機械知能を設計するための基本技術としての ブール多値論理の小数符号化

鈴木 寿^{*1} 齋藤 亮^{*2} 島田 道雄^{*3}

Fractional Coding of Boolean Multivalued Logic as a Fundamental Technique for Designing Machine Intelligence

Hisashi Suzuki^{*1}, Makoto Saito^{*2} and Michio Shimada^{*3}

Multivalued logic is important as a fundamental technique in designing machine intelligence. Particularly Boolean multivalued logic such that the whole set of logic formulas forms a Boolean algebra inherits those theorems, laws, etc. which are obtained in traditional Boolean binary logic. In this article, only logic such that logic formulas take more-than-two truth values is called multivalued logic, and any logic such that weights or costs are added to logic formulas of Boolean binary logic is not classified into multivalued logic. This article defines Boolean multivalued logic by coding binary fractions being greater than or equal to 0 and less than 1 directly as truth values. To handle readily Bayesian theory rationalizing collection of knowledges via observation, this article also introduces an arithmetic operation called "conditioning" in addition to usual logic operations. A key to advancing machine intelligence built in a certain kind of robots required an ability of thinking is extracting causality between objects by introducing such a robust logic that can process inferences consistently. This article shows with some instances the way of optimizing truth values of atoms when what truth values some logic formulas should take are given as knowledges, and the way of calculating the truth values of unknown logic formulas as inferences. It also mentions possibility of introducing natural language for realization of phonic conversation between users and machine intelligence.

Key Words: Machine Intelligence, Boolean Multivalued Logic, Fractional Coding, Inference, Bayesian Theory

1. はじめに

多値論理は機械知能を設計する際の基本技術として重要である。特に、論理式の全体集合がブール代数をなすブール多値論理は、伝統的なブール2値論理において得られるいろいろな知見を継承し、知能設計時の見通しを良くする[1]。

いろいろな論理が“多値論理”と呼ばれているが、本稿では論理式が2通りより多くの真理値をとるような論理のみを多値論理と呼ぶとする。この定義下では、ブール2値論理の論理式に荷重やコストが付加された多くの多値論理、例えばベイズネットワーク、確信度、Dempster-Shafer理論など[2]は、多値論理には分類しない。なぜなら、荷重やコストが多値をとっても、

論理式そのものは2通りの真理値しかとりえないからである。対照的に本稿は、第2章において、0以上1未満の2進小数を直接的に真理値として符号化することにより、論理式の全体集合がブール代数をなすブール多値論理を定義する。以降では、単に“提案論理”と呼ぶときは、この新たに定義されたブール多値論理を意味するものとする。

一般論として、思考能力が必要な用途のロボットに搭載される機械知能を高度化するには、多変量解析を導入したり神経回路網による記憶学習を導入するなどしてオブジェクト間の相関関係を抽出するだけでなく、いわゆる推論(inference)を一貫して扱えるような堅固な論理を導入しオブジェクト間の因果関係を強力に抽出することが一つの鍵となる。第3章において提案論理がそのような目的に沿うことを端的に例示し、さらに第4章において自然言語を用いた応用の可能性にも言及する。

やや詳細な補足となるが、提案論理はブール多次元論理(Boolean multidimensional logic) [1] [3]~[5]と同様、相補ファジイ論理(complementary fuzzy logic) [6]~[8]の一つの実現[†]である。しかし、付録Aに述べるように提案論理はブール多次元論理[1]がいくぶん高速化された構成原理に基づいており、ブール多次元論理に比べて自由度が低い代わりに扱いやすくなっ

原稿受付 2002年8月30日

^{*1}中央大学理工学部

^{*2}岩手医科大学歯学部

^{*3}機械学習研究所

[†]Chuo University

^{*}Iwate Medical University

^{*}Machine Learning Laboratory

[†]{論理式₁: 真理値₁, ..., 論理式_k: 真理値_k} (kは自然数)なる形のファジイ集合を用いて記述されるファジイ論理[9]と、ブール多値論理との関係は、文献[1]で議論されている。

ている。

2. ブール多値論理の構成

2.1 小数符号化による多値論理の構成

以下では、小数符号化によって、一つの多値論理を構成する。

① 論理式 (logic formula, well-formed formula [wff])

論理系において真理値をとる文法上の最小単位であるアトム (atom, atomic formula [atf]) は、固定小数点表示法における任意の 2 進数 $0.x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(n)}_2$ ($x^{(1)} \in \{0, 1\}, x^{(2)} \in \{0, 1\}, \dots, x^{(n)} \in \{0, 1\}$) を真理値としてとる。ここに、 n は自然数をとる定数であり、次元と呼ぶ。

論理式は、以降に定める論理演算をアトムまたは論理式自身に適用した結果であり、一つの真理値をとる。

② 否定 (negation)

論理式 $x = 0.x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(n)}_2$ の否定 $\neg x$ は、 $x^{(i)}$ のブール 2 値否定 $z^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) からなる真理値 $0.z^{(1)}z^{(2)}\dots z^{(n)}_2$ をとるとする。

例えば、 $n = 16$ のとき、

$$x = 0.0000\ 0000\ 0000\ 1111_2 = 0.0002288818359375 \quad (1)$$

に対し

$$\neg x = 0.1111\ 1111\ 1111\ 0000_2 = 0.9997711181640625 \quad (2)$$

となる。

③ 論理積 (conjunction)

