フレキシブル倒立振子の安定化制御

早瀬 敏幸* 末松 良一**

Control of Flexible Inverted Pendulum

Toshiyuki HAYASE Yoshikazu SUEMATSU

This study treats a particular control problem of an inverted pendulum with flexible structure. An inverted pendulum problem is a fundamental of stabilizing unstable systems such as a walking robot. Furthermore, consideration of the flexibility is essential for control of a light weight mechanical system with quick motion. A controlled system in this study consists of a wire-driven carrier, a flexible beam hinged to the carrier and a weight fixed at the other side of the beam. Linear quadratic control was applied to stabilize the system using a personal computer. However, steady vibration due to the coulomb friction was observed in the system. Characteristics of the nonlinear vibration were well explained by the analysis using the method of averaging. A simple recursive algorithm was employed to estimate the value of the Coulomb friction. With an on-line estimation and compensation of the Coulomb friction, linear quadratic control was successfully applied to stabilize the system.

Key Words : Inverted Pendulum, Flexible Beam, Nonlinear Vibration, Coulomb Friction, Method of Averaging.

1. 緒 言

倒立振子の安定化の問題は、2足歩行ロボット等の不安定系の制御の基礎として多くの研究がなされている^{1)~3)}。一方、最近の機械の高速化、軽量化の要請により、構成要素のフレキシビリティを考慮したより精密な制御が必要となっている。本研究は、フレキシブル部材で構成された不安定系の最も単純なモデルの一つとして、水平面上を一方方向に移動可能な台車と、その上に自由支持されたフレキシブルアーム、およびアーム先端に固定された物体よりなる系を対象とする (Fig. 1)。台車に加える力を入力として、最適レギュレータに基づく制御系を構成するとともに、クーロン摩擦に起因する非線形振動の解析と、その補償法について検討した。

フレキシブル倒立振子に関して、Schaefer ら⁴⁾は、台

車に自由支持されたフレキシブルビームの安定化の問題を扱った。モデルとして、1つの不安定実固有値と多数の純粋な振動モードよりなる系を考え、Bang-Bang 制

Fig. 1 Flexible inverted pendulum

原稿受付 1990 年 5 月 12 日

* 東北大学流体科学研究所

** 名古屋大学工学部

(a) Inverted pendulum

(b) Control system

Fig. 2 Experimental apparatus

御による系の安定化を理論と実験の両面から検討した。一方、従来の倒立振子の安定化制御の実験においては、多くの場合、機械系の可動部に存在するクーロン摩擦に起因する自励振動の発生がみられる²⁾。林ら³⁾は、倒立振子系における非線形持続振動を記述関数法により解析した。この非線形振動の抑制にはクーロン摩擦に相当する入力⁴⁾の補正が有効と考えられる。クーロン摩擦の推定法としては、清水ら⁵⁾によるカルマンフィルタを用いた方法などが提案されているが、まだ実際の系に適用された例は少ないようである。本研究では、クーロン摩擦に起因する非線形振動の特徴をシミュレーションと平均法による解析の両面から検討するとともに、実際のクーロン摩擦の値をオンラインで推定する簡便な方法を提案し、その有効性を実験的に検証する。

2. システムの構成

本研究の実験に用いたフレキシブル振子・台車系およびモータ駆動部と制御部の外観を Fig. 2 (a), (b) に示す。台車は、ワイヤを介してレール中央下のプーリに直結した DC モータによって駆動される。レール長は 1.5m である。フレキシブル・ビーム (240 mm×15 mm×1 mm パネ鋼製) の一端は台車に自由支持され、他端は比較的大きな慣性モーメントを持つ剛体 (アルミ管の両端に黄銅製のおもりを取り付けたもの) に固定されている。倒立振子支点部と、レールの一端に取り付けたロータリーエンコーダで、振子の傾き角 θ_0 と台車の位置 x を検出し、またフレキシブルビーム中央に取り付けたひずみゲージでフレキシブルビームのひずみを測定した。制御装置はマイクロコンピュータ (NEC 製 PC 9801 Vm) を用い、DC モータ (山洋電気製 U 5087, 80 W) の駆動回路およびインターフェイス部は自作した。

