接触モード遷移を伴うマニピュレーションのダイナミクス

八 島 真 人* 山 口 秀 谷*

Dynamics for Manipulation with Contact Mode Transitions

Masahito Yashima* and Hideya Yamaguchi*

We propose a novel complementarity model for a general three-dimensional manipulation system with the transitions of contact modes (rolling, sliding and breaking contact points) to solve the forward dynamics problem. The key idea is to construct a dynamic model with contact dynamics and to derive complementary constraints for a rolling contact by decomposing the tangential properties. We also present the existence and uniqueness of a solution to the model, and propose algorithms for solving the problem. We show examples of computer simulation for dynamics of multi-fingered hand manipulation and discuss how the transition of contact modes varies according to the magnitudes of the friction coefficient and the applied joint driving torques.

Key Words: Robot Hand, Manipulation, Complementarity Problem, Contact Dynamics, Rolling, Sliding

1. は じ め に

多指ハンドによる操り系を考えた場合、対象物は多指ハンドと複数の接触点をもち、能動的に制御される多指ハンドの運動に順応して対象物の運動が受動的に決定される。対象物と多指ハンド間の力の伝達は接触点を通して行われ、接触点での運動（転がり、滑り、離脱）を発生させる。したがって、滑りや転がりを利用した操りの運動計画 [19] や制御シミュレーション [16] を行う場合、関節駆動力の作用によって起こる接触状態の変化を推定できる動力学モデルが必要となる。このことは、接触ダイナミクス自体のより深い理解が本質的に重要であり、その接触ダイナミクスを含めた操り系の動力学モデルの構築が必要となる。滑りや転がりを利用した指先把握 [2] [3] [14] [20] や包み込み把握 [8] [17] による操り制御則、逆動力学問題に関する研究は数多くある。しかし筆者の知る限り、接触モード（転がり、滑り、離脱）の遷移を考慮した順動力学問題に関する研究はない。したがって、従来提案されてきた多くの制御則では、関節の駆動力に対して実際に目標の接触モード、対象物加速度が発生できるかどうかは厳密には保証されない。本論文では、接触モード遷移を伴うマニピュレーション理論の構築を目指し、接触ダイナミクスを考慮した新たな順動力学モデルを提案する。

マルチボディダイナミクスの理論研究 [1] の観点から、一般的な多剛体系の接触ダイナミクスに関して研究が行われている。本研究はこの分野で得られた知見を利用する。まず、接触ダイ

ナミクスの力学モデルとして提案されているコンプライアンスモデルと相補性モデルの概要を示し、その問題点を説明する。

コンプライアンスモデルは、接触する二つの剛体物体の間に仮想的なコンプライアンスを仮定し、それによって発生する力を接触力とする方法である。接触力が接触点の相対位置、相対速度に関する連続関数で表されるので、後述の相補性モデルとは異なり、外力に対して接触力、加速度が唯一に定まる。したがって、剛体接触問題ではこのモデルを用いて解析される場合が多かった [6] [7] [9]。しかし特に三次元の場合、物理現象を正しく表すコンプライアンスモデルの構築およびコンプライアンスの同定は非常に困難である。また、接触点の弾性変位を表す変数を各接触点において導入する必要があるため、操り系の状態変数は増大する。さらにサンプリングタイムを小さくしないと数値計算上解が収束しないなどの問題点がある。

相補性モデルは、剛体物体間の接触点における相対加速度とそれに対応する接触力の間に成り立つ関係式を線形相補性問題に帰着させる解法である。2 物体間が初期状態で接触している場合、相対加速度 a_i と接触力 f_i の間には、次の瞬間接触が維持される場合 ($a_i = 0$) 接触力が非ゼロとなり ($f_i \geq 0$)、一方接触が離脱する場合 ($a_i \geq 0$) 接触力はゼロとなる ($f_i = 0$) という相補性が成り立つ。この関係は n 個の接触点に対して、相補性制約式 (1) で表される。一方、全剛体系の物体間の相対運動を表す運動学拘束条件式とダイナミクスを表す運動方程式から、相対加速度と接触力に関して線形方程式 (2) を得る。

$$a_i f_i = 0, a_i \geq 0, f_i \geq 0, \text{ for } i = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{b} \quad (2)$$

ただし、正方行列 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とベクトル $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ は、多剛体

原稿受付 2003 年 2 月 24 日

*防衛大学校

*National Defense Academy

Fig. 1 Linear complementarity problem

系のコンフィギュレーションと動力学パラメータの値によって定まる。このとき線形相補性問題とは、式 (1), (2) を満たすベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{f}$ を見つける問題である [4]。簡単な例として、2 物体の剛体接触問題を考えよう。この場合線形相補性問題の解は、一次方程式 $a_i = A_i f_i + b_i$ と正の a_i , f_i 軸との交点で表される。したがって、Fig. 1 (a) の場合接触離脱、(b) の場合接触維持となる。しかし (c) に示すように 1 次方程式が (i) または (ii) で表される場合、相対加速度と接触力に関して唯一な解が存在しない。このように、相補性モデルは力学的に妥当な解が得られない場合があることに注意しなければならない。これまで提案されてきた相補性モデル [10] [13] は二次元問題に限定され、その解の力学的妥当性に関する議論が十分されていなかった。

本研究では三次元への拡張性と計算安定性の観点から、相補性モデルによる定式化を考える。しかし、上述の理由からマニピュレーションの動力学シミュレーションに適用できるところまで整備されていない。本論文ではこれらの問題点を克服した新たな相補性モデルとその動力学計算アルゴリズムを提案する。第 2 章では、操り系の相補性モデルを導出するために必要なクーロン摩擦モデル、運動拘束およびダイナミクスに関する基礎式を導出する。第 3 章では、まず転がり接触の接線方向の性質の分解と変数変換によって、転がり接触の相補性制約式の導出について述べる。この導出法が、三次元操り系の相補性モデルの定式化を容易にさせている。この定式化をもとに三次元操り系の剛体接触問題に対する相補性モデルを提案する。さらに唯一解の存在性について議論し、動力学計算アルゴリズムについて述べる。第 4 章では、実際に提案した相補性モデルを用いて、多指ハンドによる操りの動力学シミュレーション例を示す。

2. 操り系の剛体接触問題

本章では Fig. 2 に示すような三次元操り系において、ある瞬間の操り系の状態に対して関節駆動トルクを作用させたときに、対象物と多指ハンドの相互作用によって生じる対象物瞬間加速度、接触力、接触モード遷移を推定する問題を解くための基礎式を導出する。ここでは、対象物と多指ハンドは剛体と仮定し、また、全関節数 n_θ の多指ハンドの各指リンクは対象物とたかだか一つの接触点で点接触し、各関節は一自由度回転関節をもつとする。定式化される操り系は、関節駆動トルクを作用させた瞬間に新たな接触が生じない把握コンフィギュレーションにあると仮定し、全接触点数 n_c 個のうち転がり接触、滑り接触をそれぞれ n_R , n_S 個もつとする。右下添え字 R , S はそれぞれ転がり接触、滑り接触を示す。対象物と指リンクの運動に伴って両物体上を移動する各接触点には、各瞬間において対象物内向き法線方向および接触平面を張り直交する二つの接線方向を軸とする接触点座標系を設け、それぞれ N , T , U とする。

Fig. 2 Multi-fingered hand manipulation

Fig. 3 Friction circular cone and polyhedral cone model

2.1 クーロン摩擦

クーロンの法則によれば、Fig. 3 に示すように対象物と指リンクの i 番目の接触点における接触力は、その接触点を頂点とし

$$\sqrt{f_{Ti}^2 + f_{Ui}^2} \leq \mu f_{Ni} \quad (3)$$

で表せる摩擦円錐内または表面上に存在する。 f_{Ni} , f_{Ti} , f_{Ui} は指リンクによって対象物に作用する接触力のうち、 i 番目の接触点座標系の N , T , U 方向の接触力成分を示す。ここで μ は摩擦係数を示す。