論理式 $x = 0.x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(n)}_2$ と $y = 0.y^{(1)}y^{(2)}\dots y^{(n)}_2$ の論理積 $x \wedge y$ は、 $x^{(i)}$ と $y^{(i)}$ のブール 2 値論理積 $z^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) からなる真理値 $0.z^{(1)}z^{(2)}\dots z^{(n)}_2$ をとるとする。

例えば、 $n = 16$ のとき、

$$x = 0.0000\ 0000\ 0000\ 1111_2 = 0.0002288818359375, \quad (3)$$

$$y = 0.1001\ 1001\ 1001\ 1001_2 = 0.5999908447265625 \quad (4)$$

に対し

$$x \wedge y = 0.0000\ 0000\ 0000\ 1001_2 = 0.0001373291015625 \quad (5)$$

となる。

④ 論理和 (disjunction)

同様に、論理和 $x \vee y$ は、 $x^{(i)}$ と $y^{(i)}$ のブール 2 値論理和 $z^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) からなる真理値 $0.z^{(1)}z^{(2)}\dots z^{(n)}_2$ をとるとする。

⑤ 含意 (implication)

一つのブール論理を定義するにはこれら三つの論理演算があれば十分であるが、推論を簡便に記述するため、さらに二つの

論理演算を定める。

ある論理式 $x = 0.x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(n)}_2$ から別の論理式 $y = 0.y^{(1)}y^{(2)}\dots y^{(n)}_2$ への含意 $x \rightarrow y$ は、 $x^{(i)}$ から $y^{(i)}$ へのブール 2 値含意 $z^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) からなる真理値 $0.z^{(1)}z^{(2)}\dots z^{(n)}_2$ をとるとする。

⑥ 等価 (equivalence)

同様に、等価 $x \leftrightarrow y$ は、 $x^{(i)}$ と $y^{(i)}$ のブール 2 値等価 $z^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) からなる真理値 $0.z^{(1)}z^{(2)}\dots z^{(n)}_2$ をとるとする。

⑦ 離散化された真理値

論理演算を以上のように定義することにより、任意の論理式は固定小数点表示法におけるある 2 進数 $0.x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(n)}_2$ ($x^{(1)} \in \{0, 1\}, x^{(2)} \in \{0, 1\}, \dots, x^{(n)} \in \{0, 1\}$) をとる。この 2 進数は、計算機上で、小数部を保持する n ビット系列

$$\boxed{x^{(1)}} \boxed{x^{(2)}} \dots \boxed{x^{(n)}} \quad (6)$$

として表すことができる。上記形式で表される真理値は、実数区間 $[0, 1)$ から間隔 $\Delta = 2^{-n}$ (例えば、 $n = 16$ のとき $\Delta = 0.0000152587890625$) で選ばれる 2^n 個の点 $0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \dots, 1 - 2\Delta, 1 - \Delta$ である。

論理式は正確には 1 をとりえないが、 n を増やすことによって最大値 $1 - \Delta$ は限りなく 1 に近づく。この意味において以降では $1 - \Delta$ を簡単に 1_n と記す。例えば、 $n = 16$ のとき

$$1_n = 0.9999847412109375 \quad (7)$$

である。

なお、 $n = 1$ に対する真理値の値域は $\{0, 1\}$ ではなく $\{0, 0.5\}$ である点に注意を要する。ブール 2 値論理において真理値 0 は“偽”，真理値 1 は“真”に対応するが、 $n = 1$ なる特殊な場合における多値論理の真理値 0 は“偽”，真理値 0.5 は“中立”に対応し，“真”に対応する真理値 1 がない。このように、提案論理はブール 2 値論理の素直な拡張というわけではないが、 n を増やせば、ほぼ“真”に近い真理値 1_n をとるようになる。

⑧ ベイズ理論との親和性

観測による知識の収集を合理化するベイズ理論 (文献 [10], [11] 参照) を容易に扱うため、本稿では論理演算のほかに、条件化 (conditioning) と名づける算術演算を導入する。ある論理式 x から他の論理式 y への条件化は

$$y|x = \frac{x \wedge y}{x} \quad (8)$$

である。

重要な性質として、 $x \wedge (x \wedge y) = x \wedge y$ および $x \wedge y = (x \wedge \neg x) \vee (x \wedge y) = x \wedge (\neg x \vee y) = x \wedge (x \rightarrow y)$ より、

$$\begin{aligned} (x \wedge y)|x &= \frac{x \wedge (x \wedge y)}{x} \\ &= y|x \left(= \frac{x \wedge y}{x} \right) \\ &= (x \rightarrow y)|x \left(= \frac{x \wedge (x \rightarrow y)}{x} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

が成り立つ。このことは、例えば、3.1 節において知識 (12) す

なわち泣く | 虫歯 ≈ 1 の代わりに (虫歯 $\wedge$ 泣く) | 虫歯 ≈ 1 とおいてよいし, (虫歯 $\rightarrow$ 泣く) | 虫歯 ≈ 1 とおいてもよいことを意味する. このように, 提案論理は数学的な簡潔性を保持しつつ自然言語の豊富な語彙を反映できる柔軟性を有している.

