縦平均流速算定式の精度について

正員 春日屋 伸 昌*

ON THE ACCURACY OF THE CALCULATING FORMULAS
FOR THE VERTICAL MEAN VELOCITY

by Nobumasa Kasugaya, C.E. Member

Synopsis :

The author, at first, theoretically argues about the accuracy of the calculating formulas for the vertical mean velocity, connecting them with the various theories with respect to the vertical velocity distribution in an open channel. Then, applying those formulas to the data obtained in the River Tone, he concludes that it is desirable to adopt the two-point method or the three-point new one, which is introduced by the mean value theorem, in the ordinary condition, and the four-point new method at the place where the flow is exceedingly turbulent. Among the formulas having prevailed up to this time, the three-point method and the four-point one except the two-point one are not valuable at all.

要 旨 本論文では、まず、開水路の垂直流速曲線に関する諸説と関連させて縦平均流速算定式の精度について論じ、次に、利根川の実測値を基としてこれらを検討し、以上の結果から、普通には2点法か平均値3点法を、流れが極端に乱れているところでは平均値4点法を用いるべきで、従来の諸式のうち、3点法、4点法は全く無価値であることを結論する。

1. ま え が き

筆者は Gauss の平均値法を用い、縦平均流速算定式として、次の諸式を導いた¹⁾。

$$2 \text{ 点法: } v_m = (v_{0.211} + v_{0.789})/2 \doteq (v_{0.2} + v_{0.8})/2 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{平均値 } 3 \text{ 点法: } v_m = \{5(v_{0.113} + v_{0.887}) + 8 v_{0.500}\}/18 \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{平均値 } 4 \text{ 点法: } v_m = 0.174(v_{0.069} + v_{0.931}) + 0.326(v_{0.330} + v_{0.670}) \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 v_m は垂直線にそつての縦平均流速、 $v_{0.211}$ は水表面から水深の2割1分1厘の点での流速を表わし、他も同様である。(1)式は従来の2点法と同じもので垂直流速曲線の次数が高々3次までは誤差をとまわらない(今までは2次式まで誤差をとまわらないと考えられていた)。(2)式および(3)式は従来の3点法および4点法の公式とは異なつたもので、これらを従来の公式と区別するため、こんご平均値3点法および平均値4点法とよぶこととしよう。これらの公式は垂直流速曲線の次数がそれぞれ高々5次および7次のときに誤差をとまわなことが証明される。

さて、従来の縦平均流速算定式のうち、3点法と4点法とは次のとおりである(2点法は上の(1)式である)。

$$3 \text{ 点法: } v_m = (v_{0.2} + 2 v_{0.6} + v_{0.8})/4 \dots\dots\dots (4)$$

$$4 \text{ 点法: } v_m = \{(3/2)v_{0.2} + v_{0.4} + v_{0.6} + (5/4)v_{0.8}\}/5 \dots\dots\dots (5)$$

このほか、水表面から水深の6割の点での流速をもつて縦平均流速とする1点法や垂直流速曲線法などがある。

本論文では、まず、垂直流速曲線式に関する従来の諸説を考察しつつ種々な縦平均流速算定式との関連性について解説し、次に利根川における実測例に適用してこれら算定式の精度を検討し、最後に、従来の算定式に含まれている定係数を理論的に修正すれば精度が改善されることに言及する。

2. 垂直流速曲線式に関する諸説と縦平均流速算定式との関連性

縦平均流速算定式が垂直流速曲線の形状と密接な関係のあることはいうまでもない。開水路における垂直流速曲線の形状についての実験的または理論的研究は古くより種々おこなわれ、多くの垂直流速曲線式が与えられた^{2)~6)}。古くは Du Buat の直線式、Woltmann や Eytelwein の、流速0の点に頂点をもち垂直線を軸とする放物線式がある。また、Funk は対数曲線で、Gerstner は楕円曲線で、Weisbach や Lahmeyer は直線で表わされ、ると主張した。Darcy-Bazin は表面に水平軸を有する放物線式を実験結果から誘導し、Harder は最大流速の生

* 中央大学助教授、工学部土木工学教室

じる位置で共通接線をもつ2つの楕円曲線を用い、Lipke は最大流速の生じる位置より上は楕円下は放物線とし、Kozeny は楕円分布を提唱した。また、Humphreys-Abbot は Mississippi 河での実測結果より水表面下に最大流速を有する2次放物線式を発表した。これに対し、Hagen は実験式として鉛直軸をもち頂点を床上に有する放物線式を主張し、Jasmund は鉛直軸を有する対数曲線式を仮定し Elbe 河における実測の結果と一致することを確かめた。そのほか、Kaplan や Lavale の指数公式がある。

