〔原著論文〕

ロボットマニピュレータの離散時間学習制御法

鈴木達也* 安江正徳* 大熊 繁* 内川嘉樹*

Discrete-Time Learning Control for Robotic Manipulators

Tatsuya SUZUKI Masanori YASUE Shigeru OKUMA
Yoshiki UCHIKAWA

A discrete-time learning control for robotic manipulators is studied system theoretically with a pulse transfer functions.

Firstly, the learning stability condition for the discrete-time learning control is derived in frequency domain. From that condition, we derive the new learning stability condition which is applicable for the case of which output number is larger than input number. This is more common as in the case of voltage input position and velocity outputs.

Secondly, we examine the learning algorithm with the position signal. When the sampling period is small, the learning stability is degraded because of the system's zeros which are generated by discretizing.

Thirdly, we examine the learning algorithm with position and velocity signals. In this case, we can stabilize the learning control systems which are unstable in the case of the learning with only the position signal.

Finally, we show the simulation results on the trajectory control of robotic manipulators using the discrete-time learning control. The simulation results agreed well with the analytical ones.

Key Words : Discrete-Time Learning Control, Robotic Manipulators, Unstable Zero, Learning Stability

1. はじめに

近年、作業能率を高めるために、産業用ロボットに対する高速高精度化の要求が高まっている。その要求を実現する有効な制御法の一つとして、繰り返し動作に基づいた学習制御法がある^{1)~10)}。学習制御法を実現する場合、メモリを利用するのでマイクロプロセッサを用いたデジタル制御系が適しており、離散時間系の性質を考慮した学習制御法を検討する必要がある。

離散時間システムの特徴としては、連続時間システムにはない零点が離散化によって新たに発生することがあげられる¹⁴⁾。特に連続時間システムの伝達関数の次数差が3以上の場合には、サンプル周期が短くなると不安定零点が生じ、適応制御や exact model matching などにおいては、不安定極と零点の相殺ができず問題となっ

ている¹⁰⁾。

離散時間学習制御系についてはこれまでもいくつかの設計法が提案されているが^{6),7)}、これらはいずれも制御対象のインパルスレスポンス系列に基づいた設計法であり、パルス伝達関数を用いてシステム論的に離散時間学習制御系の安定性を解析し、設計した例はない。

ロボットマニピュレータは本来、非線形システムであり、線形システムと仮定して得られるパルス伝達関数に基づいた解析結果が、マニピュレータに対してそのまま成り立つとは限らない。しかし、現在の産業用ロボットが比較的大きな減速比を有しており、通常のフィードバック系によってロボットマニピュレータの運動はあらかじめ目標軌道の近傍にあるので、線形近似系に対するパルス伝達関数を用いた解析によって、マニピュレータに対する離散時間学習制御系の安定性を議論できると考える。

そこで、本論文ではロボットマニピュレータの各関節

原稿受付 1989年7月25日

* 名古屋大学工学部

を1入力離散時間線形系とみなし、関節の位置信号のみを用いて学習を行う場合と、位置、速度信号を用いて学習を行う場合について離散時間学習制御系の安定性を検討する。以下、まず2章で本論文で必要となる離散時間学習制御系の周波数領域での学習安定条件について示す。入力数が出力数より多い場合は、文献2)の考え方を離散時間系の表現に書き直せばこの条件は容易に得られる。しかし、位置、速度信号を用いた学習（この場合、システムは1入力2出力系と見なせる）を議論する際にはこの条件では不十分である。そこで、この場合にも適用可能な学習安定条件を新たに導く。さらに、1入力2出力系に対して学習を行う場合に問題となる（サンプル周期が長いほど問題となる）出力の収束先について検討する。次に3章で、1入力1出力系の学習である関節の位置信号のみを用いた学習アルゴリズムを考え、システムの零点と学習の安定性について考察する。この場合、特にシステムが不安定零点を有すると、どのような学習アルゴリズムを用いても学習が不安定になることを明らかにする。そして4章で、関節の位置、速度信号を用いた学習アルゴリズムを検討し、出力数が2になることによって、システムが共通不安定零点を持たない限り安定な学習が可能であることを示す。最後に5章では、ロボットマニピュレータの軌道制御に離散時間学習制御法を適用し、ロボットマニピュレータのような非線形システムに対しても、2～4章で示される解析結果と同じシミュレーション結果が得られることを示す。