2.2 ブール性

ブール 2 値論理積と論理和はそれぞれ交換法則を満たすので, 前節で定義された多値の論理積 $\wedge$ と論理和 $\vee$ のそれぞれもまた交換法則を満たすことが分かる. ブール 2 値論理積と論理和はそれぞれ結合法則を満たすので, 多値の論理積 $\wedge$ と論理和 $\vee$ のそれぞれもまた結合法則を満たすことが分かる. さらに, ブール 2 値論理積と論理和は併せて吸収法則を満たすので, 多値の論理積 $\wedge$ と論理和 $\vee$ もまた併せて吸収法則を満たすことが分かる. このように, 多値の論理積 $\wedge$ を交わり (meet) とし論理和 $\vee$ を結び (join) とする論理式の全体集合は, 束を形成する.

任意の論理式 x とその補元 $\neg x$ に対し

$$x \wedge \neg x = 0.00 \cdots 0_2 = 0, \quad (10)$$

$$x \vee \neg x = 0.11 \cdots 1_2 = 1_n \quad (11)$$

なので, 論理式の全体集合は可補束を形成する. ここに, 0 および 1_n は単位元である.

ブール 2 値論理積と論理和は併せて分配法則を満たすので, 多値の論理積 $\wedge$ と論理和 $\vee$ もまた併せて分配法則を満たすことが分かる. このように, 論理式の全体集合は分配束を形成する.

論理式の全体集合は可補束であると同時に分配束なので, ブール代数を形成する. この意味において, 2.1 節で定義した多値論理は, ブール多値論理と呼べる.

3. 推 論

推論は, オブジェクト間の既知の因果関係から未知の因果関係を合理的に導き出す過程である. ブール多値論理において, オブジェクトはアトムとして記述でき, オブジェクト間の因果関係は論理式がどのような真理値をとるかによって記述できる. 以下に, そのような推論の運用方法を端的に表す例を述べる.

3.1 知識

本稿では, 知識 (knowledge) $x \approx r$ とは, 論理式 x が目標値 $r \in [0, 1]$ にできる限り近い値をとるべきことを表す制約条件 (constraint) であるとする.

いま, 診断を行う機械知能への応用を想定し, 虫歯, 炎症, 過敏, 泣く, 要治療, 要検査, 重篤をアトムとする次のような 11 個の知識からなる集合が与えられた場合を考える.

$$\text{泣く} \mid \text{虫歯} \approx 1, \quad (12)$$

$$\text{要治療} \mid \text{虫歯} \approx 0.95, \quad (13)$$

$$\text{泣く} \mid \text{炎症} \approx 1, \quad (14)$$

$$\text{要治療} \mid \text{炎症} \approx 0.95, \quad (15)$$

$$\text{要検査} \mid \text{要治療} \approx 0.8, \quad (16)$$

$$\text{泣く} \mid \text{過敏} \approx 1, \quad (17)$$

$$\text{要治療} \mid \text{過敏} \approx 0, \quad (18)$$

$$\text{虫歯} \wedge \text{重篤} \approx 0, \quad (19)$$

$$\text{虫歯} \approx 0.5, \quad (20)$$

$$\text{炎症} \approx 0.5, \quad (21)$$

$$\text{過敏} \approx 0.25. \quad (22)$$

これらの知識の意味は次のとおりであるとする.

知識 (12) は, ある子供が虫歯であるという条件下で, その子供は“絶対に”泣くことを意味する. 同様に, 知識 (14) は, ある子供が炎症を起しているという条件下で, その子供は“絶対に”泣くことを意味する. 知識 (17) は, ある子供が単なる過敏であるという条件下で, その子供は“絶対に”泣くことを意味する.

知識 (13) は, ある子供が虫歯であるという条件下で, その子供は“ほとんど”の場合治療を要することを意味する. 同様に, 知識 (15) は, ある子供が炎症を起しているという条件下で, その子供は“ほとんど”の場合治療を要することを意味する. 対照的に, 知識 (18) は, ある子供が単なる過敏であるという条件下で, その子供は“決して”治療は要さないことを意味する.

知識 (16) は, ある子供が治療を要するという条件下で, その子供は“たぶん”治療前後の検査を要することを意味する.

知識 (19) は, 虫歯でありかつ重篤である子供は“いない”ことを意味する. なお, この定式化は, ある子供が虫歯であっても重篤とはいえないことを意味する

$$\text{重篤} \mid \text{虫歯} \approx 0 \quad (23)$$

とは異なるが, 実効上は, 式 (9) の性質より, 虫歯 = 0 でない限り知識 (19), (23) は同等である.

知識 (20) は, ある子供は虫歯かもしれないしそうではないかもしれないことを意味する. ここに, 0.5 は虫歯か否かを観測するときの中立性を意味する. 知識 (21) もまた, ある子供は炎症を起しているかもしれないしそうではないかもしれないことを意味する. 他方, 知識 (22) は, 子供が単なる過敏であることは比較的少ないことを意味する.

