非円形歯車を用いた可変剛性関節

松田 壮史^{*1} 村田 智^{*2}

Variable Stiffness Hinge Using Non-Circular Gears

Takeshi Matsuda^{*1} and Satoshi Murata^{*2}

This paper presents design of a new antagonistic variable stiffness hinge using noncircular gears. First, we show a method to convert a torsion spring to an arbitrary nonlinear torsion spring by nonuniform circular motion of noncircular gears. This nonlinear torsion spring is called ρ^2 -Spring. Next, a pair of ρ^2 -Springs are connected antagonistically to comprise a variable stiffness joint. Moreover, the design method of ρ^2 -Spring and β^2 -Hinge which have arbitrary characteristic is developed. We explain the characteristics of this joint theoretically and evaluate its capability of wide range stiffness. We also present experimental results of the prototype.

Key Words: Variable Stiffness, Antagonistic Mechanism, Impedance Control, Noncircular Gear, Nonlinear Spring

1. はじめに

近年のロボット技術の発展は目覚しく、閉ざされた空間で活動する産業用ロボット以外にも、家庭、学校や病院、商業施設など、不特定の一般の人々が存在する、開かれた空間での応用が模索されるようになってきている。こういった非製造業分野では、人間との衝突が生じやすい環境で活動するため、より高い安全性が求められる。

現在主流となっているロボットは、シリアルリンクマニピュレータを基本とし、ロボット関節にインピーダンス制御を行い、見かけ上のやわらかさを付与することで、安全性を確保している。しかしながらこの方式では、フィードバック系に遅れが存在するため、想定を超える衝撃には対応できず、また制御器そのものの故障に起因する、異常動作等の危険性も排除できない。これらは、制御系のみでは対応が難しい問題である。

本質的に安全なロボットのための受動的な機構として、可変剛性関節に注目が集まっている [1]。これはバネなどの弾性要素によって衝撃を吸収するだけでなく、その剛性係数や関節角を任意に設定できる関節機構のことである。

またロボットに機械的な弾性体を埋め込むことは、高速応答性やエネルギー効率の面からも有用である。ヒトの歩行は、足の振り自体はそれほど早い周期を持つ運動ではないが、ロボットにおいて足関節にアクチュエータを直結させこの運動をさせ

ることを考えた場合、バランスを取るために、足の振りよりはるかに高い周波数応答を持ったアクチュエータが必要になる。一般にロボットに使われる電磁モータでは、トルクを確保するため高減速率のギアを使用しており、必要な周波数応答を実現することは容易でなく、ロボットのコストを上げる原因となっている。またエネルギーを回生することが難しいため、エネルギー効率も悪い。一方、可変剛性関節を使用することにより、内蔵される弾性体と足との間で高速にエネルギーを循環させることができるので、機敏な動きと高エネルギー効率を両立することが可能である。

可変剛性関節は、構造上の特徴からいくつかの種類に分けられるが、ここではヒトが拮抗筋構造により剛性制御を可能にしている [2] ことを模倣した「拮抗駆動型」可変剛性関節 [3] に着目する。これは非線形弾性特性を持つ機構系を二つ用いて、それらを直接拮抗させ接続するものである。非線形弾性特性を持つ要素を用意すればよいと、原理的には容易に可変剛性関節を構成できる。しかしながら設定可能な剛性範囲を幅広く取るためには、非線形性が強い弾性要素が必要であり、単一の機械要素（特殊なバネなど）によってこれを実現することは難しい。これまでの研究では、試作レベルを超えることができないのが現状である。

そこで本研究では、非円形歯車の利用によりこの問題の解決を図る。非円形歯車とはピッチ曲線を任意の曲線とすることで、簡潔な機構で任意の不等速回転を得ることのできる要素である。これを任意の弾性要素の変位の非線形伝達に利用することで、小型で摩擦が少なくかつ幅広い特性変化範囲を持つ非線形弾性

原稿受付 2006 年 4 月 20 日

^{*1}株式会社インクス

^{*2}東京工業大学

^{*1}INCS Inc.

^{*2}Tokyo Institute of Technology

要素を作り出すことができる[†]。

本論文の構成は以下の通りである。第2章では、まず代表的な可変剛性関節の研究についてまとめた上で、それらの問題点を指摘する。第3章では非円形歯車の基礎について述べる。第4章では非円形歯車を用いた非線形弾性要素 (ρ^2 -Spring) を提案し、その特性を明らかにする。第5章では ρ^2 -Spring を二つ使い、それを拮抗筋のように接続することで得られる可変剛性関節 β^2 -Hinge を提案し、その特性を明らかにする。さらに第6章では、任意の変位-負荷特性を実現する ρ^2 -Spring と任意の可変剛性特性を持つ β^2 -Hinge の、それぞれの設計手法を構築する。最後に第7章において試作機による実験の結果を示し、提案する設計理論の正当性を検証する。

2. 可変剛性関節の従来研究

本章では、これまでに研究されてきた代表的な可変剛性関節の問題点について述べる。

可変剛性関節には、すでに述べた拮抗駆動型と呼ばれるもの以外にも、「直接駆動型」と分類されるものがある。これは単一の機構によって可変剛性特性を実現するものである。

2.1 直接駆動型

直接駆動型の代表として、板バネを用いる方式を取り上げる。板バネに法線方向の力 P を加えたとき、その変位 δ が作用点 C の位置によって変化することを利用した機構である (Fig. 1)。シンプルな機構となるため、ロボットアームなどに应用されている [6]。しかし a が b に比べ小さくなるにつれ急激に剛性が上昇してしまうことを原理的に回避できないなど、設計自由度の少なさが問題である。

2.2 拮抗駆動型

拮抗駆動型は、使用する非線形弾性要素の種類によって分類される。

2.2.1 非線形コイルバネ (Nonlinear Coil Spring)

圧縮されたときに、コイルバネが次第に密着するようにバネのピッチを不等にしたものである (Fig. 2)。これにより、負荷

Fig. 1 Cantilever beam

Fig. 2 Nonlinear coil spring

[†]同様のアイデアに基づくものとして、非円形プーリを使った Hurst らの AMASC と呼ばれる可変剛性機構がある [4]。これは、受動的なやわらかさを導入した脚ロボットの関節を想定して開発されており、拮抗駆動型可変剛性関節に必要な非線形弾性要素を実現するために、不等速回転伝達要素 (非円形プーリ) を利用する。しかしこの機構はワイヤを多数使う複雑なものであり、また、非円形プーリには対数らせんを用いているのみであり、任意の可変剛性特性を実現するピッチ形状の設計手法の確立には至っていない。