2. 離散時間学習制御系における学習安定条件

2.1 入力数が出力数より多い離散時間系に対する学習安定条件

本論文では、この節に限り m 入力 r 出力のシステム ($m \geq r$) を考えるが、2.2 節以降で扱うシステムはすべて1入力系である。

次式で表される m 入力 r 出力 ($m \geq r$) で可制御可観測な離散時間線形系を考える。

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z)$$

$$Y(z) : r \times 1, U(z) : m \times 1, G(z) : r \times m \quad (1)$$

ただし、 $G(z)$ はシステムのパルス伝達関数行列を表し、 $Y(z), U(z)$ はそれぞれシステムの出力及び入力の Z 変換を表す。

いま、Fig. 1 に示すような学習制御系を考える。Fig. 1 において、 $H(z)$ はパルス誤差修正関数行列を表す。このとき、各試行における入力 $U_{k+1}(z)$ は次式によって修正される。

$$U_{k+1}(z) = U_k(z) + H(z) \cdot E_k(z), \quad H(z) : m \times r \quad (2)$$

Fig. 1 Block diagram of learning control system

ただし、添え字 $k, k+1$ は試行回数を表し、 $E_k(z)$ は (3) 式で与えられる k 回目の試行における出力誤差信号の Z 変換である。

$$E_k(z) = Y_d(z) - Y_k(z) \quad (3)$$

ここで添え字 d は目標を表す。Fig. 1 の様な学習制御系を用いる場合、試行ごとの誤差の遷移は (4) 式で与えられる。

$$\begin{aligned} E_{k+1}(z) &= (I - G(z) \cdot H(z)) \cdot E_k(z) \\ &= S(z) \cdot E_k(z) \quad S(z) : r \times r \quad (4) \end{aligned}$$

(4) 式中の $S(z)$ を学習におけるパルス誤差遷移関数行列と呼ぶ。

連続時間学習制御系においても、(4) 式と同様な誤差遷移に関する式が導かれる (z を s に置き換えればよい)。川村らは、 $m=r$ という仮定のもとで、出力誤差が L_2 ノルムの意味で減少するための周波数領域での十分条件を示しているが²⁾、この条件は $m=r$ の場合にも適用可能である。それを参考に、この節では離散時間学習制御系において出力誤差が L_2 ノルムの意味で減少するための十分条件を示す。

出力誤差が L_2 ノルムの意味で減少することは、(5) 式を意味する。

$$\sum_{n=0}^{N-1} e_k^T(nT) \cdot e_{k+1}(nT) < \sum_{n=0}^{N-1} e_k^T(nT) \cdot e_k(nT) \quad (5)$$

ここで N はサンプル数であり、 $e_k(nT)$ は出上誤差系列を表す。また離散フーリエ変換における Parseval の等式より¹¹⁾

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} e_k^T(nT) \cdot e_k(nT) &= 1/N \sum_{n=0}^{N-1} E_k^H(e^{j2\pi n/N}) \cdot E_k(e^{j2\pi n/N}) \quad (6) \end{aligned}$$

となる。ただし、添え字 H は複素共役転置を表す。

(6) 式を用いて (5) 式を周波数領域における表現に直し、(4) 式を使って整理すると、学習安定条件は (7) 式となる。

$$I - S^H(e^{j2\pi n/N}) S(e^{j2\pi n/N}) > 0 \quad (n=0, 1, \dots, N-1) \quad (7)$$

ここで $\omega T = 2\pi n/N$ とおくと (7) 式より (8) 式を得る。

$$\sup_{0 < \omega < \omega_N} \{\lambda_{\max}(S^H(e^{j\omega T}) S(e^{j\omega T}))\}^{1/2} < 1 \quad (8)$$

ただし、 ω_N はナイキスト周波数である。(8)式の左辺は入出力安定性を議論する際によく用いられる $S(z)$ の L_2 ゲインを表しており¹²⁾、学習安定であるための十分条件は、言い換えると $S(z)$ の L_2 ゲインが1未満であることと言える。また、文献 2) には示されていないが、一般に L_2 ゲインは入出力間の伝達関数の H_∞ ノルムと等しい¹³⁾ので、(8)式の条件は次式のように書き改められる。

$$\|S(z)\|_\infty < 1 \quad (9)$$

$$(\|\cdot\|_\infty : H_\infty \text{ ノルム})$$

2.1 1入力2出力系に対する学習安定条件

2.1 節で示したように、 $m \geq r$ の場合には(8),(9)式つまり、パルス誤差遷移関数行列の H_∞ ノルムが1未満であることが学習安定であるための十分条件となる。しかし、ロボットマニピュレータの各関節において、DC モータへの印加電圧を入力とし、関節の位置と速度を出力とする場合、システムは1入力2出力系と見なせ $m < r$ となる。一般には、システムが右可逆でない場合 ($m < r$ の場合)、任意の目標出力を実現すること(漸近安定な学習制御系を実現すること)は不可能であるが⁹⁾、このような場合でも、最終的に出力誤差は残るものの安定に誤差を減少させる学習を実現すること(安定な学習制御系を実現すること)は可能である。特に、メカカルシステムにおける位置と速度のように、出力間に物理的に明確な従属関係があるならば、その従属関係を満たすように(つまり実現可能な)目標出力を与えることによって、出力誤差を零にできる(漸近安定な学習制御系を実現できる)。そこで、まずこの節では実現可能な目標出力が与えられた場合の1入力2出力系に対する学習安定条件を示し、次節で実現可能でない目標出力が与えられた場合の学習安定条件と出力の収束先について示す。なお、本論文では特に断わらない限り、行列およびベクトルは z に関する有理関数体上で考えるものとする。