3.2 学習

すべてのアトムについて真理値が与えられたとき, 任意の論理式の値を計算でき, その値を実現値と呼ぶとする. すべてのアトムについて真理値が与えられたとき, おのおのの知識 $x \approx r$ の左辺 x の実現値を計算できる. この実現値と目標値 r との間隙, すなわち, 差の絶対値は, できる限り小さいことが望ましい. すべての知識に関する間隙を減少させるようにアトムの値を最適化する過程を, 学習 (learning) と呼ぶとする. それは一種の数値計画問題であり, 代表的な線形計画アルゴリズム [12] や, 各種の試行錯誤による求解や, その他のいろいろな方法を用いて解くことができる.

以下の例は, 知識 (12) ~ (22) に関する間隙の偏差を局所的に最小化する試行錯誤によって得られたアトムの真理値の一例である.

$$\begin{aligned} \text{虫歯} &= 0.1000\,0011\,1110\,1111_2 \\ &= 0.5153656005859375, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{炎症} &= 0.1000\ 0011\ 1111\ 1111_2 \\ &= 0.5156097412109375, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{過敏} &= 0.0100\ 0010\ 1000\ 1000_2 \\ &= 0.2598876953125, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{泣く} &= 0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2 \\ &= 0.765380859375, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \text{要治療} &= 0.1001\ 1100\ 0000\ 0000_2 \\ &= 0.609375, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{要検査} &= 0.1010\ 0000\ 1110\ 0011_2 \\ &= 0.6284637451171875, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \text{重篤} &= 0.0011\ 1001\ 0001\ 0111_2 \\ &= 0.2230072021484375. \end{aligned} \quad (30)$$

この場合、知識 (12)～(22) における左辺の論理式がとる実現値は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{泣く} \mid \text{虫歯} &= 0.9995574951171875 \\ &= 1 - 0.0004425048828125, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \text{要治療} \mid \text{虫歯} &= 0.970184326171875 \\ &= 0.95 + 0.020184326171875, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \text{泣く} \mid \text{炎症} &= 0.9995574951171875 \\ &= 1 - 0.0004425048828125, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \text{要治療} \mid \text{炎症} &= 0.9697265625 \\ &= 0.95 + 0.0197265625, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \text{要検査} \mid \text{要治療} &= 0.8205108642578125 \\ &= 0.8 + 0.0205108642578125, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \text{泣く} \mid \text{過敏} &= 0.9995269775390625 \\ &= 1 - 0.0004730224609375, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\text{要治療} \mid \text{過敏} = 0 = 0 \pm 0, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \text{虫歯} \wedge \text{重篤} &= 0.0040130615234375 \\ &= 0 + 0.0040130615234375, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \text{虫歯} &= 0.5153656005859375 \\ &= 0.5 + 0.0153656005859375, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \text{炎症} &= 0.5156097412109375 \\ &= 0.5 + 0.0156097412109375, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \text{過敏} &= 0.2598876953125 \\ &= 0.25 + 0.0098876953125. \end{aligned} \quad (41)$$

間隙の偏差は 0.0128328134040519 であり、間隙の最大値は式 (35) に対応する 0.0205108642578125 である。

さて、以上のように（オブジェクト間の既知の関係を記述する）知識に基づいてアトム の値がいったん最適化されると、（オブジェクト間の未知の関係を記述する）任意の論理式の実現値を計算できるようになるが、この過程は推論にはかならない。提案論理における上記過程は帰納推論と演繹推論に共通であり、

次節が示唆するように、両者の違いは他の多値論理におけるような複雑なものではなく、推論の応用場面の違いを反映した形式上の分類に過ぎない。

3.3 帰納推論

泣くを引き起す具体例と考えられる虫歯、炎症、過敏の性質に関する知識 (12)～(22) に基づき、例えば次のような、アトム間の関係を抽出できる。

式 (24)～(27) に基づき、

$$\begin{aligned} \text{虫歯} \vee \text{炎症} \vee \text{過敏} &= 0.1000\ 0011\ 1110\ 1111_2 \vee 0.1000\ 0011\ 1111\ 1111_2 \\ &\vee 0.0100\ 0010\ 1000\ 1000_2 \\ &= 0.1100\ 0011\ 1111\ 1111_2 \end{aligned} \quad (42)$$

より

$$\begin{aligned} (\text{虫歯} \vee \text{炎症} \vee \text{過敏}) \mid \text{泣く} &= 0.1100\ 0011\ 1111\ 1111_2 \mid 0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2 \\ &= \frac{0.1100\ 0011\ 1111\ 1111_2 \wedge 0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2}{0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2} \\ &= \frac{0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2}{0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2} = 1 \end{aligned} \quad (43)$$

が得られる。これは、子供が泣くという条件下で、“絶対に”虫歯、炎症、単なる過敏のいずれかであることを意味する。実際、知識 (12)～(22) には泣く原因として虫歯、炎症、単なる過敏の 3 例だけが含まれているので、式 (43) は妥当な帰結といえる。

式 (27)、(28) に基づき

$$\begin{aligned} \text{要治療} \mid \text{泣く} &= 0.1001\ 1100\ 0000\ 0000_2 \mid 0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2 \\ &= \frac{0.1001\ 1100\ 0000\ 0000_2 \wedge 0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2}{0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2} \\ &= \frac{0.1000\ 0000\ 0000\ 0000_2}{0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2} = 0.6532 \dots \end{aligned} \quad (44)$$