さて、接触力と接触点相対速度、相対加速度の関係を考える。接触点座標系で表した N , T , U 方向の相対速度、相対加速度を $\mathbf{v}_i = [v_{Ni}, v_{Ti}, v_{Ui}]^T$, $\mathbf{a}_i = [a_{Ni}, a_{Ti}, a_{Ui}]^T$ で表す。まず、接触法線方向の関係式を導出する。接触点では接触法線方向の相対速度は $v_{Ni} = 0$ を満たしている。一方、接触法線方向の接触力と相対加速度には次の不等式制約条件が成り立つ。

$$a_{Ni} \geq 0, \quad f_{Ni} \geq 0 \quad (4)$$

この式は、剛体同士の接触では弾性変形がなく、ハンドが対象物に作用する接触力は圧縮力であることを示す。さて現在の接触点が次の瞬間も接触が維持される場合、 $a_{Ni} = 0$, $f_{Ni} \geq 0$ となる。一方、接触が破れる場合、 $a_{Ni} \geq 0$, $f_{Ni} = 0$ となる。すなわち接触法線方向の接触力と相対加速度の間には、 $a_{Ni} = 0$ または $f_{Ni} = 0$ が成り立つことを示しており、これを相補性と呼ぶ。この条件は、転がり接触、滑り接触ともに成り立つので、接触法線方向の接触力と相対加速度の間には、次の相補性条件が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} a_{NRi} f_{NRi} &= 0, & a_{NRi} &\geq 0, & f_{NRi} &\geq 0 \\ a_{NSi} f_{NSi} &= 0, & a_{NSi} &\geq 0, & f_{NSi} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Fig. 4 は式 (5) に示す法線方向の接触力と相対加速度の関係を図示したものである。相補性が成り立つ場合、頂点が直角を

Fig. 4 Complementarity for contact force and relative acceleration in the normal direction

なす二つの半直線からなる L 型形状となることが分かる。

次に接触接線方向の関係式を、滑り接触と転がり接触についてそれぞれ導出する。接線方向の相対速度が非ゼロすなわち $v_{Ti}^2 + v_{Ui}^2 \neq 0$ ならば滑り接触となる。接触力は摩擦円錐表面上に存在し対象物のハンドに対する相対運動を妨げる方向に作用する。すなわち、接触点座標系に対する T, U 方向の接触接線力は

$$f_{\bullet Si} = \tilde{\mu}_{\bullet i} f_{NSi}, \quad \text{for } \bullet \in \{T, U\} \quad (6)$$

となる。ただし、 $\tilde{\mu}_{\bullet i} = \frac{-v_{\bullet i}}{\sqrt{(v_{Ti})^2 + (v_{Ui})^2}}$ 。

一方、接線方向の相対速度がゼロすなわち $v_{Ti} = v_{Ui} = 0$ の場合、転がり接触となる。転がり接触から滑り接触への遷移の可能性を検討する場合、法線方向の関係式と同様に相対加速度を考慮する必要がある。転がり接触が維持される場合、接触点接線方向の相対加速度はゼロすなわち $a_{TRi} = a_{URi} = 0$ を満たす。この場合、接触力は摩擦円錐内部に存在する任意の大きさ方向を有する。一方、転がり接触から滑り接触へ遷移する場合、相対加速度が発生し、 $a_{TRi}^2 + a_{URi}^2 \neq 0$ を満たす。接触力は摩擦円錐表面上に存在し相対加速度と逆向きの方向に作用する。以上をまとめると、転がり接触の接線方向の接触力と相対加速度の間には次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{f_{TRi}^2 + f_{URi}^2} &< \mu f_{NRi} & \text{for } a_{TRi} = a_{URi} = 0 \\ f_{\bullet Ri} &= +\mu f_{NRi} & \text{for } a_{\bullet Ri} < 0 \\ f_{\bullet Ri} &= -\mu f_{NRi} & \text{for } a_{\bullet Ri} > 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{for } \bullet \in \{T, U\} \quad (7)$$

以上、本節では接触法線方向と接触接線方向に関する接触力と相対加速度に関する関係式として、式 (5), (7) を導出した。

2.2 操り系の運動拘束

転がり接触と滑り接触が混在する多指ハンド操り系の運動拘束について定式化する。ここで、 Σ_B は基準座標系、 Σ_O は対象物重心に固定された座標系、 Σ_{ij} は第 i 指の第 j 番目の接触点に原点をもち Fig. 2 に示すように N, T, U 方向を軸にもつ接触点座標系とする。本論文では参照座標系を左上添え字で示す。 $\mathbf{x}_O, \mathbf{R}_O$ は基準座標系から見た Σ_O の位置ベクトルと姿勢を表す回転行列を表す。 $\mathbf{c}_{Oij}$ は Σ_O から見た Σ_{ij} 原点の位置ベクトルである。

基準座標系から見た第 i 指の第 j 番目の接触点における相対速度 ${}^B\mathbf{v}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ は、対象物表面上の接触点の速度と指リンク表面上の接触点の速度の差で与えられ、次式のとおりに表される。

$${}^B\mathbf{v}_{ij} = {}^B\mathbf{G}_{ij}^T {}^B\mathbf{v}_O - {}^B\mathbf{J}_{ij} \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (8)$$

ただし、 ${}^B\mathbf{G}_{ij}^T = [\mathbf{E}_3 - (\mathbf{R}_O \mathbf{c}_{Oij} \times)] \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ は対象物速度・角

速度 ${}^B\mathbf{v}_O = \text{col}[{}^B\dot{\mathbf{x}}_O, {}^B\dot{\boldsymbol{\omega}}_O] \in \mathbb{R}^6$ を第 i 指の第 j 番目の接触点の対象物表面上の速度に変換する行列、 ${}^B\mathbf{J}_{ij} \in \mathbb{R}^{3 \times n_{\theta i}}$ は第 i 指の関節速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\theta}}_i \in \mathbb{R}^{n_{\theta i}}$ を第 i 指の第 j 番目の接触点の指リンク表面上の速度に変換する行列を示す。 $n_{\theta i}$ は第 i 指の関節数、 $(\mathbf{R}_O \mathbf{c}_{ij} \times)$ は $\mathbf{c}_{ij}$ の外積と等価な 3×3 歪対称行列、 $\mathbf{E}_3$ は 3×3 単位行列である。 ${}^B\dot{\boldsymbol{\omega}}_O$ は Σ_O の Σ_B に対する回転角速度ベクトルである。 $\text{col}[\]$ はかつこ内の要素を縦に並べた列ベクトルまたは行列を示す。

式 (8) を接触点座標系で見た相対速度に変換する。 Σ_O から見た Σ_{ij} の N, T, U 方向の単位ベクトルを $\hat{\mathbf{n}}_{ij}, \hat{\mathbf{t}}_{ij}, \hat{\mathbf{u}}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ とすると、 $\mathbf{R}_O \hat{\mathbf{n}}_{ij}, \mathbf{R}_O \hat{\mathbf{t}}_{ij}, \mathbf{R}_O \hat{\mathbf{u}}_{ij}$ の転置を式 (8) の左からかけると、接触点座標系 N, T, U 方向成分の相対速度

$$v_{\Sigma ij} = \mathbf{G}_{\Sigma ij}^T \mathbf{v}_O - \mathbf{J}_{\Sigma ij} \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad \text{for } \Sigma \in \{N, T, U\} \quad (9)$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{Nij}^T &= (\mathbf{R}_O \hat{\mathbf{n}}_{ij})^T {}^B\mathbf{G}_{ij}^T \in \mathbb{R}^{1 \times 6} \\ \mathbf{J}_{Nij} &= (\mathbf{R}_O \hat{\mathbf{n}}_{ij})^T {}^B\mathbf{J}_{ij} \in \mathbb{R}^{1 \times n_{\theta i}} \end{aligned}$$

であり、 $\mathbf{G}_{Tij}, \mathbf{G}_{Uij}, \mathbf{J}_{Tij}, \mathbf{J}_{Uij}$ も同様に定義される。

式 (9) を m 本指すべての接触点についてまとめると

$$\mathbf{v}_{\Sigma} = \mathbf{G}_{\Sigma}^T \mathbf{v}_O - \mathbf{J}_{\Sigma} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{for } \Sigma \in \{N, T, U\} \quad (10)$$

を得る。ここで、 $\Sigma \in \{N, T, U\}$ とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\Sigma} &= \text{col} \left[v_{\Sigma 11}, v_{\Sigma 12}, \dots, v_{\Sigma m n_{cm}} \right] \in \mathbb{R}^{n_c} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \text{col} \left[\dot{\boldsymbol{\theta}}_1, \dot{\boldsymbol{\theta}}_2, \dots, \dot{\boldsymbol{\theta}}_m \right] \in \mathbb{R}^{n_{\theta}} \\ \mathbf{G}_{\Sigma} &= \left[\mathbf{G}_{\Sigma 11}, \mathbf{G}_{\Sigma 12}, \dots, \mathbf{G}_{\Sigma m n_{cm}} \right] \in \mathbb{R}^{6 \times n_c} \\ \mathbf{J}_{\Sigma} &= \text{diag} \left[\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\Sigma 11} \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{\Sigma 1 n_{c1}} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\Sigma m 1} \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{\Sigma m n_{cm}} \end{bmatrix} \right] \in \mathbb{R}^{n_c \times n_{\theta}} \end{aligned}$$