に応じて連続的に有効巻数が増減し、非線形な変位-負荷特性を実現している。しかし製作上の困難から、任意の変位-負荷特性を得ることが難しいため、応用範囲が限られる。

2.2.2 案内棒とねじりバネを用いる方式

テーパ状の案内棒にねじりバネ (torsion spring) を取り付けただのもので、案内棒が回転すると次第にねじりバネが案内棒に巻き付き有効巻数を減じることで非線形特性を実現する要素が提案されている [8]。しかし巻き付いたねじりバネと案内棒の間に存在する摩擦や、案内棒のテーパ形状に自由度があまりないことから、限られた用途にしか使えない。

2.2.3 動滑車と線形バネを用いる方式

動滑車に線形バネを取り付け、動滑車を通じてワイヤの張力を線形バネに負荷させることで、非線形弾性要素を構成するものである (Fig. 3) [9]。動滑車と線形バネを対向させて設置するためサイズが大きくなる傾向があり、さらにワイヤの伸びに特性が敏感なため、実際の応用には適さない。

3. 非円形歯車の基礎

本章では、非円形歯車の基本的な理論を導入する。非円形歯車のピッチ曲線設計手法や、任意のピッチ曲線への歯形創成もすでに確立されている [10]~[12]。本章では、以下の章で理論展開に必要な事項についてのみ説明する。

任意形状の歯車が一つあり、2 軸の中心間距離が一定 ($C = \text{const.}$) としたときに、その歯車に対して適切にかみ合い回転するピッチ曲線を持つ歯車を常に求めることができる。ただし通常の円形歯車と違い、一般に閉曲線にはならない。

3.1 ピッチ曲線の導出

任意の非円形歯車対の模式図を Fig. 4 に示す。これは中心間距離 C が一定で、駆動歯車 (driving gear) の半径を $R_1(\theta_1)$ 、同

Fig. 3 Diagram of NST [5]

Fig. 4 Noncircular gears

様に被動歯車 (driven gear) の半径を $R_2(\theta_2)$ とし, 始点 (starting point) から終点 (end point) までの噛み合いを示したものである. 駆動歯車・被動歯車の回転角 θ_1 , θ_2 は

$$\begin{cases} 0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1e} \\ 0 \leq \theta_2 \leq \theta_{2e} \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} 0 \leq \theta_1 \leq \theta_{1e} \\ 0 \leq \theta_2 \leq \theta_{2e} \end{cases} \quad (1b)$$

である. Fig. 4 において歯車は互いに滑らないこと, 中心間距離 C が一定であることにより,

$$R_1(\theta_1)d\theta_1 = R_2d\theta_2 \quad (2)$$

$$R_1(\theta_1) + R_2(\theta_2) = C \quad (3)$$

が必要である. 以上よりピッチ曲線は,

$$R_1(\theta_1) = \frac{CG(\theta_1)}{1 + G(\theta_1)} \quad (4)$$

$$R_2(\theta_1) = C - R_1(\theta_1) = \frac{C}{1 + G(\theta_1)} \quad (5)$$

と一意に決定される. ただし実際に R_2 を求めるときには, R_2 を θ_2 の関数に変数変換する必要がある. その変換式については, 次節で説明する. ここで $G(\theta_1)$ は角速度関係を規定する関数で

$$G(\theta_1) = \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \quad (6)$$

と定義される.

非円形歯車対は終点で噛み合うので,

$$\theta_{2e} = \int_0^{\theta_{1e}} G(\theta_1) d\theta_1 \quad (7)$$

が必要である.

3.2 傾斜角とかみ合い圧力角

非円形歯車においては接触点における角度が一般に一定でない. この傾斜角 (ピッチ曲線圧力角) がある一定値を超えると, 歯車のかみ合い拘束を保つことはできない.

傾斜角 ϕ は

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{1}{R_1(\theta_1)} \frac{dR_1}{d\theta_1(\theta_1)} \right) \quad (8)$$

で与えられる. 香取 [11] は, ピッチ曲線圧力角 ϕ の絶対値に基準圧力角[†]の和を 50 [deg] 以下にすることを提案している.

4. 非円形歯車による非線形弾性要素 ρ^2 -Spring

本章では, 非円形歯車を用いることで, 任意の変位-負荷特性を持つ非線形弾性要素 ρ^2 -Spring を提案し, その構成とその特性を明らかにする.

ρ^2 -Spring は Fig. 5 に示すように, 駆動軸 (driving axis) に n 個の非線形歯車対が直列に接続し, 被動軸 (driven axis) に変位-負荷特性が τ_u で表される弾性要素 (以下, 弾性源 (elasticity source) と呼ぶ) が接続されているものである. 弾性源が持つ

Fig. 5 ρ^2 -Spring. n pairs of noncircular gears with a nonlinear torsion spring attached

変位-負荷特性は, 線形・非線形のどちらでも構わない.

この機構は非円形歯車の特徴である, 小型で簡単な機構ながら高効率で確実な動力伝達ができるという特長をそのまま持っており, また弾性源を選ばない. 非円形歯車の設計次第で, 任意の変位-負荷特性を持つ非線形弾性要素を実現することが可能であり, 従来研究の問題点を解決しうるものである.

4.1 一般形

あるトルク τ を駆動軸に負荷したとき, 初段対 (first pair) の駆動歯車が θ_1 だけ回転し, 最終段対 (final pair) の被動歯車が θ_{2n} 回転することで, 最終段対の被動歯車に $\tau_u(\theta_{2n})$ なるトルクが付与される.

このとき, 仮想仕事の原理より,

$$\tau d\theta_1 = \tau_u(\theta_{2n}) d\theta_{2n} \quad (9)$$

が成り立つ.

さてここで, 回転角 θ_p と θ_q 間の角速度比 $G_{p,q}(\theta_p)$ を, 次のように定義する.

$$G_{p,q}(\theta_p) = \frac{d\theta_q}{d\theta_p} \quad (10)$$

同様に, 回転角 θ_p から θ_q への角度変換関数 $T_{p,q}(\theta_p)$ を, 次のように定義する.

$$\theta_q = T_{p,q}(\theta_p) = \int_0^{\theta_p} G_{p,q}(\theta_p) d\theta_p \quad (11)$$

入力したトルク τ と回転角 θ_1 の関係は, 新しく定義した関数 $G_{p,q}(\theta_p)$, $T_{p,q}(\theta_p)$ を使用することで, 式 (9) より

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_u(\theta_{2n}) \frac{d\theta_{2n}}{d\theta_1} = \tau_u(\theta_{2n}) \cdot G_{1,2n}(\theta_1) \\ &= G_{1,2n}(\theta_1) \cdot \tau_u(T_{1,2n}(\theta_1)) \end{aligned} \quad (12)$$

となる. この式は, ρ^2 -Spring の駆動軸に θ_1 なる変位があるときの出力トルクと見ることができるので, 変位-負荷関数 $\tau_C(\theta)$ は

$$\tau_C(\theta) = G_{1,2n}(\theta) \cdot \tau_u(T_{1,2n}(\theta)) \quad (13)$$

となる (駆動軸の変位 θ_1 を簡単のために θ と表記する).

