ON A NEW METHOD CONNECTING LOGIC
AND GEOMETRIC REASONING

論理と空間幾何学的推論の接点となる新手法

(Received 9, August 1989)

(Accepted 14, September 1989)

Mitsuru ISHIZUKA

Institute of Industrial Science, Univ. of Tokyo

7-22-1, Roppongi, Minato-ku, Tokyo, 106, Japan

Tel.03-402-6231 ext.2651 Fax.03-402-5078

This article introduces a new interesting method for geometric reasoning in the area of artificial intelligence. This method is called Wu's method, which can automatically prove geometric problems by manipulating algebraic formulae. The reasoning process is similar in a sense to logic which is important as a foundation of symbolic reasoning in artificial intelligence. The Wu's method may provide us a foundation for manipulating spatial geometric information, as logic for symbol manipulation.

Keywords: artificial intelligence, geometric reasoning, computer vision

1. はじめに

筆者の研究テーマは人工知能と画像理解である。高度で知的な情報処理システムの基礎としての人工知能手法の特徴は、知識を記号で表現し、それを推論、探索という形で操作することによって答えを導くことである。人工知能の知識の表現、推論の基礎として論理の果たす役割は非常に大きい。

古代ギリシャのアリストテレス等により、誤りのない思考法の形式化として始まった論理は、19世紀にフレイゲ等により数学の分野として発展した。1965年にロビンソンにより導出原理という効率的な推論法が発見されて以来、コンピュータ科学の面でも広く利用されるようになった。1982年に始まった我が国の第5世代コンピュータ開発プロジェクトは論理に基づくアプローチを採っている。論理に基づくプログラミング言語であるPrologも普及してきている。

論理の良い点は知識表現、推論の形式が厳密であり、正しい答えなら必ず導ける（証明できる）といった推論法が与えられていることである。ところが、出発点である知識は記号化したものでなければ扱えない。我々は空間に生活しており、空間内の位置や幾何学的関係に關す

る知識も多いが、これは論理的推論や人工知能手法ではそのまま扱えなかった。ところが最近、空間幾何学の世界における推論も、論理と類似性のある形式の整った手法が発見された。画像や3次元物体といった空間情報の処理も研究テーマにしている筆者にとっては、大変興味ある手法である。この論理と空間幾何学的推論の接点としての役割を果たすであろうWuの手法と呼ばれる方法について紹介しようと思う。

2. Wuの代数的推論法

人工知能の分野でも以前から幾何学の証明問題は研究の対象になってきた。しかし、それはヒューリスティックス（経験的知識）を使い、証明のためにどのようにうまい補助線を見い出すかといった内容であり、とても自動的証明というものではなかった。

中国の数学者であるW-T. Wuは、1978年に幾何学の問題を代数式で表現し、自動的に証明する手法を提示した¹⁾。このWuの手法が西欧諸国に知られたのは1984年のことである¹⁾。ここでは文献²⁾に基づき、例を挙げて説明することにする。

Fig.1 A geometric problem.

Fig. 1 の様に平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とすると、 $|AO| = |CO|$ であることを機械的に証明することを考える。

Fig. 1 のように各点の座標を定める。(座標値に u と x の記号を使い分けている理由は後出。) 問題の前提を代数的に表現すると次のようになる。

$$\begin{aligned} f_1: (X_1 - U_3)(U_5 - U_1) - (X_2 - U_2)(U_6 - U_4) &= 0 \\ &\{A \text{ と } C \text{ D は平行}\} \\ f_2: (X_1 - U_6)(U_2 - U_1) - (X_2 - U_5)(U_3 - U_4) &= 0 \\ &\{A \text{ D と } B \text{ C は平行}\} \\ f_3: (X_1 - U_4)(X_3 - U_1) - (X_2 - U_1)(X_4 - U_4) &= 0 \\ &\{O \text{ は } B \text{ D 上}\} \\ f_4: (U_3 - U_6)(X_3 - U_5) - (U_2 - U_5)(X_4 - U_6) &= 0 \\ &\{O \text{ は } A \text{ C 上}\} \end{aligned}$$