であり、 n_{ci} は指 i の接触点数、 n_c は全接触点数、 n_{θ} は全関節数、 $\text{diag}[\]$ はかつこ内の要素を対角にもつ行列を示す。

式 (10) に示す相対速度を、それぞれ転がり接触点と滑り接触点の相対速度ベクトル $\mathbf{v}_{\Sigma R} \in \mathbb{R}^{n_R}$, $\mathbf{v}_{\Sigma S} \in \mathbb{R}^{n_S}$ for $\Sigma \in \{N, T, U\}$ に分割すると、

$$\mathbf{v}_{\Sigma R} = \left[\mathbf{G}_{\Sigma R}^T \quad -\mathbf{J}_{\Sigma R} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_O \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{\Sigma R}^T \mathbf{V} \quad (11)$$

$$\mathbf{v}_{\Sigma S} = \left[\mathbf{G}_{\Sigma S}^T \quad -\mathbf{J}_{\Sigma S} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_O \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{\Sigma S}^T \mathbf{V} \quad (12)$$

を得る。ここで、 $\Sigma \in \{N, T, U\}$ とすると

$$\mathbf{W}_{\Sigma R}^T = \left[\mathbf{G}_{\Sigma R}^T \quad -\mathbf{J}_{\Sigma R} \right] \in \mathbb{R}^{n_R \times (6 + n_{\theta})} \quad (13)$$

$$\mathbf{W}_{\Sigma S}^T = \left[\mathbf{G}_{\Sigma S}^T \quad -\mathbf{J}_{\Sigma S} \right] \in \mathbb{R}^{n_S \times (6 + n_{\theta})} \quad (14)$$

$$\mathbf{V} = \text{col} \left[\mathbf{v}_O, \dot{\boldsymbol{\theta}} \right] \in \mathbb{R}^{6 + n_{\theta}} \quad (15)$$

であり、 $\mathbf{G}_{\Sigma R}^T \in \mathbb{R}^{n_R \times 6}$, $\mathbf{J}_{\Sigma R} \in \mathbb{R}^{n_R \times n_{\theta}}$ はそれぞれ $\mathbf{G}_{\Sigma}^T, \mathbf{J}_{\Sigma}$

の転がり接触に対応した行ベクトルをまとめた行列である。滑り接触点に関して、 $\mathbf{G}_{\Sigma S}^T \in \mathbb{R}^{n_S \times 6}$, $\mathbf{J}_{\Sigma S} \in \mathbb{R}^{n_S \times n_\theta}$ も同様に定義される。

さて、拘束力によって拘束される相対運動は接触モードに応じて異なる。転がり接触点の場合、 N , T , U 方向の相対運動が拘束される。一方、滑り接触点の場合、 N 方向の相対運動が拘束される。したがって、拘束される相対運動成分の速度は、式 (11), (12) を用いて

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{NS} \\ \mathbf{v}_{NR} \\ \mathbf{v}_{TR} \\ \mathbf{v}_{UR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{NS}^T \\ \mathbf{W}_{NR}^T \\ \mathbf{W}_{TR}^T \\ \mathbf{W}_{UR}^T \end{bmatrix} \mathbf{V} \quad (16)$$

で与えられる。相対加速度は、式 (16) の時間微分により

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{NS} \\ \mathbf{a}_{NR} \\ \mathbf{a}_{TR} \\ \mathbf{a}_{UR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{NS}^T \\ \mathbf{W}_{NR}^T \\ \mathbf{W}_{TR}^T \\ \mathbf{W}_{UR}^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{V}} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{W}}_{NS}^T \\ \dot{\mathbf{W}}_{NR}^T \\ \dot{\mathbf{W}}_{TR}^T \\ \dot{\mathbf{W}}_{UR}^T \end{bmatrix} \mathbf{V} \quad (17)$$

で与えられる。ただし、転がり接触または滑り接触の一方の接触モードしか存在しない場合、存在していない接触モードに対応する行が式 (16), (17) から除かれる。

次に多指ハンド操り系の静力学の釣り合い式を導出する。ここで、各転がり接触点、滑り接触点に作用する接触力の接触点座標系の N , T , U 方向成分 $f_{\Sigma Ri}$, $f_{\Sigma Si}$ for $\Sigma \in \{N, T, U\}$ をまとめたベクトルを $\mathbf{f}_{\Sigma R} \in \mathbb{R}^{n_R}$, $\mathbf{f}_{\Sigma S} \in \mathbb{R}^{n_S}$ とする。また、接触力 $\mathbf{f}_{\Sigma R}$, $\mathbf{f}_{\Sigma S}$ と等価な対象物重心に作用する合力・合モーメントベクトルを ${}^B\mathbf{f}_O \in \mathbb{R}^6$, 接触力 $\mathbf{f}_{\Sigma R}$, $\mathbf{f}_{\Sigma S}$ の反力と等価な関節トルクベクトルを $\boldsymbol{\tau}_H \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ とする。このとき、 $\mathbf{f}_{\Sigma R}$, $\mathbf{f}_{\Sigma S}$, $\mathbf{f}_O$, $\boldsymbol{\tau}_H$ 間の関係式は、運動学的関係を表す式 (11), (12) と仮想仕事の原理から

$$\mathbf{f}_O = \mathbf{G}_{NR}\mathbf{f}_{NR} + \mathbf{G}_{TR}\mathbf{f}_{TR} + \mathbf{G}_{UR}\mathbf{f}_{UR} + \mathbf{G}_{NS}\mathbf{f}_{NS} + \mathbf{G}_{TS}\mathbf{f}_{TS} + \mathbf{G}_{US}\mathbf{f}_{US} \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\tau}_H = -\mathbf{J}_{NR}^T\mathbf{f}_{NR} - \mathbf{J}_{TR}^T\mathbf{f}_{TR} - \mathbf{J}_{UR}^T\mathbf{f}_{UR} - \mathbf{J}_{NS}^T\mathbf{f}_{NS} - \mathbf{J}_{TS}^T\mathbf{f}_{TS} - \mathbf{J}_{US}^T\mathbf{f}_{US} \quad (19)$$

で与えられる。

滑り接触点では式 (6) が成り立つことから、式 (6) を式 (18), (19) に代入すると

$$\mathbf{f}_O = \mathbf{G}_{NR}\mathbf{f}_{NR} + \mathbf{G}_{TR}\mathbf{f}_{TR} + \mathbf{G}_{UR}\mathbf{f}_{UR} + \mathbf{G}_{\mu S}\mathbf{f}_{NS} \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\tau}_H = -\mathbf{J}_{NR}^T\mathbf{f}_{NR} - \mathbf{J}_{TR}^T\mathbf{f}_{TR} - \mathbf{J}_{UR}^T\mathbf{f}_{UR} - \mathbf{J}_{\mu S}^T\mathbf{f}_{NS} \quad (21)$$

を得る。ここで、

$$\mathbf{G}_{\mu S} = \mathbf{G}_{NS} + \mathbf{G}_{TS}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_T + \mathbf{G}_{US}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_U$$

$$\mathbf{J}_{\mu S}^T = \mathbf{J}_{NS}^T + \mathbf{J}_{TS}^T\tilde{\boldsymbol{\mu}}_T + \mathbf{J}_{US}^T\tilde{\boldsymbol{\mu}}_U$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_\bullet = \text{diag} [\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\bullet 1}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\bullet 2}, \dots, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\bullet n_S}] \quad \text{for } \bullet \in \{T, U\}$$

である。以上、本節では拘束力によって拘束される相対運動成分の運動学的関係式 (16), (17) および静力学の関係式 (20), (21) を得た。

2.3 操り系のダイナミクス

対象物の運動方程式は、

$$\mathbf{M}_O \dot{\mathbf{v}}_O = \mathbf{f}_O + \mathbf{h}_O \quad (22)$$

で表される。ただし、 $\mathbf{M}_O \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ は対象物の慣性行列、 $\mathbf{h}_O \in \mathbb{R}^6$ は遠心力・コリオリ力・重力ベクトルを示す。式 (20) を式 (22) に代入すると、

$$\mathbf{M}_O \dot{\mathbf{v}}_O = \mathbf{G}_{NR}\mathbf{f}_{NR} + \mathbf{G}_{TR}\mathbf{f}_{TR} + \mathbf{G}_{UR}\mathbf{f}_{UR} + \mathbf{G}_{\mu S}\mathbf{f}_{NS} + \mathbf{h}_O \quad (23)$$