日本では、速水頌一郎教授⁷⁾が Gebelein の2平行板内の乱れの下半分を開水路に用いた理論式を示され、安芸峻一教授⁸⁾は渦動粘性係数を深さに無関係な定数と仮定して、最大流速の位置の割合 α 、水深 h 、水面勾配 I 、Chézy の係数 C を含む2次式を誘導され、久宝保教授⁹⁾は最大流速の位置において乱れの混合距離を一定としたこの位置の上下において流速分布を対称であると仮定して、 α, h, I および粗度係数 n を含む逆双曲正弦曲線式を導かれた。

筆者は、次に述べるように、最大流速の位置の割合 α 、表面流速と縦平均流速との比 k および縦平均流速 v_m を含む2次式を解析的に誘導した。すなわち、図-1に示すように、開水路の等流において流れの方向に x 軸を深さにそつて z 軸をとり、流れの中に幅が単位長さの微小体 $\delta x \delta z$ を考える。 z 点での乱れによるせん断力を τ とし、 x 方向の力の釣合を考えると、上下流面に垂直に働く力 $p \delta z$ は相殺されるから、けつきよく、次の式が成り立つ。

$$\tau \delta x - \left\{ \tau + \left(\partial \tau / \partial z \right) \delta z \right\} \delta x + w_0 \delta x \delta z \cdot I = 0 \quad \cdots \cdots (a)$$

ここに、 w_0 は水の単位容積の重量、 I は水面勾配である。上の式から、

$$\partial \tau / \partial z = w_0 I \quad \cdots \cdots (b)$$

がえられるから、これを z に関して1度積分すれば、積分定数を c として、

$$\tau = w_0 I z + c \quad \cdots \cdots (c)$$

ここで、河底 $z=h$ におけるせん断力を τ_0 とすれば、

$$c = \tau_0 - w_0 I h \quad \cdots \cdots (d)$$

これを (c) 式に入れば、

$$\tau = w_0 I (z - h) + \tau_0 \quad \cdots \cdots (e)$$

さて、乱れによるせん断力 τ は、渦動粘性係数を ϵ とすると、 ρ を水の密度として、

$$\tau = -\rho \epsilon (dv/dz) \quad \cdots \cdots (f)$$

で表わされるから、この関係を (e) 式に入れると、 g を重力加速度として、

$$\epsilon (dv/dz) = g I (h - z) - (\tau_0 / \rho) \quad \cdots \cdots (g)$$

いま、最大流速の位置の割合 α を考える。この α の値は、最大流速が水表面またはそれ以下において実際に生じているときには $\alpha \geq 0$ であるが、そうでないときには $\alpha < 0$ である。すなわち、 α は数学的にいうならば横座標 v が極大となる点の z 座標の値を水深 h で割つたものである。このような α の値を用いると、 $z = \alpha h$ において $dv/dz = 0$ であるから、(g) 式より、

$$\tau_0 / \rho = g h I (1 - \alpha) \quad \cdots \cdots (h)$$

ゆえに、摩擦速度を v_* とすると、開水路においては、

$$v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho} = \sqrt{g h I (1 - \alpha)} \quad \cdots \cdots (i)$$

摩擦速度を $v_* = \sqrt{g h I}$ とするのは、 $\alpha = 0$ すなわち最大流速が水表面において生じているときであつて、一般には (i) 式のように表わされる。

さて、(h) 式を (g) 式に入れると、次の式がえられる。

$$\epsilon (dv/dz) = g h I \{ \alpha - (z/h) \} \quad \cdots \cdots (j)$$

(j) 式を解くためには、 ϵ が z のどのような函数で表わされるかを知らなければならないが、この理論的な函数形は目下のところ不明というほかはない。Boussinesq はこれを深さに無関係な定数であるといい、Krey は深さにつれて放物線的に変化すると述べているが¹⁰⁾、Kozeny¹¹⁾は Donau 河の実測値から、大体において、 ϵ は流速の減少函数で $\epsilon = K / \{ \alpha - (z/h) \}$ で表わされると主張した。ここに、 K は河底粗度や河底流速によつて変わるが z には無関係な定数であり、 α は1より大きい定数である。このように、 ϵ の函数形はいろいろと議論のあるところであるから、いま、一般に z の函数として (j) 式を z に関して積分すると、

$$v = ghI \left(\alpha \int_{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dz - \frac{1}{h} \int_{\varepsilon} \frac{z}{\varepsilon} dz \right) \dots\dots\dots (k)$$