次に、上記実験装置の数学モデルについて簡単に述べる。各部の記号および諸元を Fig. 1 と Table 1 に示す。フレキシブルビームの質量は剛体部に比べて小さいとし

て無視する。また振子の傾き角 θ_0 とフレキシブルビームのたわみ角 θ_1 は微小量とする。以上の仮定下、システムの状態方程式は次の形で与えられる。

$$dX/dt = AX + Bu + Bf(X, u) \quad (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{63} & 0 & a_{65} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21} \\ 0 \\ b_{41} \\ 0 \\ b_{61} \end{bmatrix}$$

$$a_{25} = -2EI_2/m_0l^2$$

$$a_{43} = gLm_1(-3L/2 - l/2)/I_1l$$

$$a_{45} = -gm_1L(3L+l)/2I_1l \\ + EI_2(3L^2 + 4Ll + l^2)/I_1l^3 \\ + 3EI_2(m_0 + m_1)/l^3m_0m_1$$

$$a_{63} = 3gm_1L(L+l)/2I_1l$$

$$a_{65} = 3gm_1L(L+l)/2I_1l - 3EI_2(L+l)^2/I_1l^3 \\ - 3EI_2(m_0 + m_1)/l^3m_0m_1$$

$$b_{21} = 1/m_0$$

$$b_{41} = -3/2m_0l$$

$$b_{61} = 3/2m_0l$$

ここで、 E はフレキシブルビーム材の縦弾性係数、 I_2 はビームの断面二次モーメント、 m_0 、 m_1 は台車およびおりの質量、 l 、 $2L$ はフレキシブルビームおよびおりの長さである。 I_1 はおりの慣性モーメント、 g は重

Table 1 Parameter values of the experiment

Notations	Values
m_0	0.63 Kg
m_1	0.366 Kg
l	0.200 m
L	0.144 m
EI_2	0.390 Nm ²
I_1	0.0092 Kgm ²

力加速度を表す (Fig. 1 参照). また

$$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \\ = [x \ \dot{x} \ \theta_0 \ \theta_1]^T \quad (2)$$

は状態ベクトルであり, $f(X, u)$ は台車とレールの間に作用する摩擦力で次式で表されるものとする.

$$f(X, u) = \begin{cases} \alpha \dot{x} + \beta \operatorname{sgn}(\dot{x}) & \dot{x} \neq 0 \\ -u & \dot{x} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式 (1) で非線形項 $f(X, u)$ を除いたシステムは可制御であり, また出力を

$$Y = [1 \ 0 \ 1 \ 0]X \quad (4)$$

と定めれば可観測となることは容易に確かめることができる. 以下では, 時間, 長さ, 角度および力の基準値をそれぞれ (0.1 sec, 1m, 0.2 rad, 100 N) として無次元化して表す. システム行列 A の固有値は

$$0 \text{ (重根)}, \pm 4.97i, \pm 0.38$$

であり, 不安定モードと振動モードが共存していることがわかる. 評価関数

$$J = \int_0^\infty \{Y(t)^T Q Y(t) + u(t)^T R u(t)\} dt$$

において

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad R = 10$$

(a) Experiment

として最適レギュレータを構成すると, ゲイン行列として $K = [0.1 \ 1.6 \ 0.133 \ 0.26 \ 0.0361 \ 0.16]$ が得られる. 状態フィードバックを行ったレギュレータ

$$dX/dt = (A - BK)X \quad (5)$$

の極は

$$-0.734 \pm 5.01i, -0.851 \pm 0.919i, \\ -7.093 \pm 0.064i$$

である.