が得られる。これは、子供が泣くという条件下で、“どちらかといえば”治療を要することを意味する。実際、知識 (12)～(22) には泣く原因として虫歯、炎症、単なる過敏の 3 例だけが含まれており、虫歯と炎症は治療を要するが単なる過敏は治療を要さないのので、式 (44) は妥当な帰結といえる。

$\oplus$ は、任意の論理式 x と y に関し $x \oplus y = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$ なる排他的論理和演算を表すとする。式 (27)、(28) に基づき、

$$\begin{aligned} \text{泣く} \oplus \text{要治療} &= 0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2 \oplus 0.1001\ 1100\ 0000\ 0000_2 \\ &= 0.0101\ 1111\ 1111\ 0000_2 \end{aligned} \quad (45)$$

より

$$\begin{aligned} (\text{泣く} \oplus \text{要治療}) \mid \text{泣く} &= 0.0101\ 1111\ 1111\ 0000_2 \mid 0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2 \\ &= \frac{0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2 \wedge 0.0101\ 1111\ 1111\ 0000_2}{0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2} \end{aligned}$$

$$= \frac{0.0100\ 0011\ 1111\ 0000_2}{0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2} = 0.3467 \dots \quad (46)$$

が得られる。これは、子供が泣くという条件下で、子供が泣くことと治療を要することは“どちらかといえば”違いがないことを意味する。

式 (27), (30) に基づき

$$\begin{aligned} & \text{重篤} \mid \text{泣く} \\ &= \frac{0.0011\ 1001\ 0001\ 0111_2 \mid 0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2}{0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2 \wedge 0.0011\ 1001\ 0001\ 0111_2} \\ &= \frac{0.0000\ 0001\ 0001\ 0000_2}{0.1100\ 0011\ 1111\ 0000_2} = 0.0054 \dots \quad (47) \end{aligned}$$

が得られる。これは、子供が泣いても、重篤であることは“まれ”であることを意味する。

式 (29), (30) に基づき

$$\begin{aligned} & \text{重篤} \mid \text{要検査} \\ &= \frac{0.0011\ 1001\ 0001\ 0111_2 \mid 0.1010\ 0000\ 1110\ 0011_2}{0.1010\ 0000\ 1110\ 0011_2 \wedge 0.0011\ 1001\ 0001\ 0111_2} \\ &= \frac{0.0010\ 0000\ 0000\ 0011_2}{0.1010\ 0000\ 1110\ 0011_2} = 0.1989 \dots \quad (48) \end{aligned}$$

が得られる。これは、治療前後の検査を要しても、“たぶん”重篤ではないことを意味する。

3.4 演繹推論

ブール多値論理演算がビットごとのブール 2 値論理演算の並置として定義されていることから明らかなように、ブール 2 値論理におけるすべての定理や法則等は提案論理においても成立する。2 値論理と多値論理の数学的な相違は、前者が 2 通りの真理値しかとりえない一方、後者は 2^n 通りの真理値をとりうるという点だけである（ただし、多値であることはブール論理の応用範囲を大幅に拡大するので、この違いは重要である）。

ブール 2 値論理におけるのと同様、提案論理においても、いろいろな定理や法則等から演繹的に得られる任意の結論は、アトムの真理値に基づいて直接的に論理式の真理値を計算することによっても得られる。以下にそのような例をいくつか示す。

① 補充法則に関して

補充法則とは任意の論理式 $x = 0.x^{(1)}x^{(2)} \dots x^{(n)}_2$ に対する

$$\neg x = 1_n - x \quad (49)$$

なる関係であり、これはブール 2 値論理の補充法則 $\neg x^{(i)} = 1 - x^{(i)} \forall i = 1, 2, \dots, n$ から直ちに得られる。

例えば式 (24) ~ (30) の場合、

$$\begin{aligned} & \neg \text{虫歯} \\ &= \neg 0.5153656005859375 = \neg 0.1000\ 0011\ 1110\ 1111_2 \\ &= 0.0111\ 1100\ 0001\ 0000_2 = 0.484619140625 \\ &= 0.9999847412109375 - 0.5153656005859375 \\ &= 1_n - \text{虫歯} \quad (50) \end{aligned}$$

であり、これは等式 (49) の具体例となっている。

② 連鎖律に関して

連鎖律とは、任意の論理式 $x = 0.x^{(1)}x^{(2)} \dots x^{(n)}_2$, $y = 0.y^{(1)}y^{(2)} \dots y^{(n)}_2$, $z = 0.z^{(1)}z^{(2)} \dots z^{(n)}_2$ に対する関係

$$\begin{aligned} & \{(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)\} \rightarrow (x \rightarrow z) \\ &= 1_n = 0.1111\ 1111\ 1111\ 1111_2 \quad (51) \end{aligned}$$

であり、これは真理値に関する不等式

$$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow z \quad (52)$$

を保証する。実際、おのおのの $i = 1, 2, \dots, n$ に対しブール 2 値論理において次が成り立つ。

$x^{(i)}$	0 0 0 0 1 1 1 1
$y^{(i)}$	0 0 1 1 0 0 1 1
$z^{(i)}$	0 1 0 1 0 1 0 1
$x^{(i)} \rightarrow y^{(i)}$	1 1 1 1 0 0 1 1
$y^{(i)} \rightarrow z^{(i)}$	1 1 0 1 1 1 0 1
$(x^{(i)} \rightarrow y^{(i)}) \wedge (y^{(i)} \rightarrow z^{(i)})$	1 1 0 1 0 0 0 1
$x^{(i)} \rightarrow z^{(i)}$	1 1 1 1 0 1 0 1