(k) 式より明らかなように、 ε を Boussinesq などのように定数と仮定すれば垂直流速曲線は2次式となり、Kozeny の式を採用すれば3次式となる。いま、 ε を定数と仮定する場合の垂直流速曲線式を誘導しよう。(k) 式より、 c を積分定数として、

$$v = (ghI/\varepsilon) \{ \alpha z - (z^2/2h) \} + c \dots\dots\dots (l)$$

表面流速を v_s とすれば、 $c = v_s$ となるから (l) 式は、

$$v = v_s + (ghI/\varepsilon) \{ \alpha z - (z^2/2h) \} \dots\dots\dots (m)$$

ここで、縦平均流速 v_m を導入すると、

$$v_m = \frac{1}{h} \int_0^h v dz = v_s + \frac{gI}{\varepsilon} \left(\frac{\alpha h^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) = v_s - \frac{gI}{6\varepsilon} (1-3\alpha) h^2 \dots\dots\dots (n)$$

ゆえに、(n) 式より渦動粘性係数 ε は、

$$\varepsilon = gI(1-3\alpha)h^2/[6(v_s-v_m)] \dots\dots\dots (o)$$

(o) 式を (m) 式に入れて ε を消去すると容易に次の式がえられる。

$$v = (v_m/p) \{ pk + 2\alpha(z/h) - (z/h)^2 \} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 k は表面流速 v_s と縦平均流速 v_m との比 ($k = v_s/v_m$) であり、 p は、 $p = (1-3\alpha)/[3(k-1)]$ である。

さて、(6) 式は垂直流速曲線が軸が水平な2次放物線であると仮定して誘導した従来の諸公式のすべてを含むものである。例えば、Bazin の公式¹²⁾、

$$v = v_s - 24(z/h)^2 \sqrt{hI} = v_m + \{8 - 24(z/h)^2\} \sqrt{hI}$$

は (6) 式において $\alpha=0$ 、 $k=1+(8/C)$ (C は Chèzy の流速係数で、 $v_m = C\sqrt{hI}$) においてえられる特別な場合である。 $\alpha=0$ は放物線の軸が水表面に存在するとの仮定であり、後者の関係は $C=30\sim50$ とすることによつて $k=1.16\sim1.27$ となることを示す。

Boussinesq の公式¹³⁾、

$$v = v_m [1 + (a/3C) \{ (1/3) - (z/h)^2 \}] \quad (a: \text{定数})$$

は (6) 式において $\alpha=0$ 、 $p=3C/a$ においてえられる。後者の式より $k=1+a/(9C)$ となるから (Bazin の公式は $a=72$ としたもの)、 $a/C=0.8\sim2.7$ ($a=40\sim80$ 、 $C=30\sim50$) とすることによつて $k=1.10\sim1.30$ となる。

Humphreys-Abbot の公式¹⁴⁾、

$$v = v_{\max} - (0.28 v_m / \sqrt{h+0.46})^{0.5} \{ (z-z_0)/h \}^2$$

($v_{\max}$: 最大流速、 z_0 : 最大流速の生じている点の深さ)

は (6) 式において $p = (\sqrt{h+0.46} v_m / 0.28)^{0.5}$ においてえられる。なぜならば、Humphreys-Abbot の公式において $z_0/h = \alpha$ とおけば、

$$v = v_{\max} - (0.28 v_m / \sqrt{h+0.46})^{0.5} \alpha^2 + 2\alpha (0.28 v_m / \sqrt{h+0.46})^{0.5} (z/h) - (0.28 v_m / \sqrt{h+0.46})^{0.5} (z/h)^2$$

これと (6) 式とを比較して、

$$k = (v_{\max}/v_m) - \{0.28/(\sqrt{h+0.46} v_m)\}^{0.5} \alpha^2$$

$$p = (\sqrt{h+0.46} v_m / 0.28)^{0.5}$$

がえられるが、前者の関係は後者の関係が成立していれば当然成り立つことが次のようにして証明される。すなわち、後者の関係を前者に入れれば、 $k = (v_{\max}/v_m) - (\alpha^2/p)$ となり、また、(6) 式において $z/h = \alpha$ とおけば、 $v_{\max}/v_m = (pk + \alpha^2)/p$ がえられるからである。