Fig. 2 Convergence of error in output space

システムが1入力2出力系の場合、 $G(z) \cdot H(z)$ が特異行列となり、 $I - G(z) \cdot H(z)$ は少なくとも1つの固有値1を持つため、たとえ学習が安定であっても、(8),(9)式が成り立つことはない。つまり、(8),(9)式は学習の安定条件としては厳しすぎるのがわかる。そこで新たな安定条件が必要となるが、これは以下のように得られる。

1入力2出力のシステムを対象とする場合、(4)式の $S(z)$ は 2×2 行列、 $G(z)$ は 2×1 ベクトル、 $H(z)$ は 1×2 ベクトルとなる。この時、 $S(z)$ の固有値 $\lambda_1(z)$ 、 $\lambda_2(z)$ および、固有ベクトル $V_1(z)$ 、 $V_2(z)$ は(10)式で与えられる。

$$\lambda_1(z) = 1 - H(z) \cdot G(z), \quad V_1(z) = G(z)$$

$$\lambda_2(z) = 1, \quad V_2(z) \perp H^T(z) \quad (10)$$

いま、実現可能な目標出力が(11)式のように与えられるとき、

$$Y_d(z) = G(z) \cdot U_d(z) \quad (11)$$

k 回目の試行における出力誤差は(12)式で与えられる。

$$E_k(z) = Y_d(z) - Y_k(z)$$

$$= G(z) \cdot (U_d(z) - U_k(z)) \quad (12)$$

$U(z)$ がスカラであることを考慮すれば、(12)式より、 $E_k(z)$ と $G(z)$ とが常に平行であることがわかる。つまり、(7)式中の $S(z)$ を $E_k(z)$ から $E_{k+1}(z)$ への線形変換行列とみなしたときに、 $E_k(z)$ と $E_{k+1}(z)$ の方向はともに $V_1(z)$ の方向に限られている。従って、 $V_2(z)$ 方向に対する収束性は考慮する必要はなく、(4)式は(13)式のように書き改められる(Fig. 2)。

$$E_{k+1}(z) = S(z) \cdot E_k(z)$$

$$= \lambda_1(z) \cdot E_k(z) \quad (13)$$

これより学習安定条件は(14)式で与えられる。

$$\|\lambda_1(z)\|_\infty = \sup_{0 < \omega < \omega_N} |1 - H(e^{j\omega T}) \cdot G(e^{j\omega T})| < 1 \quad (14)$$

以上、実現可能な目標出力が与えられた場合の1入力

Fig. 3 Y_∞ and Y_d in the case of $Y_d(z) \neq G(z) \cdot U_d(z)$

2出力系に対する学習安定条件を導いたが、システムが1入出力系の場合は(8)式と(14)式が等価となることは明かである。

(14)式は(8)式の条件を緩めたものになっている。この様に条件が緩められたのは、(8)式は $E(z)$ が任意の方向を向くことのできる場合の条件式であるのに対し、実現可能な目標出力が与えられた1入力2出力系においては $E(z)$ の方向が限られているからである。

2.3 1入力2出力系に対する学習における出力の収束先

1入力2出力系に対する学習においては、2つの目標出力を同時に実現する入力が存在しない場合、つまり実現不可能な $Y_d(z)$ が与えられる場合がある。例えば、ロボットマニピュレータにおいて関節の位置と速度を学習する場合、 xy 平面上で目標軌道が与えられたときに、まずそれを座標変換して関節位置の目標サンプル列をつくる。次に、位置のサンプル列を差分して速度の目標サンプル列をつくるため、必ずしも正確な速度の目標サンプル列が得られない。この速度の目標サンプル列に含まれる誤差はサンプル周期が長いほど大きくなる。この場合、(11)式において、 $Y_d(z)$ と $G(z)$ ($=V_1(z)$)の方向がずれることになり(Fig. 3)、出力誤差は $V_2(z)$ 方向の成分も持つことになる。そこでこの節では、 $Y_d(z)$ と $V_1(z)$ の方向がずれることにより生じる出力誤差の $V_2(z)$ 方向の成分が、学習の安定性および出力の収束先に及ぼす影響について検討する。

まず安定性についてであるが、(10)式より、 $V_2(z)$ が $S(z)$ の固有値1に対する固有ベクトルであるため、 $V_2(z)$ 方向の出力誤差は何回 $S(z)$ をかけても(つまり何度学習しても)変わらない。従って、学習の安定性そのものは影響を受けないが(つまりこの場合でも、学習安定条件としては(14)式を用いればよい)、 $V_2(z)$ 方向の出力誤差は最終的に残るため、出力の収束先は目標出力と異なる。

次に、その出力の収束先について示す。いま、 $H^T(z)$ と $G(z)$ が直交していないとすると $V_1(z)$ 、 $V_2(z)$ は一次独立で、2次元出力空間を張る。従って、適当なスカラー $\alpha(z)$ 、 $\beta(z)$ を用いて $Y_d(z)$ は(15)式のように表現できる。

$$Y_d(z) = \alpha(z) \cdot V_1(z) + \beta(z) \cdot V_2(z) \quad (15)$$

このとき、出力誤差の収束先は(16)式で与えられ、

$$E_\infty(z) = \alpha(z) \cdot V_1(z) + \beta(z) \cdot V_2(z) - Y_\infty(z) \quad (16)$$