(53)

最後の 2 行は

$$(x^{(i)} \rightarrow y^{(i)}) \wedge (y^{(i)} \rightarrow z^{(i)}) \leq x^{(i)} \rightarrow z^{(i)} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (54)$$

すなわち不等式 (52) を保証する。

例えば式 (24) ~ (30) の場合、

$$\begin{aligned} & (\text{虫歯} \rightarrow \text{要治療}) \wedge (\text{要治療} \rightarrow \text{要検査}) \\ &= 0.1110\ 0000\ 0001\ 0000_2 = 0.875244140625 \quad (55) \end{aligned}$$

である一方

$$\begin{aligned} & \text{虫歯} \rightarrow \text{要検査} = 0.1111\ 1100\ 1111\ 0011_2 \\ &= 0.9880828857421875 \quad (56) \end{aligned}$$

なので、

$$(\text{虫歯} \rightarrow \text{要治療}) \wedge (\text{要治療} \rightarrow \text{要検査}) \leq \text{虫歯} \rightarrow \text{要検査} \quad (57)$$

が得られるが、これは不等式 (52) の具体例となっている。

③ ベイズの連鎖律に関して

任意の論理式 $x = 0.x^{(1)}x^{(2)} \dots x^{(n)}_2$, $y = 0.y^{(1)}y^{(2)} \dots y^{(n)}_2$, $z = 0.z^{(1)}z^{(2)} \dots z^{(n)}_2$ に対する関係

$$\begin{aligned} & \{(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)\} \vee \{(x \rightarrow \neg y) \wedge (\neg y \rightarrow z)\} \\ & \leftrightarrow (x \rightarrow z) \\ &= 0.1111\ 1111\ 1111\ 1111_2 \quad (58) \end{aligned}$$

はベイズ理論を扱う際に役立ち [11]、本稿ではこの関係をベイズの連鎖律と呼ぶとする。関係 (58) は真理値に関する等式

$$\{(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)\} \vee \{(x \rightarrow \neg y) \wedge (\neg y \rightarrow z)\} = x \rightarrow z \quad (59)$$

を保証する。実際、おのおのの $i = 1, 2, \dots, n$ に対しブール 2 値論理において次が成り立つ。

$x^{(i)}$	0 0 0 0 1 1 1 1
$y^{(i)}$	0 0 1 1 0 0 1 1
$z^{(i)}$	0 1 0 1 0 1 0 1
$\neg y^{(i)}$	1 1 0 0 1 1 0 0
$x^{(i)} \rightarrow \neg y^{(i)}$	1 1 1 1 1 1 0 0
$\neg y^{(i)} \rightarrow z^{(i)}$	0 1 1 1 0 1 1 1
$(x^{(i)} \rightarrow \neg y^{(i)}) \wedge (\neg y^{(i)} \rightarrow z^{(i)})$	0 1 1 1 0 1 0 0
$(x^{(i)} \rightarrow y^{(i)}) \wedge (y^{(i)} \rightarrow z^{(i)})$	1 1 0 1 0 0 0 1
$x^{(i)} \rightarrow z^{(i)}$	1 1 1 1 0 1 0 1

(60)

最後の 3 行は

$$\begin{aligned} & \{(x^{(i)} \rightarrow y^{(i)}) \wedge (y^{(i)} \rightarrow z^{(i)})\} \\ & \vee \{(x^{(i)} \rightarrow \neg y^{(i)}) \wedge (\neg y^{(i)} \rightarrow z^{(i)})\} \\ & = x^{(i)} \rightarrow z^{(i)} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (61)$$

すなわち等式 (59) を保証する。

例えば式 (24)～(30) の場合、

$$\begin{aligned} & \{(\text{虫歯} \rightarrow \text{要治療}) \wedge (\text{要治療} \rightarrow \text{要検査})\} \\ & \vee \{(\text{虫歯} \rightarrow \neg \text{要治療}) \wedge (\neg \text{要治療} \rightarrow \text{要検査})\} \\ & = 0.1111\ 1100\ 1111\ 0011_2 \\ & = 0.9880828857421875 \end{aligned} \quad (62)$$

である一方

$$\begin{aligned} \text{虫歯} \rightarrow \text{要検査} & = 0.1111\ 1100\ 1111\ 0011_2 \\ & = 0.9880828857421875 \end{aligned} \quad (63)$$

なので、

$$\begin{aligned} & \{(\text{虫歯} \rightarrow \text{要治療}) \wedge (\text{要治療} \rightarrow \text{要検査})\} \\ & \vee \{(\text{虫歯} \rightarrow \neg \text{要治療}) \wedge (\neg \text{要治療} \rightarrow \text{要検査})\} \\ & = \text{虫歯} \rightarrow \text{要検査} \end{aligned} \quad (64)$$

が得られるが、これは等式 (59) の具体例となっている。

4. ユーザとの会話を想定した自然言語化の可能性

本稿の趣旨は機械知能を設計するための基本技術としてブール多値論理の小数符号化法を提案することにあるが、以下に、広く本研究の意義を示すため提案論理の潜在的な応用の可能性についてビジョンを述べる。