を得る。

指 i の運動方程式は、

$$\mathbf{M}_{Hi} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i = \boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\tau}_{Hi} - \mathbf{h}_{Hi} \quad (24)$$

で表される。ただし、 $\mathbf{M}_{Hi}$ は指 i の慣性行列、 $\boldsymbol{\tau}_i$ は関節駆動トルクベクトル、 $\boldsymbol{\tau}_{Hi}$ は指リンクから対象物に加えられる接触力の反力に等価な関節トルクベクトル、 $\mathbf{h}_{Hi}$ は遠心力・コリオリ力・重力ベクトルを示す。

各指の運動方程式 (24) を m 本指すべてについてまとめると

$$\mathbf{M}_H \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_H - \mathbf{h}_H \quad (25)$$

を得る。ここで、

$$\mathbf{M}_H = \text{diag} [\mathbf{M}_{H1}, \mathbf{M}_{H2}, \dots, \mathbf{M}_{Hm}] \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \text{col} [\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \dots, \boldsymbol{\tau}_m] \in \mathbb{R}^{n_\theta}$$

であり、 $\mathbf{h}_H$, $\boldsymbol{\tau}_H$ も同様に定義される。式 (21) を式 (25) に代入すると、

$$\mathbf{M}_H \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}_{NR}^T\mathbf{f}_{NR} - \mathbf{J}_{TR}^T\mathbf{f}_{TR} - \mathbf{J}_{UR}^T\mathbf{f}_{UR} - \mathbf{J}_{\mu S}^T\mathbf{f}_{NS} - \mathbf{h}_H \quad (26)$$

を得る。

以上より、式 (23), (26) をまとめ、式 (13) を用いて表すと、操り系全体の運動方程式

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{W}_{NR}\mathbf{f}_{NR} + \mathbf{W}_{TR}\mathbf{f}_{TR} + \mathbf{W}_{UR}\mathbf{f}_{UR} + \mathbf{W}_{\mu S}\mathbf{f}_{NS} + \mathbf{h} \quad (27)$$

を得る。ここで、

$$\mathbf{W}_{\mu S} = \text{col} [\mathbf{G}_{\mu S} \quad -\mathbf{J}_{\mu S}^T], \quad \mathbf{M} = \text{diag} [\mathbf{M}_O \quad \mathbf{M}_H]$$

$$\mathbf{h} = \text{col} [\mathbf{h}_O \quad \boldsymbol{\tau} - \mathbf{h}_H] \quad (28)$$

である。式 (27) を次章で述べる相補性問題への定式化のために、接触力ベクトル $\mathbf{f}_{\Sigma R}$, $\mathbf{f}_{\Sigma S}$ の成分 $f_{\Sigma Ri}$, $f_{\Sigma Si}$ for $\Sigma \in \{N, T, U\}$ を用いると、操り系全体の運動方程式は

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^{n_R} (\mathbf{W}_{NRi}f_{NRi} + \mathbf{W}_{TRi}f_{TRi} + \mathbf{W}_{URi}f_{URi}) + \sum_{i=1}^{n_S} \mathbf{W}_{\mu Si}f_{NSi} + \mathbf{h} \quad (29)$$

で書き表される．ここで， $\Sigma \in \{N, T, U\}$ とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\Sigma Ri} &= \text{col} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\Sigma Ri} & -\mathbf{J}_{\Sigma Ri}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6+n_\theta} \\ \mathbf{W}_{\mu Si} &= \text{col} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\mu Si} & -\mathbf{J}_{\mu Si}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6+n_\theta} \end{aligned}$$

は，それぞれ $\mathbf{W}_{\Sigma Ri}$, $\mathbf{W}_{\mu Si}$ の i 番目の列ベクトルである．

最後に，本章で導出した操り系モデルを用いて，三次元操り系の剛体接触問題を以下のように定義する．

定義 1 (三次元操り系の剛体接触問題) 三次元操り系に対して， $\mathbf{q}_O$, $\dot{\mathbf{q}}_O$, $\mathbf{M}_O$, $\mathbf{h}_O$, $\boldsymbol{\theta}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{M}_H$, $\mathbf{h}_H$ が与えられたとき，対象物加速度，接触力および接触モード遷移を推定するために，式 (5), (7), (17), (29) を満たす $\ddot{\mathbf{q}}_O$, $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$, $\mathbf{f}_{NR}$, $\mathbf{f}_{TR}$, $\mathbf{f}_{UR}$, $\mathbf{f}_{NS}$, $\mathbf{a}_{NR}$, $\mathbf{a}_{TR}$, $\mathbf{a}_{UR}$, $\mathbf{a}_{NS}$ を決定すること．

3. 相補性モデルへの定式化

3.1 転がり接触の相補性

剛体接触では，接触力と相対加速度の間には式 (5), (7) に示す関係が成り立つ．式 (5) は接触法線方向の接触力 f_{NRi} , f_{NSi} と相対加速度 a_{NRi} , a_{NSi} の相補性を示し，式 (1) に示すように定式化できる．一方，転がり接触の接線方向の関係式を表す式 (7) は， a_{TRi} , a_{URi} , f_{TRi} , f_{URi} , f_{NRi} が未知数であるので非線形式となる．式 (7) は

$$\left. \begin{aligned} -\mu f_{NRi} < f_{\bullet Ri} < +\mu f_{NRi} & \text{ for } a_{\bullet Ri} = 0 \\ f_{\bullet Ri} = +\mu f_{NRi} & \text{ for } a_{\bullet Ri} < 0 \\ f_{\bullet Ri} = -\mu f_{NRi} & \text{ for } a_{\bullet Ri} > 0 \end{aligned} \right\} \text{ for } \bullet \in \{T, U\} \quad (30)$$

で表される．Fig. 5 は，式 (30) に示す接線方向の接触力と相対加速度の関係を図示したものである．その形状は相補性を表す Fig. 4 とは異なり，直角をなす二つの頂点をもつ形状を成す．本節では，Fig. 5 に示す接線方向の性質を変数変換と分解によって，Fig. 4 に示すような L 型形状に分割することで転がり接触に関する相補性制約式を導出する．

さて，Fig. 5 から分かるように T , U 方向の接触力 f_{TRi} , f_{URi} と相対加速度 a_{TRi} , a_{URi} は，その符号によって式 (31) に示す二つの接触集合 S_1 , S_2 のいずれかに属する．

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \{f_{\bullet Ri}, a_{\bullet Ri} \mid \text{(i)} a_{\bullet Ri} < 0 \text{ and } f_{\bullet Ri} = +\mu f_{NRi} \text{ or} \\ &\quad \text{(ii)} a_{\bullet Ri} = 0 \text{ and } 0 \leq f_{\bullet Ri} < \mu f_{NRi}\} \\ S_2 &= \{f_{\bullet Ri}, a_{\bullet Ri} \mid \text{(i)} a_{\bullet Ri} > 0 \text{ and } f_{\bullet Ri} = -\mu f_{NRi} \text{ or} \\ &\quad \text{(ii)} a_{\bullet Ri} = 0 \text{ and } -\mu f_{NRi} < f_{\bullet Ri} \leq 0\} \end{aligned} \right\} \text{ for } \bullet \in \{T, U\} \quad (31)$$

Fig. 6 (a) は接触集合 S_1 , S_2 に属する接触接線方向の接触力と相対加速度の関係を図示したもので，Fig. 5 を a_{TRi} , a_{URi} 軸に対して左右に分割したものである．接触集合 S_1 , S_2 に属する f_{TRi} , f_{URi} , a_{TRi} , a_{URi} は，それぞれ $S_1 \ni \{0 \leq f_{\bullet Ri} \leq \mu f_{NRi}, a_{\bullet Ri} \leq 0\}$, $S_2 \ni \{-\mu f_{NRi} \leq f_{\bullet Ri} \leq 0, a_{\bullet Ri} \geq 0\}$ for $\bullet \in \{T, U\}$ を満たす．そこで接触集合 S_1 , S_2 の変数を，非負変数 f_{TRi}^+ , f_{TRi}^- , f_{URi}^+ , f_{URi}^- , a_{TRi}^+ , a_{TRi}^- , a_{URi}^+ , a_{URi}^- ≥ 0 を導入して変数変換し，接触集合 S_1 , S_2 を式 (32) に示すように再定義する．非負，非正の変数 f_{TRi} , f_{URi} , a_{TRi} , a_{URi} をそれぞれ右上添え字 $+$, $-$ で示す．