3. 実験結果および考察

3.1 クーロン摩擦に起因する非線形振動

前節で設計した最適レギュレータを用いて実験を行った. 状態変数の内 (x, θ_0, θ_1) はサンプリングタイム 10 msec で直接測定し, それらの微分値は前回の測定値との差をとることにより求めた. 実験の初期値は $x = 0.1$ (10 cm) で, 他の変数は全て 0 に設定した. Fig. 3 (a) に実験結果を示す. 図は, 出力 (x, θ_0, θ_1) および入力 u の時間変化を示したものである. 非線形系に特有な弛緩振動が生じている. この原因は, 制御対象のクーロン摩擦を無視して制御系を設計したためと考えられる. そこで, 実験装置のレールと台車の間にクーロン摩擦が存在するとしてシミュレーションを行った. 結果を Fig. 3 (b) に示す. 振動の周期に若干の差異が認めら

(b) Simulation

Fig. 3 Time variation of the output and control input for the case that the Coulomb friction is ignored

れるものの、定性的には実験結果と同一の弛緩振動が現れている。レールと台車の間のクーロン摩擦は、その大きさが特定できれば入力 u を調節することにより補償できる。台車を一定速度で駆動したときのトルクの測定値より摩擦特性を調べた結果を Fig. 4 に示す。図より本実験系の摩擦特性は、近似的に次式で表される。[式(3)は $\dot{x}=0$ のとき f は u の関数となることを示すが、ここでは $\dot{x}=0$ の場合を無視する]

$$f(X, u) = \alpha \dot{x} + \beta \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 5.52 \times 10^{-2} \\ \beta = 6.12 \times 10^{-3} \end{array} \right. \quad (6)$$

式(6)の摩擦力を打ち消すよう入力を補正して実験を行った結果を Fig. 5 (a) に、また摩擦がない場合のシミュレーション結果を Fig. 5 (b) に示す。クーロン摩擦を補償しない場合にみられた弛緩振動は消え、系が安定化されていることがわかる。上記のように、クーロン摩擦に相当する入力の補正を行えば線形理論に基づく制御系の設計が有効なことが確認されたが、クーロン摩擦の値は一定ではなく動作環境等により変動する。摩擦の補償が過大な場合の実験とシミュレーションの結果を Fig. 6 に示す。摩擦を補償しない場合に比べて周期の短い振動が現れているのがわかる。

従来、クーロン摩擦に起因する非線形振動の解析には、

Fig. 4 Measurement of the friction force as a function of velocity

記述関数法¹⁾、平均法⁶⁾などが用いられている。ここでは平均法による解析を行い、実験で観測された弛緩振動がある程度定量的にも予測できることを示す。一般に、非線形振動は高次の周波数成分を持つが、1周期間のエネルギーバランスを各 Fourier 成分について考える。 (x, θ_0, θ_1) の最低次のモードを次式のようにおく

(a) Experiment

(b) Simulation

Fig. 5 Time variation of the output and control input for the case that the Coulomb friction is well compensated

(a) Experiment (b) Simulation
Fig. 6 Time variation of the output and control input for the case that Coulomb friction is overestimated

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \sin(\omega t + \phi_1) \\ \delta_2 \sin(\omega t + \phi_2) \\ \delta_3 \sin(\omega t + \phi_3) \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで δ_i, ϕ_i ($i=1, 2, 3$) は定数である。つぎにクーロン摩擦の式(6)に上の x を代入し, Fourier 級数展開すれば対応する項は次式となる。

$$f = 4\beta \cos(\omega t + \phi_1)/\pi \quad (8)$$

上式を基礎方程式に代入すれば, 振動数 ω が次の6次代数方程式の根として求まる。

$$\begin{aligned} & \omega^6 + (\bar{a}_{21} + \bar{a}_{43} + \bar{a}_{65})\omega^4 \\ & + (\bar{a}_{21}\bar{a}_{43} + \bar{a}_{43}\bar{a}_{65} + \bar{a}_{65}\bar{a}_{21} - \bar{a}_{25}\bar{a}_{61} - \bar{a}_{23}\bar{a}_{41} - \bar{a}_{45}\bar{a}_{63})\omega^2 \\ & + \bar{a}_{21}\bar{a}_{43}\bar{a}_{65} + \bar{a}_{23}\bar{a}_{45}\bar{a}_{61} + \bar{a}_{25}\bar{a}_{41}\bar{a}_{63} \\ & - \bar{a}_{21}\bar{a}_{45}\bar{a}_{63} - \bar{a}_{23}\bar{a}_{41}\bar{a}_{65} - \bar{a}_{25}\bar{a}_{43}\bar{a}_{61} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ここで

$$\bar{a}_{ij} = (A + BK)_{ij}$$

Table 2 Frequency of the stable limit cycles.
 Comparison between the analysis and the simulation