安芸教授の公式¹⁵⁾、

$$v = \{C + (20/3) - 20\alpha + 40\alpha(z/h) - 20(z/h)^2\} \sqrt{hI}$$

は (6) 式において $p=20/C$ においてえられる。すなわち、 $k=1+\{(1-3\alpha)C/60\}$ である。安芸教授は $\alpha=0.0\sim0.3$ と考えておられるから、 $C=30\sim50$ とすれば $k=1.08\sim1.83$ となる。

以上のように、Bazin, Boussinesq, Humphreys-Abbot, 安芸教授の諸公式はすべて (6) 式の特別な場合であることが明らかとなった。すなわち、(6) 式における2つのパラメーター k と α とを適当に規定することによつていずれかの公式がえられるのである。筆者はこのパラメーターに影響を及ぼす因子を、河底粗度、水深、水面勾配、水面幅、風向と風速であると考えて、これらとの相関性を統計的に求めて、 α と k とが種々な条件のもと

において最大の確率をもつて生じるときの値を求めた^{16), 17)}。

さて、垂直流速曲線の解析的な理論はしばらくおいて、縦平均流速の測定という問題に限るならば、2点法の公式は3次式まで誤差をとまなわなから、 ε に関する Boussinesq や Kozeny の異論に関係なく正確な縦平均流速を求めることができる。

もし、Krey のように ε を深さにそつての放物線式で表わすと、垂直流速曲線は対数曲線となる。そのほか ε が z に関する他の函数形をとる場合には、(k) 式の右辺の積分は z の有理整式とならないのが一般であるが、(j) 式より明らかなように、 $1/\varepsilon$ が z のとりうる区間 $[0, h]$ 内のすべての点において正則であるならば、(i) の微分方程式の解もすべての点で正則となるから、(i) 式は次の形の級数解をもつ。

$$v = C_0 + C_1(z/h) + C_2(z/h)^2 + C_3(z/h)^3 + \dots$$

したがって、この場合にも $(z/h)^4$ 以上の項を省略すれば2点法を用いて、また $(z/h)^6$ 以上の項を省略すれば平均値3点法を用いて、それぞれ縦平均流速の近似値を求めることができる。

次に、垂直流速曲線に関する対数曲線式について触れておこう。

Prandtl および Kármán による運動量輸送理論から円管内の流速分布曲線が誘導され、実験結果ときわめてよく一致した。M.P.O'Brien, G.H. Keulegan その他の人々によつてこの公式の開水路への拡張が試みられたが、V.A. Vanoni¹⁸⁾ もその1人で、これを幅 2.77 ft, 深さ 0.59 ft の矩形水路の中央での流速分布にあてはめてよい一致を示したと述べ、2割と8割との流速の平均が6割の点での流速にほぼ一致することにより対数曲線説を支持している。円管内での流速分布を水路に拡張した式は¹⁹⁾,

$$v = v_{\max} + (v_*/\kappa) \ln\{1 - (z/h)\} \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 κ は普遍定数で円管に対しては $\kappa \div 0.40$ であるが、E.H. Taylor²⁰⁾ は開水路に関する Bazin の実験値に照合させて、 κ は開水路の形状によつて異なることを認め、採用した実験例の範囲では $\kappa = 0.22 \sim 0.43$ であつたと述べている。

(7) 式では、 v は水表面に近づくにつれて大きくなり、最大流速は水表面において生じることを仮定している。ところで、 $0 \leq z/h < 1$ であるから、(7) 式の右辺の自然対数は z/h のべき級数に展開され、縦平均流速の測定において、2点法および平均値3点法を用いれば、展開式のそれぞれ $(z/h)^4$ および $(z/h)^6$ 以上の項を省略したときの近似値を求めることとなる。この場合の誤差はそれぞれ次のようになる。

(7) 式における縦平均流速 v_m は、

$$v_m = \frac{1}{h} \int_0^h v dz = v_{\max} + \frac{v_*}{\kappa h} \int_0^h \ln\left(1 - \frac{z}{h}\right) dz = v_{\max} - \frac{v_*}{\kappa} \dots \dots \dots (p)$$