Fig. 5 Relation between contact force and relative acceleration in the tangential direction for polyhedral cone model

Fig. 6 Decomposition of tangential characteristics for rolling contact

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \{f_{\bullet Ri}^+, a_{\bullet Ri}^- \mid \text{(i)} a_{\bullet Ri}^- > 0 \text{ and } f_{\bullet Ri}^+ = \mu f_{NRi} \text{ or} \\ &\quad \text{(ii)} a_{\bullet Ri}^- = 0 \text{ and } 0 \leq f_{\bullet Ri}^+ < \mu f_{NRi}\} \\ S_2 &= \{f_{\bullet Ri}^-, a_{\bullet Ri}^+ \mid \text{(i)} a_{\bullet Ri}^+ > 0 \text{ and } f_{\bullet Ri}^- = -\mu f_{NRi} \text{ or} \\ &\quad \text{(ii)} a_{\bullet Ri}^+ = 0 \text{ and } 0 \leq f_{\bullet Ri}^- < \mu f_{NRi}\} \end{aligned} \right\} \text{ for } \bullet \in \{T, U\} \quad (32)$$

Fig. 6 (b) は，再定義された接触集合 S_1 , S_2 に属する接触接線方向の接触力と相対加速度の関係を図示したものである．このように接線方向の性質を分解することで，接触集合 S_1 , S_2 がそれぞれお互いに独立な変数 $S_1 \ni \{f_{\bullet Ri}^+, a_{\bullet Ri}^- \geq 0\}$, $S_2 \ni \{f_{\bullet Ri}^-, a_{\bullet Ri}^+ \geq 0\}$ で表され，二つの L 型形状に分割することができることが分かる．

さらに接触接線力に関して

$$\left. \begin{aligned} f_{\bullet Ri}^+ + \Delta_{\bullet i}^+ &= \mu f_{NRi}, \quad 0 \leq \Delta_{\bullet i}^+ \leq \mu f_{NRi} \\ f_{\bullet Ri}^- + \Delta_{\bullet i}^- &= -\mu f_{NRi}, \quad 0 \leq \Delta_{\bullet i}^- \leq \mu f_{NRi} \end{aligned} \right\} \text{ for } \bullet \in \{T, U\} \quad (33)$$

を満たす非負のスラック変数 Δ_{Ti}^+ , Δ_{Ti}^- , Δ_{Ui}^+ , Δ_{Ui}^- を導入することで式 (32) を整理する．Fig. 7 は Fig. 3 の $N-T$ (または $N-U$) 断面に対して，式 (33) に示す関係を図示したものである．ここで Δ_{Ti}^+ と Δ_{Ti}^- (または， Δ_{Ui}^+ と Δ_{Ui}^-) は，それぞれ接触接線力 f_{TRi}^+ と f_{TRi}^- (または， f_{URi}^+ と f_{URi}^-) が摩擦四角錐の境界に達するまでの余裕を示している．式 (33) の

Fig. 7 Slack variables of friction polyhedral cone

$f_{\bullet Ri}^+$ と $f_{\bullet Ri}^-$ を式 (32) に代入すると、接触集合 S_1, S_2 は

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \{ \Delta_{\bullet i}^+, a_{\bullet Ri}^- \mid \text{(i)} a_{\bullet Ri}^- > 0 \text{ and } \Delta_{\bullet i}^+ = 0 \text{ or} \\ &\quad \text{(ii)} a_{\bullet Ri}^- = 0 \text{ and } 0 \leq \Delta_{\bullet i}^+ \leq \mu f_{NRi} \} \\ S_2 &= \{ \Delta_{\bullet i}^-, a_{\bullet Ri}^+ \mid \text{(i)} a_{\bullet Ri}^+ > 0 \text{ and } \Delta_{\bullet i}^- = 0 \text{ or} \\ &\quad \text{(ii)} a_{\bullet Ri}^+ = 0 \text{ and } 0 \leq \Delta_{\bullet i}^- \leq \mu f_{NRi} \} \end{aligned} \right\} \quad \text{for } \bullet \in \{T, U\} \quad (34)$$

で表される。式 (34) は、明らかに T 方向に関して a_{TRi}^- と Δ_{Ti}^+ , a_{URi}^+ と Δ_{Ui}^- , U 方向に関して a_{URi}^- と Δ_{Ui}^+ , a_{TRi}^+ と Δ_{Ti}^- に関する相補性を表している。

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \{ \Delta_{\bullet i}^+, a_{\bullet Ri}^- \mid a_{\bullet Ri}^- \Delta_{\bullet i}^+ = 0, \\ &\quad a_{\bullet Ri}^- \geq 0, 0 \leq \Delta_{\bullet i}^+ \leq \mu f_{NRi} \} \\ S_2 &= \{ \Delta_{\bullet i}^-, a_{\bullet Ri}^+ \mid a_{\bullet Ri}^+ \Delta_{\bullet i}^- = 0, \\ &\quad a_{\bullet Ri}^+ \geq 0, 0 \leq \Delta_{\bullet i}^- \leq \mu f_{NRi} \} \end{aligned} \right\} \quad \text{for } \bullet \in \{T, U\} \quad (35)$$

で書き表される。以上より、非負の相対加速度変数 a_{TRi}^+ , a_{TRi}^- , a_{URi}^+ , a_{URi}^- と非負のスラック変数 Δ_{Ti}^+ , Δ_{Ti}^- , Δ_{Ui}^+ , Δ_{Ui}^- を導入することによって、転がり接触の接線方向に関する相補性制約式 (35) を導くことができた。

3.2 相補性モデル

本節では、三次元操り系の相補性モデルを導出するために、相補性制約式 (5), (35) ならびに操り系の運動学、動力学式 (17), (29) を式 (1), (2) に示す線形相補性問題に帰着させる。

まず、式 (5), (35) をもとに、相補性制約式 (1) の導出について述べる。すべての接触点について式 (5) をまとめると

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{NR} \cdot \mathbf{f}_{NR} &= 0, \quad \mathbf{a}_{NR} \geq 0, \quad \mathbf{f}_{NR} \geq 0 \\ \mathbf{a}_{NS} \cdot \mathbf{f}_{NS} &= 0, \quad \mathbf{a}_{NS} \geq 0, \quad \mathbf{f}_{NS} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

を得る。ここで、“ $\cdot$ ” は内積を、 $\mathbf{0}$ はゼロベクトルを示す。前節で導入された非負変数の右上添え字 $+$, $-$ を T, U 方向に関してそれぞれ Π_{Ti}, Π_{Ui} で表すと、式 (35) は

$$\left. \begin{aligned} a_{TRi}^{\Pi_{Ti}} \Delta_{Ti}^{\Pi_{Ti}} &= 0, \quad a_{TRi}^{\Pi_{Ti}} \geq 0, \quad 0 \leq \Delta_{Ti}^{\Pi_{Ti}} \leq \mu f_{NRi} \\ a_{URi}^{\Pi_{Ui}} \Delta_{Ui}^{\Pi_{Ui}} &= 0, \quad a_{URi}^{\Pi_{Ui}} \geq 0, \quad 0 \leq \Delta_{Ui}^{\Pi_{Ui}} \leq \mu f_{NRi} \end{aligned} \right\} \quad \text{for } \Pi_{Ti}, \Pi_{Ui} \in \{+, -\} \quad (37)$$

で表される。ただし、 $\overline{\Pi_{Ti}}, \overline{\Pi_{Ui}}$ は Π_{Ti}, Π_{Ui} の逆符号を示す。式 (37) をすべての転がり接触点についてまとめると

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{TR}^{\Pi_T} \cdot \overline{\Delta_T^{\Pi_T}} &= 0, \quad \mathbf{a}_{TR}^{\Pi_T} \geq 0, \quad 0 \leq \overline{\Delta_T^{\Pi_T}} \leq \mu \mathbf{f}_{NR} \\ \mathbf{a}_{UR}^{\Pi_U} \cdot \overline{\Delta_U^{\Pi_U}} &= 0, \quad \mathbf{a}_{UR}^{\Pi_U} \geq 0, \quad 0 \leq \overline{\Delta_U^{\Pi_U}} \leq \mu \mathbf{f}_{NR} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