(4)式において $k \rightarrow \infty$ としたものに(16)式を代入して整理すると(17)式を得る。

$$G(z)H(z)(\alpha(z) \cdot V_1(z) + \beta(z) \cdot V_2(z) - Y_\infty(z)) = 0 \quad (17)$$

(10)式より $H(z) \cdot V_2(z) = 0$ だから、(17)式より出力の収束先 $Y_\infty(z)$ は次式で与えられることがわかる。

$$Y_\infty(z) = \alpha(z) \cdot V_1(z) \quad (18)$$

(18)式は $Y_\infty(z)$ が $Y_d(z)$ の $V_2(z)$ に沿っての $V_1(z)$ への射影で与えられることを意味しており、これは次のように書き直せる¹⁷⁾。

$$Y_\infty(z) = G(z) \cdot (H(z) \cdot G(z))^{-1} \cdot H(z) \cdot Y_d(z) \quad (19)$$

以上、実現可能でない目標出力が与えられた場合の1入力2出力系に対する学習の安定条件、および出力の収束先 $Y_\infty(z)$ について示した。

2.2, 2.3節で示したように、1入力2出力系に対する学習制御系を議論する際には学習の安定性のみならず、出力の収束先についても検討する必要がある。

なお、この考え方は、一般に連続時間系も含めて m 入力 r 出力システム($m < r$)の場合にも拡張できる⁹⁾が、ここでは紙面の都合上省略する。

3. 位置信号による学習

ロボットマニピュレータの軌道制御においては、学習に用いることのできる信号として位置信号と速度信号が考えられる。位置信号のみで学習を行う場合、システムを1入出力系と見なすことになる。1入出力系においては、連続時間系が最小位相系すなわち、不安定零点を持たない系であっても、離散化によってシステムが非最小位相系になり不安定零点を持つことがある。特に、連続時間系の伝達関数の次数差が3以上でサンプル周期が短いときには必ず不安定零点を持つ¹⁴⁾。そこでこの章では2章の結果を用いて、位置信号のみで学習を行う場合に、システムの零点が学習の安定性に及ぼす影響について検討する。

Fig. 4 Unstable zero z_0 and stable poles p_1

Fig. 5 Block diagram of control system for each joint of robotic manipulator

3.1 1入出力系における不安定零点と学習の安定性

この節では系が不安定零点を有する場合の学習の安定性について考察する。

1入出力離散時間システムのパルス伝達関数 $G(z)$, パルス誤差修正関数 $H(z)$ はともに安定であり ($G(z)$, $H(z)$ はともにスカラ), $G(z)$ は z に関する複素平面上で単位円外 $|z| \geq 1$ に不安定零点 z_0 を持つとする. $G(z)$, $H(z)$ の極が安定であれば, (10) 式の $\lambda_1(z)$ の極もすべて安定となり, それを p_i ($|p_i| < 1$ ($i=1, \dots$)) とする (Fig. 4). このとき $\lambda_1(z)$ は $|z| \geq 1$ で正則である. ここで, z 平面上での単位円外の零点 z_0 に着目すると, (20) 式を得る.

$$\lambda_1(z_0) = 1 - H(z_0) \cdot G(z_0) = 1 \quad (\because G(z_0) = 0) \quad (20)$$

複素関数論における最大絶対値の原理によれば $\lambda_1(z)$ が単位円外で正則であれば, $|\lambda_1(z)|$ の単位円外における最大値は必ずその境界, 即ち単位円上に存在する. また, (14) 式の左辺は z 平面における単位円上での $|\lambda_1(z)|$ の最大値を表しているので, (21) 式を得る.

$$\sup_{0 < \omega < \omega_N} |\lambda_1(e^{j\omega T})| \geq |\lambda_1(z_0)| = 1 \quad (21)$$

従って (21) 式より, $G(z)$ が不安定零点を持つ場合,

Table 1 D. C. M. constants

Link No.	Inertia J_a ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	Damping coefficient D_a ($\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$)	Electro-motive force coefficient K_e ($\text{V} \cdot \text{s/rad}$)	
1	4.61E-5	3.84E-3	0.188	
2	2.65E-5	1.39E-3	0.153	
Link No.	Torque constant K_t ($\text{N} \cdot \text{m/A}$)	Armature resistance R_a (Ω)	Armature inductance L_a (H)	Gear ratio N
1	0.188	10.0	6.3E-3	80
2	0.153	17.0	10.0E-3	60

学習安定のための十分条件 (14) 式は満たされないことがわかる。

以上より, 1入出力離散時間システムに対して学習制御をおこなう場合, システムに不安定零点が含まれていれば, (2) 式のような入力修正法を用いる限り, どの様に $H(z)$ を設計しても, 学習の安定性が保証されないことが明らかになった。