証明すべき結論は、

$$g: (X_3 - U_5)^2 + (X_4 - U_6)^2 - (U_2 - X_3)^2 - (U_3 - X_4)^2 = 0 \\ \{ |AO| = |CO| \}$$

である。簡単化のために一般性を失わず、 A は原点 ($U_5=0, U_6=0$)、 B を X 軸上 ($U_4=0$) とすると、次のようになる。

$$\begin{aligned} f_1: -U_1X_1 + U_1U_3 &= 0 \\ f_2: -U_3X_2 + U_2X_1 - U_1X_1 &= 0 \\ f_3: (U_1 - X_2)X_4 + X_1X_3 - U_1X_1 &= 0 \\ f_4: -U_2X_4 + U_3X_3 &= 0 \\ g: 2U_3X_4 + 2U_2X_3 - U_2^2 - U_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

ここで問題は $f_1 \sim f_4$ から g を証明する。すなわち論理的に表すと

$$\{f_1, f_2, f_3, f_4\} \vdash g$$

となる。この意味的な解釈は $f_1 \sim f_4$ のすべてを真とするモデル (Fig. 2 の斜線部) は g を真とするかどうか確かめる。すなわち Fig. 2 のように g が斜線部を包含するような関係にあるかどうか確かめることになる。

Fig.2 Semantic interpretation.

代数的除算で証明を行うのだが、その前に $f_1 \sim f_4$ を 3 角形式 (triangular form) にする。(Fig. 1 では $X_1 \sim X_4$ が独立に値を定められる独立変数で $U_1 \sim U_4$ は $X_1 \sim X_4$ が定まると従属して定まる従属変数である。) ここでの例では f_3 が新変数 X_3, X_4 を含むので 3 角形式ではない。そこでこの X_4 を f_4 より $X_4 = (U_3/U_2) * X_3$ を代入して消去する。その結果、次の 3 角形式に変換する。

$$\begin{aligned} f_1: -U_1X_1 + U_1U_3 &= 0 \\ f_2: -U_3X_2 + U_2X_1 - U_1X_1 &= 0 \\ f_3: (U_3X_2 - U_2X_1 - U_1U_3)X_3 + U_1U_2X_1 &= 0 \\ f_4: -U_2X_4 + U_3X_3 &= 0 \end{aligned}$$

そして、

$$g: 2U_3X_4 + 2U_2X_3 - U_2^2 - U_3^2 (=0)$$

を次のように $f_4, f_3, \dots$ の順に割っていく。

g を (X_4 に関して) f_4 で割ると、

$$-U_2g = 2U_3f_4 + R_4$$

ここで、 $R_4 = -2U_3^2X_3 - 2U_2^2X_3 + U_2U_3^2 + U_2^3$

R_4 を (X_3 に関して) f_3 で割る。

$$(U_3X_2 - U_2X_1 - U_1U_3)R_4 = (-2U_2^2 - 2U_3^2)f_3 + R_3$$

ここで、

$$\begin{aligned} R_3 &= U_2X_3^3X_2 + U_2^3U_3X_2 - U_2^2U_3^2X_1 + 2U_1U_2U_3^2X_1 \\ &\quad - U_2^4X_1 + 2U_1U_2^3X_1 - U_1U_2U_3^3 - U_1U_2^3U_3 \end{aligned}$$

R_3 を (X_2 に関して) f_2 で割る。

$$-U_3R_3 = (U_2U_3^3 + U_2^3U_3)f_2 + R_2$$

ここで、

$$\begin{aligned} R_2 &= -U_1U_2U_3^3X_1 - U_1U_2^3U_3X_1 + U_1U_2U_4^4 \\ &\quad + U_1U_2^3U_3^2 \end{aligned}$$

R_2 を(X_1 に関して) f_1 で割る。

$$-U_1 R_2 = (-U_1 U_2 U_3^3 - U_1 U_2^3 U_3) f_1 + R$$

ここで、 $R = 0$ となる。

$R = 0$ は g が $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ から証明されたことを意味する。論理的に述べると g は $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ の定理(Theory)となる。