(p) 式を (7) 式に入れることにより、縦平均流速の位置の割合は 0.632 となることがわかる。

さて、2点法および平均値3点法における観測点の正確な位置 z_1, z_2 および z_1, z_2, z_3 は、それぞれ次のとおりである²¹⁾。

$$2 \text{ 点法: } z_1/h = (1 - \sqrt{1/3})/2 \div 0.211, \quad z_2/h = (1 + \sqrt{1/3})/2 \div 0.789$$

$$\text{平均値 3 点法: } z_1/h = (1 - \sqrt{3/5})/2 \div 0.113, \quad z_2/h = 1/2 = 0.500,$$

$$z_3/h = (1 + \sqrt{3/5})/2 \div 0.887$$

そこで、2点法において、観測点 z_1, z_2 における流速をそれぞれ v_1, v_2 とすると、

$$v_1 = v_{\max} + (v_*/\kappa) \ln\{(1 + \sqrt{1/3})/2\}, \quad v_2 = v_{\max} + (v_*/\kappa) \ln\{(1 - \sqrt{1/3})/2\}$$

ゆえに、(1) 式の右辺の値は、

$$(v_1 + v_2)/2 = v_{\max} + (1/2)(v_*/\kappa) \ln\{(1/4) - (1/12)\} = v_{\max} - 0.89588(v_*/\kappa) \dots \dots \dots (q)$$

したがって、このときの誤差 E_2 は、

$$E_2 = \{(v_1 + v_2)/2\} - v_m = 0.10412(v_*/\kappa) \dots \dots \dots (8)$$

平均値3点法においては、上と同じ記号を用いると、

$$v_1 = v_{\max} + (v_*/\kappa) \ln\{(1 + \sqrt{3/5})/2\}, \quad v_2 = v_{\max} + (v_*/\kappa) \ln(1/2),$$

$$v_3 = v_{\max} + (v_*/\kappa) \ln\{(1 - \sqrt{3/5})/2\}$$

ゆえに、(2) 式の右辺の値は、

$$\begin{aligned} \{5(v_1 + v_3) + 8v_2\}/18 &= v_{\max} + (5/18)(v_*/\kappa) \ln\{(1/4) - (3/20)\} (1/2)^{5/6} \\ &= v_{\max} - 0.94768(v_*/\kappa) \dots \dots \dots (r) \end{aligned}$$

したがって、このときの誤差 E_3 は、

$$E_3 = \{[5(v_1 + v_3) + 8v_2]/18\} - v_m = 0.05232(v_*/\kappa) \dots \dots \dots (9)$$

$$\therefore E_3/E_2=0.50$$

もし、従来の3点法の(4)式を用いれば、誤差 E'_3 は、

$$E'_3=0.08371(v_{*}/\kappa) \dots\dots\dots (10)$$

$$\therefore E_3/E'_3=0.62$$

すなわち、垂直流速分布が対数曲線で表わされるならば、2点法、3点法、平均値3点法の誤差はいずれも正となり、しかも平均値3点法の誤差は2点法のその半分、3点法のその約6割に過ぎない。この結論は、対数曲線式の定数項を A [(7)式では $v_{\max}$] および対数項の定数係数を B [(7)式では v_{*}/κ] とするとき、 A, B がどのようなパラメーターを含んでいても全く同じであることは上の計算過程から明らかである。

現在、開水路の垂直流速曲線式については、水表面下ある位置に水平軸をもつた2次放物線説と鉛直軸をもつた対数曲線説とがその主流をなしているといわれる²²⁾。対数曲線説は、その起源より考えて、底面に近い部分においては実情に即しているが、水表面にまでこれを拡張することは、最大流速が水表面よりも下方に生じている自然河川の実情から考えても無理なように思われる。しかし、最大流速の位置の割合 α は、実験水路のように水面幅がきわめて狭く水深が浅くしかも粗度を大きくしたような場合には、負の値をとるものである。すなわち、実験水路における垂直流速分布はしばしば対数曲線に近似する。このような場合には2点法の半分の誤差しかもたない平均値3点法が特に有効であろう。2次放物線説が自然河川の流れの中央部において最もよく適合することは、すでに筆者も述べたとおりである²³⁾。もとより、垂直流速分布が2次放物線であるというのは平均的なものであつて、実際の分布はもつと次数の高い曲線であると考える方が、流速測定の場合には殊に安全である。そこで、次には実例について、縦平均流速算定式の精度について検討してみよう。

