial \psi} - \frac{(\partial h / \partial \psi) P L}{h^2} \right)^{-1} \\ &\quad \times \left(\frac{\partial d}{\partial z} \frac{P}{h} + \frac{L d}{h} + c_2 \left(d + \frac{L P}{h} \right) + c_1 (P + L z) \right) \end{aligned} \quad (27)$$

となる。トルク入力 u を使う場合、Backstepping を行えば

$$u = \dot{F}_2 - c_3(v - F_2) - \left(\frac{\partial d}{\partial \psi} - L \frac{(\partial h / \partial \psi) P}{h^2} \right) \dot{y} \quad (28)$$

となる。これを制御則 **B** とする。

ただし、 v を発散させる特異点が

$$\frac{\partial d}{\partial \psi} - \frac{(\partial h / \partial \psi) P L}{h^2} = 0 \quad (29)$$

を満たす平面 (θ, P, ψ) となり、 P に制約が生ずる。Fig. 3 には $L = 1$ で P を 0 ~ 10 変えた場合の特異平面を $\theta - \psi$ 平面に投影したものを図示した。ただし、Fig. 2 で $(\theta, \psi) = (\pi, 0)$ を通る特異曲線に対応するもののみが示されている (Fig. 2 の点線は $P = 0$ の場合に対応する)。これから、 P が大きくなると隣あった特異曲線が近づき、 θ , ψ の動作範囲が極度に制約されることが分かる。このため、制御則 **B** を使っても、状態 **M** への収束、線形近似制御を一つにまとめることは困難であった。よって、ここでは、制御則 **A** によって一度 $P = 0$ としておいてから、線形近似制御の繰り返しに代えて制御則 **B** を使うことを提案する。すなわち、正弦波入力、制御則 **A**, 制御則 **B** の三つを順に適用することを提案する。

4. シミュレーション結果

以上の結果に基づいて静止懸垂姿勢 $(\theta, \psi) = (-\pi/2, 0)$ から倒立姿勢 $(\theta, \psi) = (\pi/2, 0)$ までの制御のシミュレーションを行った。パラメータは $m_1 = 1$ [kg], $m_2 = 1$ [kg], $l_1 = 1$ [m], $l_2 = 2$ [m], $a_1 = 0.5l_1$, $a_2 = 0.5l_2$, $g = 9.8$ [m/s²], $J_1 = 0.0833$ [kgm²], $J_2 = 0.3333$ [kgm²] とした。第 1 ステップの制

Fig. 3 Singular line with the change of P

Fig. 4 Trajectory of the states ψ and θ

御入力は $u = -12 \cos(3t)$ とした。制御則 A, 制御則 B への切り換え時間はそれぞれ $t_1 = 3.1(s)$, $t_2 = 5(s)$ であり, フィードバックゲインは $f_1 = c_1 = 9, f_2 = c_2 = 6, f_3 = c_3 = 8, L = 3$ とした。

Fig. 4 は状態変数 ψ, θ の解軌道の特異曲線と共に表したものであり, ○印の 2 個所で三つの制御を切りかえている。正弦波の振り上げ制御で軌道が特異曲線内に入ることが分かる。ただし, 状態の軌道 ($\theta - \psi$) を特異曲線内に移動させるため必要な正弦波入力の振幅と周期は試行錯誤を通して決めた。Fig. 5 は閉ループ系の状態変数とトルク入力の応答であり, Fig. 6 はシミュレーション結果を動画に表したものであり, 図中の小さな黒丸はロボットの重心を表している。図からは目標とする倒立姿勢が達成されていることが分かる。

5. おわりに

アクロボットの振り上げ倒立制御に関して特異点を解析し, 新しい制御則を提案し, シミュレーションによって有効性を検証した。

参考文献

- [1] 美多: 非線形制御入門-劣駆動ロボットの技能制御論-, 昭晃堂, 2000.
- [2] G. Oriolo and Y. Nakamura: "Control of Mechanical Systems with Second-Order Nonholonomic Constraints: Underactuated Manipulators," in Proc. of IEEE CDC, pp.2398-2403, 1991.
- [3] J. Hauser and R.M. Murray: "Nonlinear controllers for non-integrable systems: the Acrobot example," Proc. of IEEE CDC, pp.669-671, 1996.
- [4] M. Spong: "The swing up control problem for the acrobot, IEEE Control Systems Magazine," vol.15, no.2, pp.49-55, 1995.
- [5] R.O. Saber and A. Megretski: "Controller design for a class of underactuated nonlinear Systems," Proc. IEEE CDC, pp.4182-4186, 1988.
- [6] R.O. Saber: "Control of Underactuated Mechanical Systems

(a) Time evolution of states (I)

(b) Time evolution of states (II)

(c) Time evolution of torque

Fig. 5 Simulation

Fig. 6 Animation of swing up control

with Two Degrees of Freedom and Symmetry," in Proc. of ACC, pp.4092-4096, 2000.

- [7] L. Cambrini, C. Chevallereau, C.H. Moog and R. Stojic: "Stable Trajectory Tracking for Biped Robots," Proc. of IEEE CDC, pp.4815-4820, 2000.
- [8] H.K. Khalil: Nonlinear Systems. Prentice Hall, 1996.