[†]歯形が基準円と交わる点における歯形の接線と, その点を通る中心連結線との角度. 一般に 20 [deg] 程度.

4.2 角速度比と角度変換関数の一般形

前節では、駆動軸から被動軸までの角速度比 $G_{1,2n}$ と角度変換関数 $T_{1,2n}$ を用いた。駆動軸から被動軸までは、 n 個の非線形歯車対によって直列に接続されているから、 $G_{1,2n}$ と $T_{1,2n}$ は、それぞれの非線形歯車対が持つ角速度比 $G_{m,m+1}$ によって表現できる。ただし m は奇数である。

θ_{2n} は、 $T_{p,q}(\theta_p)$ の定義 (式 (11)) と Fig.5 において θ_{2l+1} と θ_{2l} (l は自然数) が同一となることに注意すると、以下のように入子状の合成関数によって表現できる。

$$\theta_{2n} = T_{2n-1,2n}(T_{2n-3,2n-2}(\dots T_{3,4}(T_{1,2}(\theta_1))\dots))$$

したがって $T_{1,2n}(\theta_1)$ は、以下のように求められる。

$$T_{1,2n}(\theta_1) = T_{2n-1,2n}(T_{2n-3,2n-2}(\dots T_{3,4}(T_{1,2}(\theta_1))\dots)) \quad (14)$$

合成関数の微分公式と式 (14), $\frac{d\theta_{2l+1}}{d\theta_{2l}} = 1$ ($\because \theta_{2l+1}$ と θ_{2l} (l は自然数) は同一) であることより、 $G_{1,2n}(\theta_1)$ は直ちに求められて、

$$\begin{aligned} G_{1,2n}(\theta) &= \frac{d\theta_{2n}}{d\theta_1} \\ &= \frac{d\theta_{2n}}{d\theta_{2n-1}} \cdot \frac{d\theta_{2n-2}}{d\theta_{2n-3}} \cdots \frac{d\theta_4}{d\theta_3} \cdot \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。例えば $n=2$ では

$$\begin{cases} G_{1,4}(\theta_1) = G_{3,4}(T_{2,1}(\theta_1)) \cdot G_{1,2}(\theta_1) & (16) \\ T_{1,4}(\theta_1) = T_{3,4}(T_{2,1}(\theta_1)) & (17) \end{cases}$$

となる。

5. 拮抗駆動型可変剛性関節 β^2 -Hinge

本章では同一の ρ^2 -Spring を一対組み合わせることで、拮抗駆動型可変剛性関節 (β^2 -Hinge) を構築する。これは ρ^2 -Spring の小型・簡潔・高効率という特長を生かした可変剛性関節になる。

本論文で提案する β^2 -Hinge は、 ρ^2 -Spring の駆動軸同士を拮抗するように直接接続させるものであり、これを直接接続型 β^2 -Hinge と呼ぶことにする。

直接接続型 β^2 -Hinge の模式図を Fig. 6 に示す (本章の図では弾性源を省略する)。二つの ρ^2 -Spring (A, B) を、それぞれの駆動軸が拮抗して接続するように、 ρ^2 -Spring B を ρ^2 -Spring A に対して反転させて接続している。接続された駆動軸を出力軸 (output axis) とし、その回転角を θ_D とする。被動軸の位置を設定するために、クランク状の設定軸 (setting axis) を設け、その回転角を設定角 θ_{sA} , θ_{sB} と呼ぶ。これは被動軸の位置は決定するが、被動軸とは空転するようにしているため、被動軸の回転角 θ_{2A} , θ_{2B} を直接決定するものではない。このとき、明らかに以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} \theta_{1A} = \theta_{sA} - \theta_D & (18a) \\ \theta_{1B} = \theta_{sB} + \theta_D & (18b) \end{cases}$$

出力軸に負荷トルク τ_{add} が加わり、出力軸が θ_D となるとき

(a) Initial position

(b) Set θ_{sA}, sB to θ_p

(c) Add external torque

Fig. 6 Antagonistic mechanism

を考える。出力軸における各トルクの関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tau_C(\theta_{1A}) + \tau_{add} - \tau_C(\theta_{1B}) &= 0 \\ \therefore \tau_{add} &= -\tau_C(\theta_{1A}) + \tau_C(\theta_{1B}) \end{aligned} \quad (19)$$

θ_{sA} , θ_{sB} をある θ_p , θ_q を使って

$$\begin{cases} \theta_{sA} = \theta_p + \theta_q & (20a) \\ \theta_{sB} = \theta_p - \theta_q & (20b) \end{cases}$$

と改めても一般性は失われない。ここで θ_p を差動角, θ_q を同相角と呼ぶ。任意の値 Δ を用いて

$$\theta_D = \theta_q + \Delta \quad (21)$$

とおいてもやはり一般性を失わない。このとき

$$\begin{cases} \theta_{1A} = \theta_p - \Delta & (22a) \\ \theta_{1B} = \theta_p + \Delta & (22b) \end{cases}$$

となるから、式 (19) はテイラー展開一次近似を使うことで、

$$\tau_{add} = -\tau_C(\theta_p - \Delta) + \tau_C(\theta_p + \Delta) \quad (23)$$

$$\simeq 2\tau'_C(\theta_p) \cdot \Delta \quad (24)$$

(a) θ_p is low (low stretching) (b) θ_p is high (high stretching)

Fig. 7 Stiffness regulation by antagonistic output axes

と変形できる。 τ_{add} と Δ の符号は同じでなければならないから、 τ'_C は定義域内で正であることが求められる。すなわち、 τ_C は単調増加関数でなければならない。これは式(19)において $\tau_{add} = 0$ のとき、 $\tau_C(\theta_{sA}) = \tau_C(\theta_{sB})$ から、一意に $\theta_{sA} = \theta_{sB}$ と決まるための条件と同じである。

式(24)から、設定軸(θ_{sA}, θ_{sB})に差動角 θ_p なる変位を加えることで、出力軸に $2\tau'_C(\theta_p)$ なる剛性を設定でき、式(21)から同相角 θ_q を加えることで、出力軸の自然角($\tau_{add} = 0$ のときの θ_D の値)を θ_q と設定できることが分かる。すなわちこれは、直接接続型 β^2 -Hingeは二つの設定軸によって、剛性と自然角の二つを独立に設定できる関節となることを示している。

Fig. 6(a)は初期状態であり、すべての変位角、設定角は0である。差動角 θ_p のみを設定したのがFig. 6(b)である。同相角 θ_q を設定することは、 β^2 -Hinge全体を回転させることに相当するため省略した。Fig. 6(c)は出力軸にある外力トルク τ_{add} を加えたものであり、 τ_{add} に応じて Δ が決定される(Fig. 7)。