3.2 位置学習の安定性に関する数値例

いま, ロボットマニピュレータにおいて各関節ごとに制御系 (学習制御系も含めて) を構成する場合を考える. 一般に各関節の DC モータへの入力電圧から関節位置への伝達関数の次数差は, 電流マイナーループが理想的に働いている限り 2 となり, 離散化しても必ずしも不安定零点が生じるとは限らない. しかし, 例えばインダクタンスの無視できないモータを使用する場合や, 減速機の柔軟さを考慮する場合 (この場合, アームの回転角をどの様に検出するかが問題となるが, 本論文ではこれについては言及しない) は, 伝達関数の次数差が 3 以上になり, 離散化によって不安定零点が生ずる可能性が十分にある. この場合, 3.1 節の結果より, サンプル周期が短くなると位置信号のみで学習を行う場合, 学習の安定性が保証されないことになる。

ロボットマニピュレータの各関節の制御系のブロック

Table 2 Parameters of $G(z)$ and $H(z)$

T	b _a	b ₁	b ₂			
2ms	1.86×10 ⁻⁶	-2.05	-0.103			
12ms	9.19×10 ⁻⁵	-0.981	-0.00425			
30ms	4.68×10 ⁻⁴	-0.642	-4.81×10 ⁴			
T	c ₁	c ₂	c ₃			
2ms	0.865+0.149j	0.865-0.149j	0.0968			
12ms	0.546+0.449j	0.546-0.449j	0.0156			
30ms	0.279+0.511j	0.279-0.511j	0.00378			
T	d ₁	d ₂	e _a	e ₁		
2ms	0.475	0.807	9.19×10 ⁻⁶	-0.899		
12ms	0.0114	0.276	2.12×10 ⁻⁴	-0.536		
30ms	1.61×10 ⁻⁵	0.040	7.58×10 ⁻⁴	-0.250		
T	f _a	f ₁	g _a	g ₁	g ₂	g ₃
2ms	0.00230	-0.363	0.121	4.81×10 ⁴	115	-0.335
12ms	0.0146	-0.0409	0.287	7.64×10 ³	36.8	-0.247
30ms	0.0254	-0.00888	0.759	1.33×10 ³	31.6	-0.192

(a) Learning with position

(b) Learning with position and velocity

Fig. 6 $|1-HG|-\omega$ Plots

図を Fig. 5 に示す。サンプル周期 T で関節角 θ (位置) と角速度 $\dot{\theta}$ (速度) が検出できるものとし、制御系はフィードバックからなるサーボ系と、学習制御系から構成される。サーボ系としては位置と速度をフィードバックする一般的な制御系を用い、学習制御系としては、そのサーボ系に加える補償入力 v を試行ごとに修正するものを考える。これは、次式で与えられる u を試行ごとに修正することと等価である。

$$u(i) = K_p \cdot \theta_d(i) + K_v \cdot \dot{\theta}_d(i) + v(i) \quad (22)$$

この u を z 変換したものが Fig. 1 の $U(z)$ に相当する。

ここでは、ロボットマニピュレータの各関節をモータおよび慣性負荷で線形近似し、その線形モデルを用いて安定性の解析を行う。DC モータの各定数を Table 1 に示す。このとき、DC モータの電機子インダクタンスが無視できないとし、また、標準的なマニピュレータの慣性を考慮し、慣性をモータだけの慣性の 3 倍とすると、モータへの印加電圧から関節位置への線形近似伝達関数は次式で与えられる。

$$G_0(s) = \frac{b_0}{s(s-a_{01})(s-a_{02})} \quad (23)$$

ここで、 $b_0 = 2.70 \text{E}3$, $a_{01} = -54.2$, $a_{02} = -156$ である。このように DC モータの伝達関数は次数差が 3 となる。(23) 式をサンプル周期 T で離散化するとパルス伝達関数は次式で与えられる。

$$G_T(z) = \frac{b_0(z-b_1)(z-b_2)}{(z-1)(z-a_1)(z-a_2)} \quad (24)$$

ただし、 $a_1 = \exp(a_{01} \cdot T)$, $a_2 = \exp(a_{02} \cdot T)$ であり、その他の定数は (25) 式の定数と共に Table 2 に示す。Table 2 より、サンプル周期が 2ms と短い場合には、システムに不安定な零点が生ずることがわかる。また、位置と速度のフィードバックによって安定化したサーボ系のパルス伝達関数は次式で与えられる。

$$G(z) = \frac{b_0(z-b_1)(z-b_2)}{(z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)} \quad (25)$$