となる。ここで、 $\bullet \in \{T, U\}$ とすると

$$\begin{aligned} \Pi_{\bullet} &\in \{\Pi_{\bullet 1}, \Pi_{\bullet 2}, \dots, \Pi_{\bullet n_R}\} \\ \mathbf{a}_{\bullet R}^{\Pi_{\bullet}} &= [a_{\bullet R1}^{\Pi_{\bullet 1}}, a_{\bullet R2}^{\Pi_{\bullet 2}}, \dots, a_{\bullet Rn_R}^{\Pi_{\bullet n_R}}]^T \in \mathbb{R}^{n_R} \\ \Delta_{\bullet}^{\Pi_{\bullet}} &= [\Delta_{\bullet 1}^{\Pi_{\bullet 1}}, \Delta_{\bullet 2}^{\Pi_{\bullet 2}}, \dots, \Delta_{\bullet n_R}^{\Pi_{\bullet n_R}}]^T \in \mathbb{R}^{n_R} \end{aligned}$$

式 (36), (38) をまとめると式 (1) に相当する相補性制約式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{NS} \\ \mathbf{a}_{NR} \\ \mathbf{a}_{TR}^{\Pi_T} \\ \mathbf{a}_{UR}^{\Pi_U} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{NS} \\ \mathbf{f}_{NR} \\ \overline{\Delta_T^{\Pi_T}} \\ \overline{\Delta_U^{\Pi_U}} \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{NS} \\ \mathbf{a}_{NR} \\ \mathbf{a}_{TR}^{\Pi_T} \\ \mathbf{a}_{UR}^{\Pi_U} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{NS} \\ \mathbf{f}_{NR} \\ \overline{\Delta_T^{\Pi_T}} \\ \overline{\Delta_U^{\Pi_U}} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (39)$$

を得る。ただし、 $\overline{\Delta_T^{\Pi_T}}, \overline{\Delta_U^{\Pi_U}}$ は、拘束条件

$$\overline{\Delta_T^{\Pi_T}} \leq \mu \mathbf{f}_{NR}, \quad \overline{\Delta_U^{\Pi_U}} \leq \mu \mathbf{f}_{NR} \quad (40)$$

を満たす。

次に、式 (17), (29) をもとに、線形方程式 (2) の導出について述べる。まず、式 (17), (29) を式 (5), (35) で導入した非負変数 ($f_{NRi}, f_{NSi}, a_{NRi}, a_{NSi}, a_{TRi}^+, a_{TRi}^-, a_{URi}^+, a_{URi}^-, \Delta_{Ti}^+, \Delta_{Ti}^-, \Delta_{Ui}^+, \Delta_{Ui}^-$) を用いて表す。転がり接触点に作用する各接触接線力 f_{TRi}, f_{URi} は、式 (32) に示す接触集合 S_1, S_2 のいずれかに属しているので、式 (29) の f_{TRi}, f_{URi} を $f_{TRi}^+, f_{TRi}^-, f_{URi}^+, f_{URi}^-$ を用いて表すと

$$\begin{aligned} M\dot{\mathbf{V}} &= \sum_{i=1}^{n_R} (\mathbf{W}_{NRi} f_{NRi} + \mathbf{W}_{TRi}^{\Pi_{Ti}} f_{TRi}^{\Pi_{Ti}} + \mathbf{W}_{URi}^{\Pi_{Ui}} f_{URi}^{\Pi_{Ui}}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_S} \mathbf{W}_{\mu Si} f_{NSi} + \mathbf{h} \\ &\quad \text{for } \Pi_{Ti}, \Pi_{Ui} \in \{+, -\} \end{aligned} \quad (41)$$

となる。式 (41) は、各転がり接触点の T, U 方向の接触力が、それぞれ接触集合 S_1 または S_2 に属した際の操り系の運動方程式を表す。ここで、 $\mathbf{W}_{TRi}^+ = \mathbf{W}_{TRi}$, $\mathbf{W}_{TRi}^- = -\mathbf{W}_{TRi}$ である。 $\mathbf{W}_{URi}^+, \mathbf{W}_{URi}^-$ も同様に定義される。

式 (33) の $f_{TRi}^+, f_{TRi}^-, f_{URi}^+, f_{URi}^-$ を式 (41) に代入し、スラック変数 $\Delta_{Ti}^+, \Delta_{Ti}^-, \Delta_{Ui}^+, \Delta_{Ui}^-$ を用いて表すと

$$\begin{aligned} M\dot{\mathbf{V}} &= \sum_{i=1}^{n_R} [(\mathbf{W}_{NRi} + \mu(\mathbf{W}_{TRi}^{\Pi_{Ti}} + \mathbf{W}_{URi}^{\Pi_{Ui}})) f_{NRi} \\ &\quad - \mathbf{W}_{TRi}^{\Pi_{Ti}} \Delta_{Ti}^{\Pi_{Ti}} - \mathbf{W}_{URi}^{\Pi_{Ui}} \Delta_{Ui}^{\Pi_{Ui}}] + \sum_{i=1}^{n_S} \mathbf{W}_{\mu Si} f_{NSi} \\ &\quad + \mathbf{h} \quad \text{for } \Pi_{Ti}, \Pi_{Ui} \in \{+, -\} \end{aligned} \quad (42)$$

を得る。式 (42) をまとめると、最終的に操り系の運動方程式は、

$$M\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{W}_{\mu(\Pi_T, \Pi_U)} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{NS} \\ \mathbf{f}_{NR} \\ \Delta_T^{\Pi_T} \\ \Delta_U^{\Pi_U} \end{bmatrix} + \mathbf{h} \quad (43)$$

で表される。ここで、 $\bullet \in \{T, U\}$ とすると

$$\mathbf{W}_{\bullet R}^{\Pi_\bullet} = [\mathbf{W}_{\bullet R1}^{\Pi_\bullet 1}, \mathbf{W}_{\bullet R2}^{\Pi_\bullet 2}, \dots, \mathbf{W}_{\bullet Rn_R}^{\Pi_\bullet n_R}] \in \mathbb{R}^{(6+n_\theta) \times n_R}$$

$$\mathbf{W}_{\mu(\Pi_T, \Pi_U)} = [\mathbf{W}_{\mu S}, \mathbf{W}_{NR} + \mu(\mathbf{W}_{TR}^{\Pi_T} + \mathbf{W}_{UR}^{\Pi_U}),$$

$$-\mathbf{W}_{TR}^{\Pi_T}, -\mathbf{W}_{UR}^{\Pi_U}] \in \mathbb{R}^{(6+n_\theta) \times (3n_R+n_S)}$$

である。ただし、転がり接触または滑り接触の一方の接触モードのみしか存在しない場合、存在していない接触モードに対応する要素が式 (43) の右辺第 1 項から除かれる。

同様に、操り系の運動拘束条件式 (17) を非負変数を用いて表す。接線方向の各相対加速度 a_{TRi} , a_{URi} は、それぞれ接触集合 S_1 , S_2 のいずれかに属しているので、式 (17) の a_{TRi} , a_{URi} を a_{TRi}^+ , a_{TRi}^- , a_{URi}^+ , a_{URi}^- を用いて表すと

$$\begin{bmatrix} a_{NS} \\ a_{NR} \\ a_{TR}^{\Pi_T} \\ a_{UR}^{\Pi_U} \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{(\Pi_T, \Pi_U)}^T \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{W}}_{(\Pi_T, \Pi_U)}^T \mathbf{V} \quad (44)$$

のように記述できる。ここで、

$$\mathbf{W}_{(\Pi_T, \Pi_U)} = [\mathbf{W}_{NS}, \mathbf{W}_{NR}, \mathbf{W}_{TR}^{\Pi_T}, \mathbf{W}_{UR}^{\Pi_U}]$$

$$\in \mathbb{R}^{(6+n_\theta) \times (3n_R+n_S)}$$

式 (39) に示すように、 $\mathbf{a}_{TR}$, $\mathbf{a}_{UR}$ と Δ_T , Δ_U は互いに逆の符号をもつ。そこで、式 (43) の符号を $\overline{\Pi_T}$, $\overline{\Pi_U}$ に書き直してから $\dot{\mathbf{V}}$ について解き、式 (44) に代入すると、最終的に式 (2) に相当する線形方程式

$$\begin{bmatrix} a_{NS} \\ a_{NR} \\ a_{TR}^{\Pi_T} \\ a_{UR}^{\Pi_U} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{NS} \\ \mathbf{f}_{NR} \\ \Delta_T^{\Pi_T} \\ \Delta_U^{\Pi_U} \end{bmatrix} + \mathbf{b} \quad (45)$$