3. 平均値法公式と従来の公式との精度の比較

まず、自然河川の中央部にあつて流れが整正な場合につき、従来の縦平均流速算定式すなわち1点法、2点法、3点法、4点法と平均値3点法との精度を比較するため、次の資料を使用する。

昭和28年10月より昭和30年1月に至る間、関東地方建設局利根川上流工事々務所が栗橋地先の低水流量測定箇所において実測した全資料より20個を抽出し、1つの資料より1本の垂直流速曲線をとる。選ばれる垂直流速曲線は、河川の中央部に位して両岸からの2次流の影響をなるべく受けず、水深が1.00m以上のものとする。流速分布は20~30cm間隔の垂直流速曲線法によつて定められ、観測流速は1cm/sec単位で与えられている。諸公式に必要な観測点での流速は垂直流速曲線のグラフ上より読みとられる(5mm/sec単位)。計算の結果を表一1に示す。表中の α は最大流速の位置の割合、 β は縦平均流速の位置の割合を表わし、縦平均流速 v_m の値は垂直流速曲線法によつて求めた値(垂直流速曲線と縦軸と水表面および河底とで囲まれた面積を方眼紙上より求めて水深 h で割る)であり、諸公式による計算値の下のカッコ中の値は、上の v_m に対する各計算値の誤差を百分率で示したものである。表中の修正3点法、修正4点法については後で述べる。

表一1より明らかなように、1点法における誤差の絶対値の最大は5.7%、誤差の絶対値が1.0%を越す例は14例である。2点法ではこれらの値はそれぞれ2.9%および4例、3点法では4.3%および7例、4点法では3.3%および15例である。平均値3点法においては、誤差の絶対値の最大は1.4%(資料番号8)であつて他の19例の誤差はその絶対値がすべて1.0%より小さく、このうち5例では全く誤差が認められなかつた。このように、従来の諸公式の中では(1点法を除く)、2点法の精度が最もよく、3点法がこれにつぎ、4点法は最も劣る。平均値3点法は2点法の半分以下の誤差しかもたず、最も優れていることがわかる。

上の20例は、垂直流速曲線の形状が2次放物線に近似していると思われる資料についてのものであつた。しかし、相当乱れた分布を示す曲線については、諸公式の優劣は異なつた結果を示すかも知れない。一体、従来の3点法は、河底が非常に粗いか水草に覆われるかして流速分布が乱れていると考えられる場合に適用されるべく考案されたもので、このような場合には分布を2次式と考へて誘導した2点法では8割の点での流速が特に乱れているため適用できず、6割の点での1点法もこのような乱れのために適用しえないと考えて、これら2つの方法の結果の算術平均をもつて縦平均流速としようとするものである²⁴⁾。

極端に乱れた流速分布に対して諸公式の精度を検討するため、杭打水制間での実測資料を用いる。これは昭和27年12月17日および18日に、関東地方建設局利根川上流工事々務所が樋ノ口地先の杭打水制(末口15cm、長さ6m)間において垂直流速曲線法(観測点間隔は30cm)を用いて流速分布と縦平均流速とを求めたものである。杭は2列(間隔は3m)に打たれ、列中で隣りあう杭間の距離は1mである。流速測定は列間の中心線にそい50cm間隔でおこなわれた。観測流速は1mm/secまで求められ、流速分布は図-2に示すように相当な乱れを呈している。表-2は従来の諸公式と平均値3点法および平均値4点法とによる計算値とその誤差とを