(24) 式と (25) 式を比べて、零点は状態フィードバックで変化しないことに注意されたい。ここで、学習の安定性を議論する際に、パルス誤差修正関数 $H(z)$ をどう選ぶかということは大きな問題となる。文献 8) では、学習制御の収束性を規定する本質的な要素はシステムの直達項であることが示されており、その観点からすると、 $H(z) \cdot G(z)$ の次数差が零となるような $H(z)$ が望ましい (この場合 $H(z)$ はプロバでなくなるが学習制御においては一回前の試行データを用いるのでこのような $H(z)$ でも実現可能となる)。連続時間学習制御系においては、逆システムに基づいた収束速度の速い学習制御法が提案されており (この手法の有効性も直達項の観点から説明できる)、 $G(z)$ の逆システムを $H(z)$ として用いれば収束速度は速いと考えられる。しかし、(25) 式のように不安定零点を持つシステムに対しては逆システムが不安定極を持つことになるので、それを用いることはできない。そこで、ここでは (23) 式において電機子インダクタンス無視した 2 次系モデルを考え、それを離散化し、その逆システムを $H(z)$ として用いることにする¹⁰⁾。この場合 $H(z)$ は次式で与えられる。ただし、各定数は Table 2 に示す。

$$H(z) = \frac{(z-d_1)(z-d_2)}{e_0(z-e_1)} \quad (26)$$

なお、(26) 式を導く際のモデルの慣性には、モータだけの慣性を用いた。このような $G(z), H(z)$ に対して、学習の安定性を解析した結果を Fig. 6(a) に示す。Fig. 6(a) は (14) 式における絶対値を縦軸に、周波数を横軸にとったものである。離散時間系の場合、ナイキスト周波数以上の周波数成分に対しては追従不可能であるので、各サンプル周期に対してそれぞれナイキスト周波数までプロットしてある。Fig. 6(a) を見るとサン

Fig. 7 SCARA robot of 2 d.o.f.

ル周期が短くなると高周波域において (14) 式が満たされなくなり、学習が不安定になることがわかる。また、サンプル周期が長く離散化システムに不安定零点がない場合には、学習は安定であることがわかる。これらの結果は、3.1 節で得られた解析結果と定性的に一致している。

3.3 連続時間系において次数差が 2 の場合の学習の安定性

電流マイナーループが理想的にはたらいっている場合や、減速機の柔軟さを無視できる場合は、DC モータへの入力電圧から関節位置への伝達関数の次数差は 2 となる。

(a) Learning with position

この場合、サンプル周期が短くても不安定零点は生じない。しかし、簡単な計算により、 $T \rightarrow 0$ とした時の極限零点は -1 であることがわかる。従って、サンプル周期が短い場合、 z 平面上の $z = -1$ 付近で $|1 - H(z) \cdot G(z)|$ の値が 1 に近づくことになるので、 $\omega = \omega_N$ 付近 (高周波域) で $|1 - H(e^{j\omega T}) \cdot G(e^{j\omega T})|$ の値は 1 に近づくことになる。その結果、高周波域で学習の安定性は劣化することがわかる (ただし、(14) 式を満たすような $H(z)$ は設計可能である)。

4. 速度学習付加による学習の安定化

3 章において、位置信号のみを用いて学習する場合、サンプル周期が短いと、システムの零点が原因で学習の安定性が劣化し、不安定零点の場合は学習が不安定となることを明らかにした。この章では、サンプル周期が短くても、速度信号の学習を付け加えることにより、学習の安定化が可能となることを示す。

4.1 速度学習付加による学習の安定化可能性

速度信号の学習を付け加えるということは出力数を 2 にすることを意味する。いま、 $r=2$ とすることによって、システムが共通な不安定零点を持たない 1 入力 2 出力離散時間システムになったとする (本論文ではシステムが可制御、可観測であると仮定しているの、これはシステムが不安定な不変零点を持たないことと等価となる)。このとき、システムのパルス伝達関数行列 $G(z)$ とパルス誤差修正関数行列 $H(z)$ は次式で与えられる。

(b) Learning with position and velocity

Fig. 8 Convergence of position error

$$G(z) = g_n(z) \cdot [g_1(z)g_2(z)]^T / d_g(z) \quad (27)$$

$$H(z) = [h_1(z)h_2(z)] / d_h(z) \quad (28)$$

ここで、

$g_n(z)$: $G(z)$ の共通な分子多項式

$g_1(z), g_2(z)$: $G(z)$ の互いに素な分子多項式

$d_g(z)$: $G(z)$ の分母多項式

$h_1(z), h_2(z)$: $H(z)$ の分子多項式

$d_h(z)$: $H(z)$ の分母多項式

である。ただし、 $G(z)$ が共通不安定零点を持たない場合を考えるので $g_n(z)$ は安定多項式である。

2.2 節で示したように、1 入力 2 出力系の場合学習の安定条件は (14) 式で与えられる。そこで、(27) 式のように $G(z)$ が与えられたとき (14) 式を満たすような安定な行列 $H(z)$ が構成可能なことを以下に示す。(27)、(28) 式を (10) 式へ代入すると (29) 式を得る。

$$\begin{aligned} \lambda_1(z) &= 1 - H(z) \cdot G(z) \\ &= 1 - g_n(z) \cdot [h_1(z) \cdot g_1(z) \\ &\quad + h_2(z) \cdot g_2(z)] / (d_h(z) \cdot d_g(z)) \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、 $g_1(z)$ と $g_2(z)$ が互いに素であり、このとき任意の多項式 $a(z)$ に対して (30) 式を満たす多項式 $h_1(z)$ 、 $h_2(z)$ が必ず存在する¹⁵⁾。