なお本章では、一対の非円形歯車対を持つ ρ^2 -Springにより例示してきたが、 τ_C を適宜置き換えることで、 ρ^2 -Springの非円形歯車対が任意の段数であっても、同様にその特性を求めることができる。

6. 任意特性を実現する非円形歯車の設計法

本章では、任意の ρ^2 -Springの非線形出力特性や、 β^2 -Hingeの剛性設定特性から、必要な角速度比 G を求める手法を構築する[†]。これにより応用に必要な特性を設計し、そこから任意形状を持った非円形歯車を求めることが可能となる。

6.1 設定

ρ^2 -Springや β^2 -Hingeに関する数式は、角速度比 G の微分・積分や合成関数が入り組んだ形をしている。したがって求める特性のある連続関数で与えたとしても、そこから G を解析的に求めることは一般に不可能であり、数値計算法に拠ることになる。

そこで、要求する特性(ρ^2 -Springの場合は変位-負荷特性、直接接続型 β^2 -Hingeの場合は剛性設定関数 $2\tau'_C(\theta)$)を、 n 区間による3次スプライン補間を用いて表現したものを対象にす

[†]歯車の歯形は、角速度比 G から一意に決定できる。

Fig. 8 Design of arbitrarily characteristics using cubic spline curve

る(Fig. 8)。すなわち $\theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$ で

$$s(\theta) = a_i(\theta - \theta_i)^3 + b_i(\theta - \theta_i)^2 + c_i(\theta - \theta_i) + d_i \quad (25)$$

である。

また同様に、 ρ^2 -Springの弾性源の変位-負荷特性 τ_u も、 m 区間による3次スプライン補間によって表現されているものとする。これは変位-負荷特性が明確でない弾性源を使用する際に、実験によって得られた特性を使って非円形歯車の設計を行うとき、適用しやすい方法である。変位-負荷関数 τ_u が区間 $[0, \theta_{u,max}]$ で定義されているとき、 $\theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}$ で

$$\tau_u(\theta) = a_{u,i}(\theta - \theta_i)^3 + b_{u,i}(\theta - \theta_i)^2 + c_{u,i}(\theta - \theta_i) + d_{u,i} \quad (26)$$

と表される。ここで $\theta_0 = 0$, $\theta_m = \theta_{u,max}$ である。単純な線形バネのときには、 $m = 1$, $a_{u,0} = 0$, $b_{u,0} = 0$, $c_{u,0} = k$, $d_{u,0} = 0$ とすればよい。

3次スプライン補間は第2次導関数まで連続であり、区間を細かく切ることで補間精度を上げることができるので、高次項を使用する多項式近似と比較して、数値計算の精度上有利である。

まず任意の変位-負荷特性を持つ ρ^2 -Springの設計法について説明する。直接接続型 β^2 -Hingeの設計法は ρ^2 -Springの設計法と共通する部分が多いため、紙面の都合上、簡潔に説明する。付録Bには、本章で提案する手法による設計例を示す。

6.2 ρ^2 -Springの設計手法

非円形歯車のピッチ曲線など、非円形歯車の特性はすべて角速度比 $G_{1,2n}(\theta)$ によって記述されている。そこで式(13)の左辺を、設計したスプライン関数(式(25))に置き換え、この式を満たす角速度比 $G_{1,2n}(\theta)$ を求めることを目的とする。そこで $G_{1,2n}(\theta)$ に関する常微分方程式を導出し、数値的に解を得る手法を提案する。

なお本手法では、Fig. 5に示す n 個の非円形歯車対の初段と最終段の間の角速度比 $G_{1,2n}(\theta)$ を対象とするため、個々の非円形歯車対の角速度比 $G_{m,m+1}(\theta)$ は式(15)を解いて別に求める必要がある。一対の非円形歯車対のみの利用であればその必

要ない。

下記の手法によって $G_{1,2n}(\theta)$ を求めた際、ピッチ曲線の傾斜角に関する条件式 (8) を満たさないことや、 $\int_0^{\theta_{1e}} G_{1,2n}(\theta) d\theta$ が 2π を超えるなど、現実には歯車として成立しないものが解として得られることがある。そのようなときは、例えば弾性源の変位-負荷特性 τ_u に変更を加えるなどの試行錯誤によって、実現可能な解へ収束させる操作が必要となる。

6.2.1 常微分方程式

必要な変位-負荷特性は、式 (25) において与えられている。ただし、 $\theta_0 = 0$ 、 $\theta_n = \theta_{1e}$ である。式 (13) より、

$$\begin{aligned} G_{1,2n}(\theta) \cdot \tau_u(T_{1,2n}(\theta)) &= s(\theta) \\ \therefore G_{1,2n}(\theta) \cdot \tau_u \left(\int_0^\theta G_{1,2n}(\theta) d\theta \right) &= s(\theta) \quad (27) \end{aligned}$$

から $G_{1,2n}(\theta)$ を求める問題となる。

τ_u の逆関数 $\text{inv}\tau_u(\tau)$ を定義 (Fig. 9 参照) し、角速度比は常に正であることを利用すると、以下のように変形できる。

$$\int_0^\theta G_{1,2n}(\theta) d\theta = \text{inv}\tau_u \left(\frac{s(\theta)}{G_{1,2n}(\theta)} \right) \quad (28)$$

合成関数の微分より、

$$G_{1,2n}(\theta) = \text{inv}\tau_u' \left(\frac{s(\theta)}{G_{1,2n}(\theta)} \right) \frac{s'(\theta)G_{1,2n}(\theta) - s(\theta)G_{1,2n}'(\theta)}{(G_{1,2n}(\theta))^2} \quad (29)$$

$$\therefore G_{1,2n}'(\theta) = \frac{1}{s(\theta)} \left(s'(\theta)G_{1,2n}(\theta) - \frac{G_{1,2n}(\theta)^3}{\text{inv}\tau_u' \left(\frac{s(\theta)}{G_{1,2n}(\theta)} \right)} \right) \quad (30)$$

となる。

6.2.2 初期値 $G_{1,2n}(0)$

式 (27) に $\theta = 0$ を代入することで

$$G_{1,2n}(0) = \frac{s(0)}{\tau_u(0)} \quad (31)$$

と求められるが、本式には次のような問題がある。まず $s(0) = 0$ のとき、すなわち初張力を持たない ρ^2 -Spring を設計した際には $G_{1,2n}(0) = 0$ となり、このような非円形歯車を実現することはできない[†]。さらに $\tau_u(0) = 0$ のとき、すなわち ρ^2 -Spring の弾性源が初張力を持たないときは $G_{1,2n}(0) = \infty$ となり、やはり不可能である。したがって上式は、初張力を持つ ρ^2 -Spring を、初張力を持つ弾性源を使って構成するときのみである。