筆者の鈴木らが研究している自動プログラミング[†]は、“自然

言語とプログラム言語間において明確な対応関係を確立し、意味解析処理と語彙の意味に関するデータを必要とせずに、自然言語からプログラム言語へ一意に変換できるようにする”技術である。もし“プログラム言語”を論理表現へと置き換えれば、ユーザは知識 (12)～(22) を次のように自然言語によって入力できるようになるだろう (付録 B 参照)。

- > ある子供が虫歯であるという条件下で、その子供は絶対に泣く。(知識 (12) に対応)
- > ある子供が虫歯であるという条件下で、その子供はほとんどの場合治療を要する。(知識 (13) に対応)
- > ある子供が炎症を起こしているという条件下で、その子供は絶対に泣く。(知識 (14) に対応)
- > ある子供が炎症を起こしているという条件下で、その子供はほとんどの場合治療を要する。(知識 (15) に対応)
- > ある子供が治療を要するという条件下で、その子供はたぶん治療前後の検査を要する。(知識 (16) に対応)
- > ある子供が炎症を起こしているという条件下で、その子供は絶対に泣く。(知識 (17) に対応)
- > ある子供が単なる過敏であるという条件下で、その子供は決して治療を要さない。(知識 (18) に対応)
- > 虫歯でありかつ重篤である子供はいない。(知識 (19) に対応)
- > ある子供は虫歯かもしれないしそうではないかもしれない。(知識 (20) に対応)
- > ある子供は炎症を起こしているかもしれないしそうではないかもしれない。(知識 (21) に対応)
- > ある子供が単なる過敏であることは比較的少ない。(知識 (22) に対応)

学習を行った結果、3.2 節 (式 (41) の直後参照) におけるように間隙の偏差として約 0.013、間隙の最大値として約 0.021 が得られ、知識すなわち制約条件がほぼ一貫していると考えられる場合、機械知能は次のように応答するとよいだろう。

“学習しました。知識はほぼ一貫しています。”

さらに、式 (43)～(48) は次のように運用できるだろう。

> ある子供が泣くという条件下で、その子供は虫歯、炎症、単なる過敏のいずれかか？

“ある子供が泣くという条件下で、その子供は絶対に虫歯、炎症、単なる過敏のいずれかです。” (式 (43) に対応)

> ある子供が泣くという条件下で、その子供は治療を要するか？

“ある子供が泣くという条件下で、その子供はどちらかといえば治療を要します。” (式 (44) に対応)

> ある子供が泣くという条件下で、その子供が泣くことと治療を要することは違いがあるか？

“ある子供が泣くという条件下で、その子供が泣くことと治療を要することはどちらかといえば違いがありません。” (式 (46) に対応)

> ある子供が泣くという条件下で、その子供は重篤か？

“ある子供が泣いても、その子供が重篤であることはまれです。” (式 (47) に対応)

> ある子供が治療前後の検査を要するという条件下で、そ

[†]金子 貴久, 鈴木 寿 発明, 金子 貴久 出願: “自動プログラミング装置、方法及び記憶媒体”, 特開 2002-182913, June 2002.

の子供は重篤か？

“ある子供が治療前後の検査を要しても、その子供はたぶん重篤ではありません。”（式（48）に対応）
音声認識技術と併せ用いれば、ユーザと機械知能は音声会話によって知的な情報交換ができるようになるだろう。

5. む す び

機械知能を設計するための基本技術として、2進小数を直接的に真理値の形で符号化するブール多値論理を定義し、推論への応用方法を示すとともに、自然言語化の可能性にも言及した。

一つの問題として、知識に基づくアトムの真理値の最適化は、やや計算時間を要する——論理系の運用に要する全体的な計算時間はブール多次元論理[1]から改善されたとはいえ、それでもなおこの点がボトルネックとなる。しかし、最適化は数値計画問題の一種であり技術的にはいくつかの解決策が考えられるので、実用的な観点から扱いやすいものを検討していく。