$$h_1(z) \cdot g_1(z) + h_2(z) \cdot g_2(z) = a(z) \quad (30)$$

(30) 式を用いると (29) 式は次式のように書き改められる。

$$\lambda_1(z) = 1 - g_n(z) \cdot a(z) / (d_h(z) \cdot d_g(z)) \quad (31)$$

従って、(30) 式右辺の $a(z)$ を式の $\lambda_1(z)$ が (14) 式を満たすような安定多項式に選べば、学習は安定となる。つまり、たとえ $g_1(z)$ と $g_2(z)$ が安定多項式でなくても、それらが互いに素であれば、(14) 式を満たす $\lambda_1(z)$ を与える $a(z)$ に対し、(30) 式より与えられる $h_1(z)$ 、 $h_2(z)$ を用いることによって安定な学習が実現できることになる。実際、位置と速度を出力とする場合、モータへの印加電圧から速度への伝達関数の次数差は 2 となり、しかも最小位相性が保存されるための十分条件¹⁴⁾を満たすので、離散化しても不安定零点は生じない。従って、 $G(z)$ が不安定な共通零点を持つことはない（安定な共通零点を持つ可能性はある）。以上より、位置・速度学習の場合は安定な学習が可能となる。3 章で考察した位置信号のみによる学習（1 入出力系に対する学習）は、(29) 式の $h_2(z)$ を 0 とするものであり、この場合 $H(z) \cdot G(z)$ の零点は、 $H(z)$ の零点と $G(z)$ の零点で与えられてしまう。これに対し、位置、速度信号による学習（1 入力 2 出力系に対する学習）では出力が 2 つあることによって、 $H(z) \cdot G(z)$ の零点を任意の位置に指定できるため、学習の安定化が可能になる。

Table 3 Constants of SCARA robot.

Link No.	Mass m(kg)	Inertia I(kg·m ²)	Link length L(m)	Link center of gravity k(m)
1	9.5	4.30E-2	0.25	0.20
2	5.0	6.10E-3	0.16	0.14

4.2 位置・速度学習の安定性に関する数値例

この節では、3.2 節で示した不安定な学習制御系（サンプル周期が短いとき）を、速度学習を付け加えることで安定化する例を示す。Fig. 5 の系を 2 出力としたときのサーボ系のパルス伝達関数行列は

$$G(z) = [G_1(z)G_2(z)]^T$$

ただし、 $G_1(z)$: (25) 式と同じ

$$G_2(z) = \frac{f_0(z-f_1)(z-1)}{(z-c_1)(z-c_2)(z-c_3)} \quad (32)$$

となる。ただし、各定数は Table 2 に示す。

(25) 式を得たのと同様に (C, A_m, B_m) を電機子インダクタンスを無視したときの DC モータのモデルとし、パルス誤差修正関数行列 $H(z)$ を次式で与えるものとする。

$$H(z) = B_m \cdot (z \cdot I - A_m) \cdot C^{-1} \quad (33)$$

ただし、 $B_m = (B_m^T \cdot B_m)^{-1} \cdot B_m^T$ である。

一般に 2 次系近似モデルのパルス伝達関数行列を (34) 式

$$G_m(z) = C \cdot (z \cdot I - A_m)^{-1} \cdot B_m \quad (34)$$

とすると、1 入力 2 出力系の場合、 $H(z) \cdot G_m(z) = 1$ を満たす $H(z)$ (つまり $G_m(z)$ の逆システム) は無数に存在する。これらの中で、(33) 式で与えられる $H(z)$ は (35) 式で示されるように非常に構成が容易となるので、これを用いることにする。

$$H(z) = [g_0 \cdot (z - g_1), g_2 \cdot (z - g_3)] \quad (35)$$

ただし、各定数は Table 2 に示す。

このとき、 $d_n(z) = 1$ であり、 $a(z)$ は安定となる。

3.2 節と同様に (14) 式中の絶対値を周波数に対してプロットしたものを Fig. 6(b) に示す。Fig. 6(b) を見ると、どのサンプル周期に対しても (14) 式の条件が満足されていることがわかる。これより、位置と速度を学習する場合には、 $G(z)$ が共通な不安定零点を持たないので、短いサンプル周期に対しても安定な学習が可能であることがわかる。

5. シミュレーション結果

この章では、Fig. 7 に示すような 2 自由度水平多関節形ロボットを制御対象とした時の学習安定性に関するシ

ミュレーション結果を示す (Fig. 8, ロボットの各定数は Table 3 に示す). Fig. 8 において縦軸は第1関節の位置誤差の積分値, 横軸は試行回数である. 第2関節は第1関節に比べて非線形性が弱いので, ここでは第1関節の結果のみを示す. 手先の目標軌道としては, Fig. 7 の座標系で中心が $x=0.20(\text{m})$, $y=0.20(\text{m})$, 半径が $r=0.10(\text{m})$ の円軌道 (角速度 10rad/s) を与えた.