そこで、初張力を持たない ρ^2 -Spring を初張力を持たない弾性源で構成するとき^{††}、すなわち $s(0) = 0$ ($\therefore d_0 = 0$)、 $\tau_u(0) = 0$ のときの、 $G_{1,2n}(\theta)$ の初期値を別に求める。式 (29) に $\theta = 0$ を代入すると

[†]これは、減速比 0 の歯車であることを示している。

^{††}圧縮バネを弾性源に用いる場合に相当する。

Fig. 9 Inverse function: $\text{inv}\tau_u(\theta)$

Fig. 10 Relationship between h and j under non-initial-force

$$\begin{aligned} G_{1,2n}(0) &= \text{inv}\tau_u' \left(\frac{s(0)}{G_{1,2n}(0)} \right) \frac{s'(0)G_{1,2n}(0) - s(0)G_{1,2n}'(0)}{(G_{1,2n}(0))^2} \\ \therefore G_{1,2n}(0) &= \sqrt{\text{inv}\tau_u'(0) \cdot s'(0)} \\ &= \sqrt{\text{inv}\tau_u'(0) \cdot c_0} \quad (32) \end{aligned}$$

となる。ここで $\text{inv}\tau_u'(0)$ を極限を用いて求めると、

$$\begin{aligned} \text{inv}\tau_u'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dt} \text{inv}\tau_u(t) \Big|_{t=h} \right) \\ &= \lim_{j \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{d}{d\theta} \tau_u(\theta)} \Big|_{\theta=j} \right) \\ \therefore h \rightarrow 0 \text{ で } j \rightarrow 0 \text{ (Fig. 10)} \end{aligned}$$

となるが、 θ が十分 0 に近いとき、 $\frac{d}{d\theta} \tau_u(\theta) = \frac{d}{d\theta} \tau_{u,0}(\theta) = 3a_{u,0}\theta^2 + 2b_{u,0}\theta + c_{u,0}$ となるから、

$$\text{inv}\tau_u'(0) = \lim_{j \rightarrow 0} \frac{1}{3a_{u,0}j^2 + 2b_{u,0}j + c_{u,0}} = \frac{1}{c_{u,0}} \quad (33)$$

と求められる ($c_{u,0}$ が 0 となる、もしくは非常に 0 に近い弾性源を取り扱うときには注意が必要である。そのような場合には、弾性源に初張力を与えるなどの対策をすることが求められる)。

以上をまとめると、初張力を持たないときの初期値 $G_{1,2n}(0)$ は、次のように求められる。

$$G_{1,2n}(0) = \sqrt{\frac{c_0}{c_{u,0}}} \quad (34)$$

6.2.3 微分値の初期値 $G_{1,2n}'(0)$

本項も、前項と同様に初張力の有無によって導出が異なる。

(1) 初張力があるとき

式 (30) に $\theta = 0$ を代入すると、

$$G'_{1,2n}(0) = \frac{1}{s(0)} \left(s'(0)G_{1,2n}(0) - \frac{G_{1,2n}(0)^3}{\text{inv}\tau'_u \left(\frac{s(0)}{G_{1,2n}(0)} \right)} \right)$$

となる.

ここで $\text{inv}\tau'_u \frac{s(0)}{G_{1,2n}(0)}$ を, 極限により求める. 式 (31) より

$$\frac{s(0)}{G_{1,2n}(0)} = \tau_u(0) \text{ だから,}$$

$$\begin{aligned} \text{inv}\tau'_u(\tau_u(0)) &= \lim_{h \rightarrow \tau_u(0)} \left(\frac{d}{dt} \text{inv}\tau_u(t) \Big|_{t=h} \right) \\ &= \lim_{j \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{d}{d\theta} \tau_u(\theta) \Big|_{\theta=j}} \\ &\because h \rightarrow \tau_u(0) \text{ で } j \rightarrow 0 \text{ (Fig. 11)} \end{aligned}$$

となるが, θ が十分 0 に近いとき, $\frac{d}{d\theta} \tau_u(\theta) = \frac{d}{d\theta} \tau_{u,0}(\theta) = 3a_{u,0}\theta^2 + 2b_{u,0}\theta + c_{u,0}$ となるから,

$$\text{inv}\tau'_u(\tau_u(0)) = \lim_{j \rightarrow 0} \frac{1}{3a_{u,0}j^2 + 2b_{u,0}j + c_{u,0}} = \frac{1}{c_{u,0}} \quad (35)$$

と求められる. $c_{u,0} = \infty$ となることは現実にはない. 具体的に書き直すと, 次の通りである.

$$G'_{1,2n}(0) = \frac{1}{d_0} (c_0 \cdot G_{1,2n}(0) - c_{u,0} \cdot G_{1,2n}(0)^3) \quad (36)$$

(2) 初張力がないとき

初張力がないとは, $s(0) = 0$ ($\therefore d_0 = 0$), $\tau_u(0) = 0$ のときである. このとき式 (30) に $\theta = 0$ を代入すると, 0 で除算することになるのですぐには求められない. そこで極限によって $G'_{1,2n}(0)$ を求める. すなわち

$$\begin{aligned} G'_{1,2n}(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{s(h)} \left(s'(h)G_{1,2n}(h) - \frac{G_{1,2n}(h)^3}{\text{inv}\tau'_u \left(\frac{s(h)}{G_{1,2n}(h)} \right)} \right) \right\} \end{aligned}$$

である. ここで h は十分 0 に近いから 1 次近似を利用すると, 上式は

Fig. 11 Relation between h and j under initial force

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{c_0 h + O} \left(2b_0 G(0)h + c_0(G(0) + G'(0)h) + O - \frac{G(0)^3 + 3G(0)^2 G'(0)h + O}{\text{inv}\tau'_u \left(\frac{s(h)}{G(h)} \right)} \right) \right\}$$

と変形できる (G は $G_{1,2n}$ を, O は $O(h^2)$ を略記したものである). ここで極限を取ることで O を無視し, 式 (33) の結果を用いると,

$$2b_0 \sqrt{\frac{1}{c_0 c_{u,0}}} - 2G'_{1,2n}(0)$$

となるから, 以下のように求められる.

$$G'_{1,2n}(0) = \frac{2}{3} b_0 (c_0 c_{u,0})^{-\frac{1}{2}} \quad (37)$$

6.2.4 初期値のまとめ

初張力のある弾性源を用いて, 初張力のある ρ^2 -Spring を構成するとき.

$$\begin{cases} G_{1,2n}(0) = \frac{s(0)}{\tau_u(0)} = \frac{d_0}{c_{u,0}} \end{cases} \quad (38a)$$

$$\begin{cases} G'_{1,2n}(0) = \frac{c_0 \cdot G_{1,2n}(0) - c_{u,0} \cdot G_{1,2n}(0)^3}{d_0} \end{cases} \quad (38b)$$

初張力のない弾性源を用いて, 初張力のない ρ^2 -Spring を構成するとき.

$$\begin{cases} G_{1,2n}(0) = \sqrt{\frac{c_0}{c_{u,0}}} \end{cases} \quad (39a)$$

$$\begin{cases} G'_{1,2n}(0) = \frac{2}{3} b_0 (c_0 c_{u,0})^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (39b)$$

初張力のない弾性源によって初張力のある ρ^2 -Spring を構成すること, もしくは, 初張力のある弾性源によって初張力のない ρ^2 -Spring を構成することは, 対応する非円形歯車が機械要素として成立しないため, 不可能である.