また、論理学の観点からは、今後、述語論理への拡張について検討する。

謝 辞 本研究の一部は、平成13・14年科学研究費補助金基盤研究（C）（2）課題番号13650466の補助を受けた。

参 考 文 献

- [1] 鈴木寿：“ロボットの知性を扱うための基本理論としてのブール性を満たすファジイ論理について”，日本ロボット学会誌，vol.19, no.4, pp.476-484, 2001.
- [2] 西田豊明：人工知能の基礎，pp.223-244, 丸善，1999.
- [3] H. Suzuki: “Multivalued Logic for Inference Chain, Induction and Deduction,” The Trans. of the Institute of Electronics, Information and Communication Engineers, Fundamentals, vol.E81-A, no.9, pp.1948-1950, 1998.
- [4] 鈴木寿：知識情報処理の基礎——Cによる多値論理処理，培風館，1999.
- [5] H. Suzuki: “A Boolean Multivalued Logical Model of Varying Confirmation by Observation of Events and Hempel's Paradox of the Ravens,” The Trans. of the Institute of Electronics, Information and Communication Engineers, Information and Systems, vol.E83-D, no.6, pp.85-87, 2000.
- [6] H. Suzuki and S. Arimoto: “Embedment of a Fuzzy Logic System into a Boolean Lattice for Satisfying a Complementary Law,” Information Sciences; An International Journal, Elsevier Science Inc., vol.78, pp.257-268, 1994.
- [7] 鈴木寿：“ブール相補ファジイ論理系”，電子情報通信学会論文誌，vol.J79-D-I, no.7, pp.395-399, 1996; translated to H. Suzuki: “A Boolean Complementary Fuzzy Logic System,” Systems and Computers in Japan, Scripta Technica, Inc., vol.28, no.8, pp.68-73, 1997.
- [8] H. Suzuki: “A Complementary Fuzzy Logic System,” IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics, vol.27, no.2, pp.293-295, 1997.
- [9] 本多中二 訳：ファジイ情報学，日刊工業新聞社，1993; translated from George J. Klir and Tina A. Folger: Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information. Prentice Hall, 1988.
- [10] Rudolf Carnap: Logical Foundations of Probability. University of Chicago Press, 1967.
- [11] Wesley C. Salmon: “Confirmation,” Scientific American, pp. 75-83, 1973.
- [12] 小山昭雄 訳：線形計画法とその周辺，ホルト・サウンダース・ジャパン，1983; translated from George B. Dantzig: Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, 1963.
- [13] Stephen Cole Kleene: Introduction to Metamathematics. New York: Van Nostrand, 1952; Amsterdam: North-Holland, 1967.

付録 A. ブール多値論理との関係

ブール 2^n 次元論理[1][3]～[5]において，論理式 $u = u^{(1)}u^{(2)}\dots u^{(2^{n-1})}$ ($u^{(1)} \in \{0, 1\}, u^{(2)} \in \{0, 1\}, \dots, u^{(2^{n-1})} \in \{0, 1\}$) の真理値は $\sum_{i=1}^{2^{n-1}} u^{(i)}/2^n$ である。もし新しい制約

$$u^{(2^{k-1}+1)} = u^{(2^{k-1}+2)} = \dots = u^{(2^k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (\text{A.1})$$

を設け，さらに

$$x^{(k+1)} = \begin{cases} u^{(1)} & (k = 0) \\ u^{(2^{k-1}+1)} = u^{(2^{k-1}+2)} = \dots = u^{(2^k)} & (k \geq 1) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

とおくと， $0.x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(n)}_2 = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} u^{(i)}/2^n$ となる。

以上によって示唆されるように，次元 n の提案論理と，式 (A.1) および式 (A.2) の付加されたブール 2^n 次元論理は，互いに同型であり，提案論理はブール多次元論理に比べて自由度が低い。

付録 B. 自然言語から論理式への変換

自然言語を論理表現へと変換する大まかな手続きを例示する。

> ある子供が虫歯であるという条件下で，その子供は絶対に泣く。

が与えられたとき，形態素解析と構文解析を経て，“という条件下で”という句，および，真理の程度を表す副詞“絶対に”が検出されたとする。“という条件下で”という句を条件化演算 | に置き換え，前後の順序を交換すると，

$$((\overset{\text{主語}}{\text{その子供は}})(\overset{\text{述語}}{\text{泣く}})) | ((\overset{\text{主語}}{\text{ある子供が}})(\overset{\text{述語}}{\text{虫歯である}})) \quad (\text{B.3})$$

となる。2箇所に見れた主語“ある子供が”と“その子供は”において，同一物を表す指示語“ある”と“その”を除去し，さらに，どちらも主語を表す助詞“が”と“は”を除去すれば，同一の基幹“子供”と“子供”が残るので，これらの主語を省略する。

$$(\text{泣く}) | (\text{虫歯である}) \quad (\text{B.4})$$

述語“虫歯である”と“泣く”をアトム化

$$\text{泣く} | \text{虫歯} \quad (\text{B.5})$$

し，最後に副詞“絶対に”を真理値として数値化することによって，

$$\text{泣く} | \text{虫歯} \approx 1 \quad (\text{B.6})$$

すなわち知識（12）が得られる。

以上の変換手続きは if then 形式で明確に記述でき，意味解析も語彙辞書も必要としない。

鈴木 寿 (Hisashi Suzuki)

1959年3月26日生。大阪大学大学院修了後，同大学基礎工学部助手，東京大学工学部助手，同講師，九州工業大学情報工学部助教授，中央大学理工学部助教授を経て同教授，現在に至る。知的情報制御の研究・教育に従事。工学博士。電子情報通信学会，情報理論とその応用学会，IEEE 所属。

(日本ロボット学会正会員)

齋藤 亮 (Makoto Saito)

1963年3月18日生。東京医科歯科大学大学院修了。同大学歯学部附属病院小児歯科医員，岩手医科大学歯学部助手を経て同講師，現在に至る。歯科分野における医療・教育および顎・口腔に関する研究に従事。博士（歯学）。日本小児歯科学会，日本顎口腔機能学会，日本顎関節学会，口腔病学会所属。

島田道雄 (Michio Shimada)

1960年2月12日生。大阪大学大学院修了後，日本電気社員を経て，機械学習研究所代表取締役，現在に至る。情報・符号・暗号理論，人工知能，通信システム，IP コア，音声認識ソフトの研究・開発に従事。工学修士。