5.1 位置信号による学習

位置学習の場合 ((26) 式の学習アルゴリズム) は, サンプル周期が短いときに一度収束した誤差が試行を繰り返すうちに発散し始めている (Fig. 8(a)). 3章で述べたように, このサンプル周期では高周波域において学習安定条件が満たされていない. 目標軌道にはせいぜい数十ヘルツの周波数成分しか含まれないため, はじめは誤差が減少するが, 学習を繰り返すにつれて誤差に高周波の成分が重畳し, それが発散の原因になっている.

5.2 位置・速度信号による学習

位置・速度学習の場合 ((35) 式の学習アルゴリズム) は3章の安定判別の結果のとおり, どのサンプル周期でも誤差が発散することはない (Fig. 8(b)). しかし, 注意しなければならないことは位置誤差の収束先が零でないということである. これは2.3節で述べたように, 位置と速度を学習する場合, $Y_d(z) = G(z) \cdot U_d(z)$ を満たす $U_d(z)$ が存在するように位置と速度両方の目標サンプル列を設定することは困難であることによるものである. また, 特にサンプル周期が長いほど $Y_d(z)$ と $G(z)$ のずれが大きくなるため, 誤差の収束先は大きな値となる.

6. ま と め

本論文ではロボットマニピュレータに対する離散時間学習制御系において位置信号のみを用いた学習と位置, 速度信号を用いた学習を考え, 学習の安定性について検討した. また, 位置と速度を用いた学習を考える際に必要となる1入力2出力系に対する学習制御系の安定条件, および出力の収束先を示した.

学習の安定性について検討した結果を以下にまとめる.

1. 位置信号のみを用いた学習においては, サンプル周期が短い場合に, DC モータのインダクタンスが無視できないとき学習が不安定になる. また, たとえインダクタンスが無視できたとしても高周波域での学習の安定性は非常に悪い. これは, 離散化によって生じるシステムの零点に起因するものである.
2. 位置, 速度信号を用いた学習においては, サンプル周期が短くても安定な学習が可能となる. これは,

$H(z) \cdot G(z)$ の零点を任意の位置に配置できるからである. ただし, 位置と速度の両目標を完全に実現することは困難で, 出力誤差は零にはならない. これは, サンプル周期が長い場合に問題となる.

従って, サンプル周期が短い場合は安定性を考慮して位置, 速度信号を用いた学習を行い, サンプル周期が長い場合は, 収束先を考慮して位置信号のみを用いた学習を行えば良いことがわかる.

なお今後の課題としては, 位置信号のみ, あるいは位置, 速度信号を用いた学習において, $G(z)$ のパラメータ変動に対してロバスト安定なパルス誤差修正関数行列 $H(z)$ を設計する問題が挙げられる.

謝 辞

本研究に対し貴重な御助言を賜った千葉大学美多勉先生に深く感謝致します.

参 考 文 献

- 1) 武田他: “線形近似逆システムに基づいたロボットの学習制御法”, 日本ロボット学会誌, 第5巻, 第2号, pp. 55-65, 1987.
- 2) 川村他: “学習制御方式のシステム論的考察”, 計測自動制御学会論文集, 第21巻, 第5号, pp. 23-28, 1985.
- 3) 古田他: “線形多変数システムに対する学習制御系設計”, 計測自動制御学会論文集, 第22巻, 第12号, pp. 6-13, 1986.
- 4) 美多他: “反復制御とロボットアームの軌道制御への応用”, 計測自動制御学会論文集, 第21巻, 第11号, pp. 87-94, 1985.
- 5) 鈴木他: “電流学習によるロボットアームの軌道制御”, 日本ロボット学会誌, 第7巻, 第3号, pp. 73-82, 1989.
- 6) 石原他: “離散時間繰返し制御系の一設計法”, 計測自動制御学会論文集, 第22巻, 第1号, pp. 43-49, 1986.
- 7) 川村他: “離散時間学習制御によるロボットの運動制御”, 第1回日本ロボット学会予稿集, pp. 181-182, 1983.
- 8) 杉江他: “学習制御に関する一考察”, システムと制御, 第13巻, 第2号, pp. 129-135, 1987.
- 9) 鈴木他: “入力数が出力数より少ない線形系に対する学習安定条件”, 第28回SICE学術講演会予稿集, pp. 179-180, 1989.
- 10) 安江他: “逆システムに基づくロボットの離散時間学習制御法”, 電気学会全国大会講演論文集 [12], pp. 37-38, 1989.
- 11) 木村: デジタル信号処理と制御, 昭晃堂
- 12) 平井他: 非線形制御システムの解析, オーム社
- 13) B. A. Francis et. al.: “Linear Control Theory with an H_∞ Optimality Criterion”, SIAM J. Control and Optimization, Vol.25, No.4, pp. 815-844, 1987.
- 14) K. J. Astrom et. al.: “Zeros of Sampled Systems”, Automatica, Vol.20, No.1, pp. 31-38, 1984.
- 15) W. Á. Wolovich: Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag, 1974.
- 16) D. W. Clarke: “Self-Tuning Control of Nonminimum-Phase Systems”, Automatica, Vol.20, No.5, pp. 501-517, 1984.
- 17) 柳井他: 射影行列・一般逆行列・特異値分解, 東京大学出版会