が得られる。ここで、

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}_{(\Pi_T, \Pi_U)}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W}_{\mu(\overline{\Pi_T}, \overline{\Pi_U})} \quad (46)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{W}_{(\Pi_T, \Pi_U)}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h} + \dot{\mathbf{W}}_{(\Pi_T, \Pi_U)}^T \mathbf{V} \quad (47)$$

である。以上より、三次元操り系の剛体接触問題は、式 (40) を拘束条件とし式 (39), (45) で表される線形相補性問題に帰着される相補性モデルで表すことができた。

3.3 相補性モデルに対する解法

相補性モデル式 (39), (40), (45) に対して、力学的に実現可能な接触集合の組み合わせは未定である。本節では、ある接触集合の組み合わせ Π_T , Π_U を仮定したとき、導出した相補性モデルに対して、加速度、接触力、接触モード遷移を求める解法について述べる。なお、接触集合の決定および解の妥当性を含めた動力学計算アルゴリズムについては次節で述べる。操り

系の各瞬間の把握状態（対象物、多指ハンドの位置・速度）と動力学パラメータが既知ならば、式 (46) から行列 $\mathbf{A}$ を得る。一方、式 (47) のベクトル $\mathbf{b}$ は、式 (28) のベクトル $\mathbf{h}$ を含むことから、関節駆動トルクを与えることで定まる。したがって、式 (40) を拘束条件として、式 (39), (45) を線形相補性問題の解法として知られるレムケ法 [5] を用いて解くことによって、相対加速度 a_{NSi} , a_{NRi} , a_{TRi} , a_{URi} および接触法線力 f_{NSi} , f_{NRi} とスラック変数 Δ_{Ti} , Δ_{Ui} を求めることができる。さらに、スラック変数の解を式 (33) に代入すると転がり接触点の接触接線力 f_{TRi} , f_{URi} が得られる。同様に、滑り接触点の接触接線力 f_{TSi} , f_{USi} は、解 f_{NSi} を式 (6) に代入して求めることができる。操り系の加速度 $\dot{\mathbf{V}}$ は、ここで得られた接触力の解を式 (29) に代入することで導出できる。

さて、2.1 節で示したように、クーロン摩擦モデルを仮定すると、2 剛体間における転がりと滑りの接触状態は、接触点の並進方向の相対運動の状態（接線方向相対速度の有無）で区別される。したがって、接触モードの遷移は、相補性モデル式 (45) を解いて得られる並進方向の相対加速度 a_{NSi} , a_{NRi} , a_{TRi} , a_{URi} の値によって以下のように分類することができる。

(a) 転がり接触

(a1) 転がり接触 $\rightarrow$ 転がり接触

$$a_{NRi} = a_{TRi} = a_{URi} = 0$$

(a2) 転がり接触 $\rightarrow$ 滑り接触

$$a_{NRi} = 0, a_{TRi}^2 + a_{URi}^2 \neq 0$$

(a3) 転がり接触 $\rightarrow$ 接触離脱

$$a_{NRi} \neq 0$$

(b) 滑り接触

(b1) 滑り接触 $\rightarrow$ 滑り接触

$$a_{NSi} = 0$$

(b2) 滑り接触 $\rightarrow$ 接触離脱

$$a_{NSi} \neq 0$$

なお、滑り接触から転がり接触の遷移は、接触接線方向の相対速度が零であるかどうかで決定される。

3.4 動力学唯一性と動力学計算アルゴリズム

任意の関節駆動トルクの作用に対して力学的に実現可能な唯一な加速度、接触力、接触モード遷移が定まる操り系モデルを動力学的唯一であると定義する。操り系の動力学や制御のシミュレーションを行う場合、操り系モデルが各瞬間で動力学的唯一であることが要求される。本相補性モデルを用いるには、力学的に実現可能な接触集合の組み合わせがあらかじめ既知でないこと、そして線形相補性問題は一般に式 (45) の任意のベクトル $\mathbf{b}$ に対して相補性モデルが唯一解をもつとは限らないこと [4] を考慮しなければならない。本節では、本モデルの動力学的唯一性と動力学計算アルゴリズムについて述べる。

各転がり接触点の T, U 方向の接触力、相対加速度は、接触集合 S_1 , S_2 のいずれかに属するので、各転がり接触点では 4 通りの接触集合の組み合わせの候補 $(\Pi_{Ti}, \Pi_{Ui}) = \{(+, +), (+, -), (-, +), (-, -)\}$ が考えられる。操り系モデルが動力学的唯一であるならば、関節駆動トルクの作用に対して力学的に実現可能な唯一な接触集合の組み合わせが存在する。ここでは、まず前節で述べた解法に基づいて、すべての接触集合の組み合わせ候補について相補性モデル (39), (40), (45)

を解く。そして、唯一の接触集合の組み合わせに対して、実行可能解が存在するかどうかを調べる。もし存在する場合、その接触集合と実行可能解を動力学的唯一を満たす候補とする。

しかし、式 (45) のベクトル $\mathbf{b}$ は、関節駆動トルクの関数になっていることから、たとえ実行可能解が発見できたとしても、その相補性モデルが任意の関節駆動トルクの値に対して常に唯一の解をもつとは限らない。そのような場合、そのモデルは動力学的唯一とならないため、その実行可能解は力学的意味をもたない。ここでは、相補性モデルが動力学的唯一であることを検証するために、線形相補性問題の唯一解の存在性に関して知られている以下の定理 (文献 [4] 定理 3.3.7) を用いる。

[定理] 線形相補性問題 (1), (2) において、任意のベクトル $\mathbf{b}$ に対して唯一解 x_i, y_i の組が存在するたの必要十分条件は、行列 $\mathbf{A}$ が P マトリクス (主小行列式がすべて正となる行列。文献 [4] 定理 3.3.4) となることである。

式 (46) に示す行列 $\mathbf{A}$ は、操り系の接触モード、動力学パラメータ、各瞬間のコンフィギュレーションに依存するので、相補性モデルが必ずしも任意の関節駆動トルクに対して唯一解をもたないことが分かる。また、パワーグラスプのように滑りを許さない接触点が多くなると、式 (46) の行列 $\mathbf{W}_{(\Pi_T, \Pi_U)}^T$ の行が線形独立でなくなるので、行列 $\mathbf{A}$ が P マトリクスにならず、当然のことながら操り系モデルは唯一解をもたなくなる。ここで、上の定理を適用し、動力学的唯一な解を導出するためのアルゴリズムについてまとめる。上述のように実行可能解と唯一な接触集合の候補を決定した後、その候補に対応する相補性モデルの行列 $\mathbf{A}$ が P マトリクスであるかどうかを調べる。もし P マトリクスであるならば、その実行可能解を動力学的唯一を満足する解とみなす。

4. 数値シミュレーション

本章では、提案した相補性モデルに基づく解法を実際の多指ハンドによる操りの動力学計算に適用しその有用性を示すとともに、接触モード遷移が、摩擦係数、関節駆動トルクの大きさによって、どのように変化するかを数値シミュレーションにより示す。

数値シミュレーションの例として簡単のため、Fig. 8 に示すように、2 関節 2 本指による楕円形対象物の垂直面内操りを考える。この場合、各転がり接触点では 2 通りの接触集合の組み合わせ $\{+, -\}$ を考えればよい。基準座標系 Σ_B を両指第一関節軸を結ぶ線分の中点、対象物座標系 Σ_O を対象物重心に設置する。 Σ_O の原点位置は Σ_B の z 軸上の $z = -0.3$ [m] にあり、対象物の長軸が Σ_B の x 軸と平行な姿勢にある。初期状態では、対象物は両指の第 2 リンクと接触し、多指ハンドに対して静止しているので、各接触点は転がり接触の運動拘束を満足している。楕円形対象物の長軸、短軸の長さおよび質量はそれぞれ 0.37, 0.30 [m], 3.0 [kg], リンク長および質量はそれぞれ 0.3 [m], 0.5 [kg], 両指第一関節軸間距離 0.2 [m] とする。両指の第 1, 2 関節角度は、 Σ_B の x 軸に対して図中矢印の回転向きに 45.0, 87.7 [deg] とする。

ここでは、Fig. 8 に示す指 1, 2 の第 2 関節の関節駆動トルク τ_1, τ_2 をパラメータとして、関節駆動トルクを与えた瞬間に発生する接触モードの遷移を数値シミュレーションにより検証す