6.2.5 ρ^2 -Spring の弾性源が単純な線形バネのとき

式 (26) において $m = 1$, $a_{u,0} = b_{u,0} = d_{u,0} = 0$, $c_{u,0} = k > 0$ となるとき, すなわち

$$\tau_u(\theta) = k\theta$$

となるときである. 6.1 節では τ_u の係数は決定されていることを前提にしていたが, ここではその必要はない. 逆に k を未定のまま計算し, 最後に角度範囲条件 (式 (7)) 等から k を決定することが可能である.

常微分方程式は, $\text{inv}\tau'_u(t) = 1/k$ となることから,

$$G'_{1,2n}(\theta) = \frac{1}{s(\theta)} \left(s'(\theta)G_{1,2n}(\theta) - \frac{G_{1,2n}(\theta)^3}{1/k} \right)$$

となる. ここで

$$\hat{G}_{1,2n}(\theta) = \sqrt{k} G_{1,2n}(\theta) \quad (40)$$

なる変換を用いることで、次のように変形できる。

$$\hat{G}'_{1,2n}(\theta) = \frac{s'(\theta)\hat{G}_{1,2n}(\theta) - \hat{G}_{1,2n}(\theta)^3}{s(\theta)} \quad (41)$$

前項における「初張力なし」の結果に代入することで、

$$\hat{G}_{1,2n}(0) = \sqrt{c_0} \quad (42)$$

$$\hat{G}'_{1,2n}(0) = \frac{2}{3} \frac{b_0}{\sqrt{c_0}} \quad (43)$$

と求められる。これにより k の値が未定であっても、常微分方程式を数値的に解くことができる。

(1) 未定係数 k の決定

すでに $\hat{G}_{1,2n}(\theta)$ が求まっているとする。式 (7) に $\hat{G}_{1,2n}(\theta)$ を代入すると、

$$\theta_{2ne} = \int_0^{\theta_{1e}} \frac{1}{\sqrt{k}} \hat{G}_{1,2n}(\theta) d\theta = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^{\theta_{1e}} \hat{G}_{1,2n}(\theta) d\theta \quad (44)$$

となり、バネ係数 k と ρ^2 -Spring の最終対の被動軸の最大回転角 θ_{2ne} は互いに従属となっている。これより、使用できる弾性源のバネ係数と最大回転角 θ_{2ne} の関係より、より適当なものに調整することができる。

6.3 β^2 -Hinge の設計手法

本節では 5 章で示した、直接接続型 β^2 -Hinge を対象とした設計手法を示す。

直接接続型 β^2 -Hinge の出力トルクは式 (24) で示される。本節ではこの $2\tau'_C(\theta_p)$ を設計対象とする。すなわち、 ρ^2 -Spring のときと同じく、3 次スプライン補間多項式 $s(\theta)$ (式 (25)) を使い、以下のような特性を表現する $G_{1,2n}(\theta)$ を求める問題となる。

$$\begin{aligned} 2\tau'_C(\theta) &= 2 \left[G_{1,2n}(\theta) \cdot \tau_u \left(\int_0^\theta G_{1,2n}(\theta) d\theta \right) \right]' \\ &= s(\theta) \end{aligned} \quad (45)$$

しかし、これだけでは問題設定としては十分ではない。その理由は以下の通りである。ある定数 p_1, p_2 を用いて二つの関数 $\tau_c(\theta) + p_1, \tau_c(\theta) + p_2$ を作る。当然ながらこの二つの関数は同一の 1 階微分 $\tau'_c(\theta)$ を持つため、 ρ^2 -Spring の変位-負荷関数が $\tau_c(\theta) + p_1, \tau_c(\theta) + p_2$ のどちらであっても、それにより構成される β^2 -Hinge の特性は同じことになる (Fig. 12 参照)。すなわち、式 (45) を満たす $\tau_c(\theta)$ は、初期値に制約がないため無数に存在することとなり、式 (45) だけでは解を得ることはできない。

そこで $\tau_c(\theta)$ の初期値 $\tau_c(0)$ を ϵ と置くことにし、式 (45) の両辺を区間 $[0, \theta]$ で積分すると以下ようになる。

$$\tau_c(\theta) - \epsilon = \frac{1}{2} \int_0^\theta s(\theta) d\theta$$

式 (13) より

$$G_{1,2n}(\theta) \tau_u \left(\int_0^\theta G_{1,2n}(\theta) d\theta \right) = \frac{1}{2} \int_0^\theta s(\theta) d\theta + \epsilon$$

Fig. 12 Two ρ^2 -Springs having same first derivative

上式右辺を $S(\theta)$ と置くと、

$$G_{1,2n}(\theta) \tau_u \left(\int_0^\theta G_{1,2n}(\theta) d\theta \right) = S(\theta) \quad (46)$$

となり、これが解くべき問題となる。あとの手順はほぼ前節と同じであるので、導かれる結果のみを示すにとどめる。すなわち、 $\epsilon = 0$ のときは「初張力なし」の ρ^2 -Spring の、 $\epsilon > 0$ のときは「初張力あり」の問題と同じように取り扱えばよい。

常微分方程式は、式 (27) の s を S へ置き換えることで、

$$G'_{1,2n}(\theta) = \frac{1}{S(\theta)} \left(S'(\theta) G_{1,2n}(\theta) - \frac{G_{1,2n}(\theta)^3}{\text{inv}\tau'_u \left(\frac{S(\theta)}{G_{1,2n}(\theta)} \right)} \right) \quad (47)$$

と求められる。初期値も同様に求められて、初張力がある場合は

$$\begin{cases} G_{1,2n}(0) = \frac{S(0)}{\tau_u(0)} = \frac{\epsilon}{d_{u,0}} \\ G'_{1,2n}(0) = \frac{1}{S(0)} \left(S'(0) G_{1,2n}(0) - \frac{G_{1,2n}(0)^3}{\text{inv}\tau'_u \left(\frac{S(0)}{G_{1,2n}(0)} \right)} \right) \end{cases} \quad (48a) \quad (48b)$$