図-2

表—1

資料 番号	測 定 年月日	水深 h (m)	α	β	縦平均流 速 v_m (m/sec)	1 点法	2 点法	3 点法	4 点法	平均値 3 点法	修正 3 点法	修正 4 点法
1	28.10.18	2.05	0.244	0.663	0.672	0.710 (+5.7%)	0.670 (-0.3%)	0.690 (+2.7%)	0.668 (-0.6%)	0.671 (-0.1%)	0.676 (+0.6%)	0.675 (+0.4%)
2	28.10.27	1.85	0.189	0.605	0.719	0.720 (+0.1%)	0.718 (-0.1%)	0.719 (±0.0%)	0.706 (-1.8%)	0.720 (+0.1%)	0.721 (+0.3%)	0.721 (+0.3%)
3	28.11.12	1.35	0.237	0.600	0.669	0.670 (+0.1%)	0.665 (-0.4%)	0.668 (-0.1%)	0.651 (-2.7%)	0.669 (±0.0%)	0.668 (-0.1%)	0.668 (-0.1%)
4	28.11.27	1.75	0.200	0.623	0.547	0.555 (+1.5%)	0.552 (+0.9%)	0.554 (+1.3%)	0.543 (-1.1%)	0.550 (+0.5%)	0.555 (+1.5%)	0.555 (+1.5%)
5	28.12.17	1.40	0.314	0.636	0.644	0.660 (+2.5%)	0.642 (-0.3%)	0.651 (+1.1%)	0.632 (-1.9%)	0.643 (-0.2%)	0.646 (+0.3%)	0.646 (+0.3%)
6	29. 1.22	1.00	0.220	0.600	0.770	0.770 (±0.0%)	0.775 (+0.6%)	0.772 (+0.3%)	0.760 (-1.3%)	0.770 (±0.0%)	0.778 (+1.0%)	0.779 (+1.2%)
7	29. 2.20	1.05	0.267	0.667	0.728	0.740 (+1.6%)	0.725 (-0.4%)	0.732 (+0.5%)	0.703 (-3.0%)	0.728 (±0.0%)	0.730 (+0.3%)	0.728 (±0.0%)
8	29. 3.10	2.25	0.267	0.618	0.762	0.770 (+1.0%)	0.755 (-0.9%)	0.762 (±0.0%)	0.756 (-0.8%)	0.751 (-1.4%)	0.760 (-0.3%)	0.762 (±0.0%)
9	29. 3.19	1.05	0.286	0.657	0.692	0.720 (+4.0%)	0.685 (-1.0%)	0.702 (+4.3%)	0.680 (-1.7%)	0.689 (-0.4%)	0.691 (-0.1%)	0.690 (-0.3%)
10	29. 4.28	1.85	0.270	0.638	0.753	0.780 (+3.6%)	0.758 (+0.7%)	0.769 (+2.1%)	0.752 (-0.1%)	0.749 (-0.3%)	0.763 (+1.3%)	0.763 (+1.3%)
11	29. 5.17	2.15	0.302	0.651	0.678	0.710 (+4.7%)	0.698 (+2.9%)	0.704 (+3.8%)	0.687 (+1.3%)	0.682 (+0.6%)	0.701 (+3.4%)	0.701 (+3.4%)
12	29. 5.28	1.50	0.200	0.607	0.742	0.740 (-0.3%)	0.750 (+1.1%)	0.745 (+0.4%)	0.730 (-1.6%)	0.743 (+0.1%)	0.752 (+1.3%)	0.752 (+1.3%)
13	29. 8. 7	1.55	0.245	0.626	0.734	0.740 (+0.8%)	0.735 (+0.1%)	0.738 (+0.5%)	0.721 (-1.8%)	0.730 (-0.5%)	0.738 (+0.5%)	0.739 (+0.7%)
14	29. 8.26	1.55	0.194	0.574	0.687	0.670 (-2.5%)	0.695 (+1.2%)	0.682 (-0.7%)	0.686 (-0.1%)	0.687 (±0.0%)	0.698 (+1.3%)	0.698 (+1.3%)
15	29.10.14	1.80	0.289	0.633	0.761	0.780 (+2.5%)	0.755 (-0.8%)	0.768 (+0.9%)	0.750 (-1.4%)	0.765 (+0.4%)	0.760 (-0.1%)	0.761 (±0.0%)
16	29.10.30	1.20	0.300	0.658	0.819	0.850 (+3.8%)	0.815 (-0.5%)	0.832 (+1.6%)	0.809 (-1.2%)	0.819 (±0.0%)	0.821 (+0.2%)	0.821 (+0.2%)
17	29.12. 4	1.55	0.129	0.587	0.679	0.670 (-1.3%)	0.678 (-0.1%)	0.674 (-0.7%)	0.662 (-2.5%)	0.682 (+0.4%)	0.680 (+0.1%)	0.680 (+0.1%)
18	29.12.22	1.15	0.235	0.652	0.696	0.710 (+2.0%)	0.695 (-0.2%)	0.702 (+0.9%)	0.680 (-2.3%)	0.698 (+0.3%)	0.698 (+0.3%)	0.698 (+0.3%)
19	30. 1.13	1.10	0.164	0.591	0.704	0.700 (-0.6%)	0.705 (+0.1%)	0.702 (-0.3%)	0.681 (-3.3%)	0.705 (+0.1%)	0.706 (+0.3%)	0.707 (+0.4%)
20	30. 1.25	1.05	0.190	0.581	0.671	0.660 (-1.6%)	0.675 (+0.6%)	0.668 (-0.4%)	0.674 (+0.4%)	0.672 (+0.1%)	0.676 (+0.7%)	0.677 (+0.9%)
誤 差 の 相 加 平 均 $\bar{E}$						+1.4%	+0.2%	+0.9%	-1.4%	-0.0%	+0.6%	+0.7%
誤 差 の 絶 対 値 の 相 加 平 均 $ \bar{E} $						2.0%	0.7%	1.1%	1.5%	0.3%	0.7%	0.7%