Coulomb friction	Method of averaging	Simulation
$\beta > 0$	0.09	0.06
$\beta < 0$	1.28	1.12

である。

また振幅 δ_i と位相 ϕ_i は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 4b_{21}\{\bar{a}_{25}(\omega^2 + \bar{a}_{43}) - \bar{a}_{23}\bar{a}_{45}\}\beta/n \\ \delta_2 &= 4b_{21}\{\bar{a}_{45}(\omega^2 + \bar{a}_{21}) - \bar{a}_{25}\bar{a}_{41}\}\beta/n \\ \delta_3 &= -4b_{21}\{(\omega^2 + \bar{a}_{21})(\omega^2 + \bar{a}_{43}) - \bar{a}_{23}\bar{a}_{41}\}\beta/n \\ \phi_1 &= \phi_2 = \phi_3 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで

$$\begin{aligned} n &= \pi\omega\{\bar{a}_{26}(\omega^2 + \bar{a}_{21})(\omega^2 + \bar{a}_{43}) \\ & - \bar{a}_{24}\bar{a}_{45}(\omega^2 + \bar{a}_{21}) - \bar{a}_{22}\bar{a}_{25}(\omega^2 + \bar{a}_{43})^2 \\ & + \bar{a}_{22}\bar{a}_{23}\bar{a}_{45} + \bar{a}_{24}\bar{a}_{25}\bar{a}_{41} - \bar{a}_{23}\bar{a}_{26}\bar{a}_{41} \end{aligned}$$

である。式(9)より3組の振動数 ω の値が得られるが, その内2つの解が安定なリミットサイクルを表すことが周期解の安定判別からわかる。安定な周期解の振動数に関して平均法の結果とシミュレーションの結果との比較を **Table 2** に示す。表で $\beta < 0$ の場合はクーロン摩擦を過大に補正した場合に対応する。また x, θ_0, θ_1 の振動の振幅の比較を **Fig. 7** に示す。Table 2 および **Fig. 7** の結果は, クーロン摩擦の大きさは発生する持続振動の振幅にのみ影響を及ぼし, その振動数, 安定性には影響を与えないことを示すと同時に, 平均法による解析の結果は, シミュレーションの結果をある程度定量的にも説明し得ることを示している。

Fig. 7 Amplitude of the nonlinear vibration as a function of the Coulomb friction. Comparison between the analytical result and the result of simulation

3.2 クーロン摩擦の推定アルゴリズム

前節までの検討により、倒立振子系に発生する非線形振動は、クーロン摩擦を打ち消すよう入力を補正することにより有効に抑制できることが明らかとなった。この際、クーロン摩擦力の値を正確に推定することが必要となるが、この値は作動条件等により変動する。そこで、クーロン摩擦の値をオンラインで推定するアルゴリズム

Fig. 8 Experimental result with the recursive estimation of the friction force

が必要となる。クーロン摩擦の推定にカルマンフィルタを用いる手法⁷⁾がすでに提案されているが、ここではCPUの負担をできる限り軽減する意味から、以下の簡便なアルゴリズムを用い、その有効性を実験とシミュレーションで検討する。

台車の変位に関する運動方程式は式(1)より

$$\ddot{x} = a_{23}\theta_1 + b_{21}u_r \quad (11)$$

ここで、 u_r は摩擦の影響を含め実際に台車に作用する入力を表す。 θ_1 と $\ddot{x}$ の値が知れば、上式より u_r の値がわかる。従って、 u の計算値と u_r の差をとれば、これが摩擦力の推定値となる。この際、 $\dot{x}$ 、 $\ddot{x}$ の値は差分式により求めるが、一般に差分による微分近似は比較的大きな誤差を含むことが知られている。そこで、摩擦力の推定を次の重み付き平均のリカーシブアルゴリズムにより算出する⁷⁾。

$$\begin{cases} d(k+1) = wd(k) + 1 \\ m(k+1) = m(k) - \{m(k) - s(k+1)\} / d(k+1) \end{cases} \quad (12)$$

$$d(0) = 0, \quad m(0) = 0$$

ここで $s(k)$, $m(k)$ はそれぞれ k 時点でのサンプル値

Fig. 9 Result of the simulation in which the friction force is increased from 0.01 N to 0.05 N during the period from $T=120$ to 360