となり、初張力がない場合は

$$\begin{cases} G_{1,2n}(0) = \sqrt{\frac{d_0}{2c_{u,0}}} \\ G'_{1,2n}(0) = \frac{1}{3} c_0 \sqrt{\frac{1}{2d_0 c_{u,0}}} \end{cases} \quad (49a) \quad (49b)$$

である。

7. 実 験

理論の検証のために試作を行い実験を行った。

7.1 直接駆動型 β^2 -Hinge

Fig. 13 は製作した試作機の写真である。Fig. 14 は試作機の内部構造であり、 ρ^2 -Spring が内蔵されている。試作機はそれぞれ同一の ρ^2 -Spring を内蔵した二つの要素 (白・黒) に分

Fig. 13 The prototype of direct connecting β^2 -Hinge Fig. 14 Inside mechanism of β^2 -Hinge

けられ、これが出力軸に互いに拮抗するように接続されている。Fig. 13 の図中の矢印の様に“ねじこむ”ことが、5 章の設定軸に差動角を与えていることに相当するため、出力軸での剛性を設定することができる。

7.1.1 内部構造

非円形歯車として、対数らせん歯車を用いた。これは駆動歯車と被動歯車を同一の形状にすることができるためである。なお対数らせん歯車については付録に詳細を示す。主要諸元を Table 1 に示す。

7.1.2 実験結果： ρ^2 -Spring

一つの ρ^2 -Spring の変位-負荷特性を測定した。結果は Fig. 15 である。点が実測値で実線が理論値である。ただし ρ^2 -Spring が内部に持つ摩擦によって、実測値は一意に決まらずある範囲に分布するため、その平均値を用いた。Fig. 15 より、非常によく一致していることが分かる。これより ρ^2 -Spring を用いることで、非線形性の強い変位-負荷特性であっても、実現が可能であることが分かる。

7.1.3 実験結果： β^2 -Hinge

設定角を 6 段階に取り、それぞれにおいて変位-負荷特性を計測した (Fig. 16)。丸点が実測値であり、実線が理論値であ

Table 1 Specifications of the prototype of direct connecting β^2 -Hinge

R_1	$A \exp(t\theta_1)$
R_2	$(C - A) \exp(-t\theta_2)$
G	$\frac{A \exp(t\theta_1)}{C - A \exp(t\theta_1)}$
θ_1	$0 \dots 345$ [deg]
θ_2	$0 \dots 345$ [deg]
C	20.0 [mm]
A	4.25 [mm]
t	0.2173
Module	0.305
Material (gear)	C3713P
Size (shell)	$\phi 83$ [mm] $\times$ W32 [mm]
Material (shell)	POM

Fig. 15 Nonlinear torsion profile of β^2 -Hinge Fig. 16 Variable stiffness of β^2 -Hinge

る。 β^2 -Hinge の内部摩擦による誤差は、 ρ^2 -Spring のときと同様の処理をした。負荷がないときに変位 Δ が 0 からずれるものが確認されたが、それ以外は実測値と理論値はよく一致している。この実験では、最低の剛性値 (設定角 0.87 [rad]) と最大の剛性値 (設定角 5.24 [rad]) の比は 61 倍である。

8. 結 論

非円形歯車の不等速運動と、バネに代表される機械的な弾性

要素を組み合わせることで、小型で確実に動作し任意の変位-負荷特性を持たせることのできる非線形弾性要素 ρ^2 -Spring を提案した。 ρ^2 -Spring の駆動軸同士を拮抗するように直接接続させることにより、拮抗駆動型可変剛性関節である直接接続型 β^2 -Hinge を提案しその特性を解析的に明らかにした。さらに、任意特性を持つ ρ^2 -Spring と β^2 -Hinge を実現する非円形歯車の設計手法を示した。

今後の課題として、高トルクを負荷させたときの非円形歯車の摩擦の影響を調べること、可変弾性要素を持つロボットの効率的な制御手法の確立、さらにより具体的なアプリケーションへの適用を行っていく必要がある。

謝 辞 本研究は文部科学省科学研究費 (No. 16650036) の支援のもとで行われた。

参 考 文 献

- [1] 岡田昌史: “人間らしい柔らかな動きと駆動機構”, 日本ロボット学会誌, vol.17, no.6, pp.782-785, 1999.
- [2] R. Shadmehr and M.A. Arbib: “A mathematical analysis of the force-stiffness characteristics of muscles and the role of reflexes in control of a single joint system,” Biological Cybernetics, vol.66, pp.463-477, 1992.
- [3] K.F. Laurin-Kovitz, J.E. Colgate and S.D.R. Carnes: “Design of Components for Programmable Passive Impedance,” Proceedings of International Conference on Robotics and Automation, pp.1476-1481, 1991.
- [4] J.W. Hurst, J.E. Chestnutt and A.A. Rizzi: “An Actuator with Physically Variable Stiffness for Highly Dynamic Legged Locomotion,” Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation, vol.5, pp.4662-4667.
- [5] 森田寿郎, 菅野重樹: “メカニカルソフトネスとコンプライアンス調整”, 日本ロボット学会誌, vol.17, no.6, pp.790-794, 1999.
- [6] 森田寿郎, 富田信義, 植田武男, 菅野重樹: “関節の機械インピーダンスを調節可能な力制御ロボットアームの開発”, 日本ロボット学会誌, vol.16, no.7, pp.1001-1006, 1998.
- [7] 林原靖男, 箱木北斗, 渡辺浩太郎: “剛性可変機構を用いたリハビリ用 CPM 装置の開発”, 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会'04 予稿集, 1A1-H-77 (CD-ROM), 2004.
- [8] 小金澤綱一, 山崎政道, 石川夏男: “剛性可変機能を有する拮抗筋型駆動システムとその制御”, 日本ロボット学会誌, vol.18, no.7, pp.1003-1010, 2000.
- [9] 兵頭和人, 小林博明: “非線形バネ要素を持つ腱制御手首機構の研究”, 日本ロボット学会誌, vol.11, no.8, pp.1244-1251, 1993.
- [10] N.P. Chironis: GEAR DESIGN AND APPLICATION. pp.158-167, McGraw-Hill, 1967.
- [11] 香取英男: 非円形歯車の設計・製作と応用. 日刊工業新聞社, 2001.
- [12] D.B. Dooner and A.A. Seireg: THE KINEMATIC GEOMETRY OF GEARING. Wiley-Interscience, 1995.