Fig. 8 Simulation model

Fig. 9 τ -space for $\mu = 0.2$ and 0.4

Fig. 10 Relation between joint torques and object acceleration in the z direction for $\mu = 0.4$. Fig. (a) shows the regions of object acceleration generated for applied joint torques, τ_1 and τ_2 . Fig. (b) shows the generated object acceleration for $\tau_1 = \tau_2$

る。なお、両指の第 1 関節には、 $\tau_0 = 2.5$ [Nm] の関節駆動トルクを与える。関節駆動トルクの向きは図中の矢印向きを正とする。Fig. 9 (a), (b) に、それぞれ摩擦係数 $\mu = 0.2, 0.4$ に対する接触モード遷移のシミュレーション結果 (ここで τ -space と呼ぶ) を示す。ただし、3.4 節の定理に基づいて、動力学的唯一性を満たす解であることが確認されている。図中、RS は関節駆動トルクの負荷によって、指 1, 2 の接触点がそれぞれ転がり接触、滑り接触へ遷移することを示している。RR, SR, SS も同様に定義する。なお、関節駆動トルクがゼロのとき、接触は離脱する。本シミュレーションモデルは Fig. 8 に示すように、接触点配置が対称になっていることから、 τ -space 上の接触モード領域も対称となる。このシミュレーション結果は、(i) 与えられる関節駆動トルクの大きさによって発生する接触モードは変化する、(ii) 摩擦係数を大きくすると、転がり接触へ遷移する領域は大きくなることを示している。Fig. 10 (a) は、Fig. 9 (b) の例に対して、関節駆動トルクを作用したときに発生する z 軸方

向の対象物加速度符号の領域を表している. Fig. 10 (b) は, 特に関節駆動トルクが $\tau_1 = \tau_2$ の場合に発生する z 軸方向の対象物加速度を示している. Fig. 10 (a), (b) は, (i) 関節駆動トルクの増加につれて, 対象物を $+z$ 方向に持ち上げる加速度が発生すること, (ii) τ -space 上のたとえ同じ接触モード領域であっても, 作用する関節駆動トルクの大きさによって発生する加速度の符号が異なることを示している.

5. お わ り に

本論文では, 接触モードの遷移を推定できる相補性モデルに基づく三次元剛体操り系の順動力学モデルおよび動力学唯一性を満たす解を導出する動力学計算アルゴリズムを提案した. さらに提案した相補性モデルを多指ハンドによる操りの動力学シミュレーションに適用し, その有用性を示した.

さて, 提案した相補性モデルが現実の物理現象と一致しているかどうかという問題は, 今後物理実験を行って検証していく必要がある. この検証実験や実際の操り制御を行うためには, 接触状態の正確な情報を得るための分布型の触覚・力覚センサの開発というハード面の問題も解決しなければならないと考える. これらの問題も含めて, 将来の課題とする. ところで, 相補性モデルが動力学的唯一でない場合, その解は力学的な意味をもたない. この問題に対して, 筆者らは相補性モデルとコンプライアンスモデルを統合した動力学計算アルゴリズムを提案した [15]. 相補性モデルが動力学的唯一でないときのみコンプライアンスモデルを用いて順動力学計算を行い, 全体的に計算コストが小さくロバストな動力学シミュレータを実現している. 本アルゴリズムでは, $4^n R$ (三次元操り) または $2^n R$ (二次元操り) とおりの接触集合の組み合わせを考慮しなければならない. よって, 転がり接触点数が多くなるにつれて計算コストが増大する. 力学的に実現不可能な接触集合の組み合わせを簡単に特定できるならば [12], そのような組み合わせをあらかじめ除くことによって, 探索回数を減らすことが可能である. これは将来の課題とする. 本論文では関節駆動トルクの作用によって新たな接触が生じない操り系を仮定した. 接触の発生は力学的に衝突現象と考えられる. 衝突を考慮した操り系の相補性モデルの構築は将来の課題とする.

参 考 文 献

- [1] B. Brogliato: Nonsmooth Mechanics. Springer, 1999.
- [2] A.A. Cole, J.E. Hauser and S.S. Sastry: "Kinematics and Control of Multifingered Hands with Rolling Contact," IEEE Transactions on Automatic Control, vol.34, no.4, pp.398-404, 1989.

- [3] A.A. Cole, P. Hsu and S.S. Sastry: "Dynamic Control of Sliding by Robot Hands for Regrasping," IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol.8, no.1, pp.42-52, 1992.
- [4] R.W. Cottle, J. Pang and R.E. Stone: The Linear Complementarity Problem. Academic Press, 1992.
- [5] 茨木, 福島: FORTRAN 77 最適化プログラミング. 岩波書店, 1991.
- [6] H.S. Howard and V. Kumar: "A Minimum Principle for the Dynamic Analysis of Systems with Frictional Contacts," IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.437-442, 1993.
- [7] K.H. Hunt and F.R.E. Crossley: "Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact," ASME Journal of Applied Mechanics, vol.42, Series E, pp.440-445, 1975.
- [8] 金子, 東森, 辻: "包み込み把握の遷移安定性," 日本ロボット学会誌, vol.16, no.5, pp.712-720, 1998.
- [9] P.R. Kraus, A. Fredriksson and V. Kumar: "Modeling of Frictional Contacts for Dynamic Simulation," IROS 1997 Workshop on Dynamic Simulation: Methods and Applications, 1997.
- [10] P. Lötstedt: "Coulomb Friction in Two-Dimensional Rigid Body Systems," Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol.61, pp.605-615, 1981.
- [11] M.A. Nahon and J. Angeles: "Real-time force optimization in parallel kinematic chains under inequality constraints," IEEE Transaction on Robotics and Automation, vol.8, no.4, pp.439-450, 1992.
- [12] 小俣, 永田: "多指ハンドによるパワーグラスブの力学的特性," 日本ロボット学会誌, vol.13, no.4, pp.525-531, 1995.
- [13] F. Pfeiffer and C. Glocker: Multibody Dynamics with Unilateral Contacts (Wiley Series in Nonlinear Science). John Wiley & Sons, 1996.
- [14] N. Sarker, X. Yun and V. Kumar: "Dynamic Control of 3-D Rolling Contacts in Two-Arm Manipulation," IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol.13, no.3, pp.364-376, 1997.
- [15] P. Song, M. Yashima and V. Kumar: "Dynamic Simulation for Grasping and Whole Arm Manipulation," IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.1082-1087, 2000.
- [16] P. Song, M. Yashima and V. Kumar: "Dynamics and Control of Whole Arm Grasps," IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.2229-2234, 2001.
- [17] J.F. Trinkle, J.M. Abel and R.P. Paul: "An Investigation of Frictionless Enveloping Grasping in the Plane," The International Journal of Robotics and Research, vol.7, no.3, pp.33-51, 1988.
- [18] J.C. Trinkle, J.S. Pang, S. Sudarsky and G. Lo: "On Dynamic Multi-Rigid-Body Contact Problems with Coulomb Friction," Z. angew. Math. Mech, vol.77, no.4, pp.267-279, 1997.
- [19] 八島, 山口: "接触モードのスイッチングに基づく多指ハンドによる包み込み把握の運動計画—ハイブリッドシステムの運動計画—," 計測自動制御学会論文集, vol.39, no.2, pp.150-158, 2003.
- [20] 横小路, 坂本, 吉川: "ソフトフィンガー型の多指ハンドによる物体の操りのための接触点における摩擦モーメント補償," 日本ロボット学会誌, vol.17, no.6, pp.876-886, 1999.

八島真人 (Masahito Yashima)

1961 年 10 月 25 日生. 1987 年早稲田大学大学院理工学研究科機械工学専攻修士課程修了. 1993 年東北大学大学院理工学研究科機械工学第二専攻博士課程修了. 1987~1989 年 (株) 東芝勤務. 1993 年防衛大学校助手, 講師を経て, 1998 年同助教授, 現在に至る. 1999~2000 年米国ペンシルバニア大学客員研究員. ロボットハンドの力学と運動制御の研究に従事. 博士 (工学). 計測自動制御学会, 日本機械学会, IEEE などの会員.

(日本ロボット学会正会員)

山口秀谷 (Hideya Yamaguchi)

1950 年 8 月 29 日生. 1980 年東北大学大学院工学研究科博士課程修了. 1981 年東北大学工学部助手, 1985 年防衛大学校講師, 助教授を経て, 機械システム工学科教授, 現在に至る. 振動制御の研究に従事. 工学博士. 日本機械学会などの会員.

(日本ロボット学会正会員)