その理由は次のように説明される。

$$c_1 = -U_1, \quad c_2 = -U_3,$$

$$c_3 = U_3 X_2 - U_2 X_1 - U_1 U_3, \quad c_4 = -U_2$$

とすると、

$$c_1 c_2 c_3 c_4 g = A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3 + A_4 f_4 + R$$

ここで、 $A_1 \sim A_4$: 多項式

$R = 0$ だと、前提より $c_i \neq 0$ ($i = 1 \sim 4$)ならば、

$f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0, f_4 = 0$ なので、 $g = 0$ となる。

$c_i \neq 0$ は補助条件(subsidiary condition)であり、特異点的な退化した状況(degenerate case)を除外することを意味する。例えば、

$$c_1 = -U_1 = 0 \text{ は } AD \text{ と } BC \text{ が同じ線上、}$$

$$c_2 = -U_3 = 0 \text{ は } AB \text{ と } CD \text{ が同じ線上、}$$

$$c_3 = U_3 X_2 - U_2 X_1 - U_1 U_3 = 0 \text{ は } AC \text{ と } BD \text{ が}$$

平行 ($U_1 = 0, U_3 = 0$ のとき生じる)

$$c_4 = -U_2 = 0 \text{ は } C \text{ が } Y \text{ 軸上}$$

例示のために式が多出したが、原理は明解であり、以上まとめるとWuの手法は次のようになる。

前提を次の3角形式で表す。

$$f_1(U_1, \dots, U_d, X_1) = 0$$

$$f_2(U_1, \dots, U_d, X_1, X_2) = 0$$

.

.

.

$$f_r(U_1, \dots, U_d, X_1, \dots, X_r) = 0$$

ここで、 $X_1, \dots, X_r$: 独立変数

$U_1, \dots, U_d$: 従属変数

証明すべき結論を

$$g(U_1, \dots, U_d, X_1, \dots, X_r) = 0$$

と表す。

g を $f_r, f_{r-1}, \dots, f_1$ で順次割り算し、最後の剰余項を R とする。すなわち、

$$c_1 c_2 \dots c_r g = A_1 f_1 + \dots + A_r f_r + R$$

$c_1, \dots, c_r$: 多項式

$A_1, \dots, A_r$: 多項式

$R = 0$ で $c_i \neq 0$ ($i = 1 \dots r$)なら前提から結論($g = 0$)が機械的に証明されたことになる。

煩雑になる多項式の除算にはMACSYMA等の数式処理プログラムを連動して使うことになる。また実用的な観点では何を独立変数に選ぶかも重要な要素になる。

3. あとがき

幾何学の推論問題を代数方程式に変換して自動的に証明するWuの手法について紹介した。筆者は論理的推論と空間に関する推論をつなぐものとして大変興味をもっている。今後どのように発展するかは十分には予測できないが、米国では幾つか論文を見るようになり、我が国では東大工学系大学院Drコースで伊庭君が研究を行っている3)。

最近、北京のAcademia Sinicaからの研究者と話す機会があったが、同機関に所属するWuは長くトポロジーについて研究していた数学者であり、現在、年は70歳ほどとのことである。また、ここで引用した文献2)のChouはWuの弟子であり、Wuが米国テキサス大学のBledsoe(定理証明で著名)のところへ送った研究者であり、現在はこの分野の研究を進めているGE研究所に所属している。

論理的推論は整数計画法との関連等も次第に明かになり、他の工学の手法と深層で広く関連しているようである。

References

- 1) W-T. Wu : On the Decision Problem and the Mechanization of Theorem-Proving in Elementary Geometry, Scientia Sinica Vol.21, No.2, 1978, also Contemporary Mathematics, Vol.29, pp.213-234, 1984
- 2) S-C. Chou : Proving Elementary Geometry Theorems Using Wu's Algorithm, Contemporary Mathematics, Vol.29 pp.243-286, 1984
- 3) H. Iba, H. Inoue : Geometric Reasoning based on Algebraic Method -- Application of Wu's method to geometric reasoning (in Japanese), Tec. Report of Japanese Soc. of AI, SIG-FAI-8901-3, 1989.