付録 A. 対数らせん歯車 (Logarithmic Spiral Gear)

本付録では、ピッチ曲線が対数らせんとなる対数らせん歯車について、その特徴と設計手法を示す。変数はすべて Fig. 4 および第 3 章と共通である。

付録 A.1 ピッチ曲線

対数らせん歯車とは、ピッチ曲線が $A \exp(t\theta_1)$ と表される歯車のことを指す。ただし A , t は適当な定数である。いま駆動歯車を

$$R_1(\theta_1) = A \exp(t\theta_1) \quad (\text{A.1})$$

と定義すると、角速度比 G は

$$G(\theta_1) = \frac{A \exp(t\theta_1)}{C - A \exp(t\theta_1)} \quad (\text{A.2})$$

となる。このとき、角速度比の定義式 (6) より

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \int_0^{\theta_1} G(\theta_1) d\theta_1 \\ &= \frac{1}{t} \{ \log(C - A) - \log(C - A \exp(t\theta_1)) \} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

となるから、

$$\theta_2 = \log(C - A \exp(t\theta_1)) = \log(C - A) - t\theta_2 \quad (\text{A.4})$$

である。したがって R_2 は

$$\begin{aligned} R_2(\theta_2) &= C - R_1(\theta_1) = C - A \exp(t\theta_1) \\ &= (C - A) \exp(-t\theta_2) \quad \because \text{式 (A.4)} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となり、被動歯車も対数らせん歯車となる。

傾斜角 ϕ は式 (8) から簡単に

$$\phi = \tan^{-1}(t) = \text{const.} \quad (\text{A.6})$$

と求められる。傾斜角が一定であるということは歯車のかみ合い角を一定にできることを示しており、安定した動作のために重要な特徴となる。

付録 A.2 駆動・被動歯車のピッチ形状が同一となる条件

対数らせん歯車は、駆動歯車と被動歯車の形状を同一にすることが可能である。このことは応用上コストの低減に直結するので、重要な非円形歯車の形状であるといえる。

ピッチ形状が同一であるためには、駆動歯車と被動歯車の回転角範囲が同一であることが必要である。すなわち式 (1a), 式 (1b) において θ_{1e} と θ_{2e} を同一の θ_e と置けるので、式 (A.3) より、

$$\begin{aligned} \theta_e &= \frac{1}{t} \{ \log(C - A) - \log(C - A \exp(t\theta_e)) \} \\ &\Rightarrow -A \exp(t\theta_e) + C \exp(t\theta_e) - (C - A) = 0 \\ \therefore \exp(t\theta_e) &= \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4A(C - A)}}{-2A} = \frac{C - A}{A} \text{ or } 1 \end{aligned}$$

となるが、 t , θ_e はそれぞれ 0 ではないから、

$$\exp(t\theta_e) = \frac{C - A}{A} \quad (\text{A.7})$$

が、回転角が同一となるための条件となる。

いま $\theta_2 = -\theta_3 + \theta_e$ とおくと式 (A.5) より、

$$\begin{aligned} R_2 &= (C - A) \exp(-t(-\theta_3 + \theta_e)) \\ &= (C - A) \exp(t\theta_3) \cdot \exp(-t\theta_e) \\ &= A \exp(t\theta_3) \quad \because \text{式 (A.7)} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となることから、角度範囲条件である式 (A.7) が成立しているとき、駆動歯車と被動歯車のピッチ曲線は幾何的に同一となる。すなわち式 (A.7) は、対数らせん歯車対の同一形状条件となる。

付録 A.3 ρ^2 -Spring の変位-負荷特性

一対の対数らせん歯車対によって構成される ρ^2 -Spring の変

Fig. 17 Nonlinearity of ρ^2 -Spring using identical logarithmic spiral gears

位-負荷特性 $\tau_C(\theta)$ は、式 (13) において $n = 1$ を代入すると、 $G_{1,2}(\theta_1)$ は式 (A.2) に相当することから、

$$\tau_C(\theta) = \frac{A \exp(t\theta_1)}{C - A \exp(t\theta_1)} \cdot \tau_u \left(\frac{1}{t} \log \frac{C - A}{C - A \exp(t\theta_1)} \right) \quad (\text{A.9})$$

と求められる。

Fig. 17 に、同一形状条件 (式 (A.7)) を満たしている対数らせん歯車をつかった ρ^2 -Spring の、変位-負荷特性の一例を示す。この図では、対数らせん歯車の各パラメータ A , C , t , θ_e によって、変位-負荷特性の非線形性がどのように変化するか注目する。そのため被動軸に接続される弾性源は、 $\tau_u(\theta) = k\theta$ なる線形バネを使用し、 $C = 1$, $\theta_e = 330$ [deg] と固定する。このとき式 (A.9) は

$$\tau_C(\theta) = k \frac{1}{t} \frac{A \exp(t\theta_1)}{C - A \exp(t\theta_1)} \cdot \log \left(\frac{C - A}{C - A \exp(t\theta_1)} \right)$$

となるが、変化だけに注目するためにバネ係数 k を無視し無次元化した

$$\hat{\tau}_C(\theta) = \frac{1}{t} \frac{A \exp(t\theta_1)}{C - A \exp(t\theta_1)} \cdot \log \left(\frac{C - A}{C - A \exp(t\theta_1)} \right)$$

をプロットした。 $A = 0.5$ では対数らせん歯車は円形歯車となる。 $A = 0.45$ ではほぼ線形の特性を示しているが、 A を減じるにつれ、非常に強い非線形性を示すことが分かる。非線形性が強いほど剛性設定範囲の広い拮抗駆動型可変剛性関節を構成

Fig. 18 Example of characteristics curve

Fig. 19 Generated angular velocity ratio G

Fig. 20 Complete contours of generated noncircular gears

できるので、この意味でも有用な形状であるといえる。

付録 B. ρ^2 -Spring の設計例

本論文で示した、任意の変位-負荷特性を持つ ρ^2 -Spring の設計法についての設計例を示す。

Fig. 18 (b) に示す特性を持つ ρ^2 -Spring が必要であり、Fig. 18 (a) に示す特性を持つ弾性源が使用できるものとする。

このとき、第 6 章で示した手法を使うことで、角速度比 G は数値計算することができる (Fig. 19)。角速度比 G から非円形歯車対の輪郭を求める手法は確立されており [11]、それによって生成した歯形を Fig. 20 に示す。

松田 壮史 (Takeshi Matsuda)

1980 年 6 月 12 日生。2004 年東京工業大学工学部制御システム工学科卒業。2006 年東京工業大学大学院総合理工学研究科知能システム科学専攻修士課程修了。現在株式会社インクスに勤務。生産技術開発 (金型) に従事。現在に至る。

(日本ロボット学会正会員)

村田 智 (Satoshi Murata)

1962 年 6 月 4 日生。1987 年名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程航空工学専攻修了。1987 年通商産業省工業技術院機械技術研究所研究員。博士 (工学)。2001 年より東京工業大学大学院総合理工学研究科知能システム科学専攻助教授。計測自動制御学会、日本機械学会、かたちの科学会、IEEE などの正会員。

(日本ロボット学会正会員)