および平均値である。 w ($0 \leq w \leq 1$) は重みで、 $w=1$ とすれば通常の平均となり、その値が小さいほど過去のデータの影響が小さくなる。本アルゴリズムを用いた実験結果を Fig. 8 に示す。この実験では、式 (6) の摩擦特性をより一般化し、各パラメータの値が運動方向に依存するとした。

$$f(X) = \begin{cases} \alpha_+ \dot{x} - \beta_+ & \dot{x} > 0 \\ \alpha_- \dot{x} + \beta_- & \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (13)$$

α_+ と α_- の値は式 (6) で与えられる値に固定し、 β_+ および β_- の値をオンラインで推定した。 $\beta_{\pm}$ の初期値はともに 0 とし、重み $w=0.98$ とした場合、 β の値は $t=5$ ではば一定値 (0.005) に収束する。倒立振子系の制御結果は良好で、非線形振動も抑制されていることがわかる。

次に、系のクーロン摩擦の値が制御途中に急変する場合について、シミュレーションを行い検討した。

Fig. 9 は $t=120-360$ においてクーロン摩擦が 0.01 N から 0.05 N に変動した場合、上記リカーシブアルゴリズムによる摩擦補償を行った結果である。摩擦力が急変した時点でわずかな変動をともなうものの、制御結果は良好で、この制御方法が変動する摩擦力の補償に有効であることがわかる。

4. 結 論

以上、フレキシブル倒立振子の安定化の問題を実験と理論の両面から検討し、以下の結論を得た。

(1) 可動部に必然的に存在するクーロン摩擦は、振り台車系に弛緩振動を引き起こす。その周期は、制御系の固有振動数にはば一致し、振幅はクーロン摩擦力の大きさとともに増大する。

(2) 上記弛緩振動の基本的な特徴は、平均法による解析である程度定量的にも予測できる。

(3) クーロン摩擦を補償することにより、線形理論に基づく制御を有効に用いることができる。クーロン摩擦の推定にリカーシブアルゴリズムを用いる方法を提案し、その有効性を実験とシミュレーションで確認した。クーロン摩擦の推定には、本研究で用いた方法の他にもカルマンフィルタを用いる方法などが提案されている。計算時間と推定精度を含めたこれらの相対的な評価、および推定アルゴリズムを含む系全体の安定性の検討などが今後の課題と考える。

参 考 文 献

- 1) 林, 嘉納, 増淵: “倒立振子の姿勢制御”, 計測自動制御学会論文集, Vol.13-5, pp.425-432, 1977
- 2) 杉江, 井上, 木村: “結合倒立振子の安定化制御”, 計測自動制御学会論文集, Vol.14-5, pp.591-597, 1978
- 3) 梶原, 小菅, 古田: “傾斜されたレール上の二重倒立振子の位置制御”, 計測自動制御学会論文集, Vol.15-7, pp.873-879, 1979
- 4) J.F. Schaefer and R.H. Cannon, Jr.: “Continuous Linear Systems on and Control of Unstable Mechanical Systems”, Proceeding of IFAC Conference, pp.6C1-6C13, 1966
- 5) 清水, 猪岡: “カルマンフィルタによる固体摩擦の推定 (第1報)”, 日本機械学会論文集 (C編), Vol.53-496, pp.2608-2612, 1987
- 6) 高野, 原, 張: “自由振動系の摩擦による振動 (第1報)”, 日本機械学会論文集 (C編), Vol.53-496, pp.2484-2490, 1987
- 7) 高橋: “ディジタル制御”, 岩波書店。