示したものである。表—2 の結果が示すように、極端に乱れた流速分布に対しては2点法は最も大きな誤差を与え、3点法、4点法は少なからず改良された値を与えるが、いずれも適用しうるほど正確ではない。平均値3点法でもこの場合には不十分で平均値4点法を用いれば誤差の絶対値の平均は2.0%以下となる。

表—1 および 表—2 は自然河川における実際の流速分布の両極端を示したもので、これらの結果から次のことが結論される。従来の諸公式では2点法が最もよく、3点法、4点法は流速分布が乱れ2点法が相当な誤差を呈するにつれて幾分よい結果を与えるようであるが、到底正確な公式ということではできない。平均値3点法は普通程度の乱れに対しても十分安全に使用しうる最も優れた方法である。しかし、密に打たれた杭打水制問のように極端な乱れがある場合には平均値4点法を使用する方が安全である。

われわれは、流量測定に際してなるべく少ない観測点で正確な値をうるものでなければならない。多くの観測点をとればとるほど正確な値がえられると思うのは誤りである。なぜならば、観測時間中の水位の変動（したがって、流量の変化）による影響を小さくするために各観測点での測定時間を短くすれば、流れの脈動によつて各点での正確な流速がえられず、これを長くして脈動の影響を免れようとすると全観測時間が延長されて水位の変動が影響するようになる。ゆえに、流量測定における課題は、全観測点数をできるだけ少なくして各観測点での測定時間をできるだけ長く（3分以上が望ましい）することである²⁵⁾。本論文では垂直線にそつての縦平均流速したがって水面幅にそつての単位幅当りの流量を最少の観測点数でなるべく正確に測定する方法を述べたのである。水面幅にそつてとるべき垂直線の本数とその位置および流量算定式については次の論文にゆずることとする。

4. 従来の縦平均流速算定式の修正

前節において明らかなように、流れの中央部で流速分布が余り乱れていない普通の場合に従来の諸公式を適用すると、3点法、4点法は観測点数が多いにもかかわらずその精度は2点法に劣る。これは、観測流速に乗じる定係数が不適当だからである。本節では、これら公式中の定係数を修正することにより、従来よりも正確と思わ

表-2

資料番号	水深 h (m)	縦平均流速 v_m (m/sec)	2 点 法	3 点 法	4 点 法	平均値 3 点法	平均値 4 点法
1	1.95	0.446	0.456 (+2.2%)	0.475 (+6.5%)	0.438 (-1.8%)	0.427 (-4.3%)	0.456 (+2.2%)
2	2.00	0.465	0.472 (+1.5%)	0.461 (-0.9%)	0.457 (-1.7%)	0.466 (+0.2%)	0.463 (-0.4%)
3	1.95	0.418	0.421 (+0.7%)	0.459 (+9.8%)	0.420 (+0.5%)	0.413 (-1.2%)	0.418 (±0.0%)
4	1.95	0.420	0.425 (+1.2%)	0.414 (-1.4%)	0.410 (-2.4%)	0.413 (-1.7%)	0.431 (+2.6%)
5	1.95	0.423	0.462 (+9.2%)	0.435 (+2.8%)	0.419 (-0.9%)	0.414 (-2.1%)	0.415 (-1.9%)
6	2.00	0.412	0.410 (-0.5%)	0.408 (-1.0%)	0.403 (-2.2%)	0.407 (-1.2%)	0.411 (-0.2%)
7	2.00	0.398	0.389 (-2.3%)	0.436 (+9.5%)	0.393 (-1.3%)	0.416 (+4.5%)	0.393 (-1.3%)
8	2.05	0.359	0.368 (+2.5%)	0.342 (-4.7%)	0.342 (-4.7%)	0.376 (+4.7%)	0.349 (-2.8%)
9	2.05	0.355	0.358 (+0.8%)	0.351 (-1.1%)	0.351 (-1.1%)	0.333 (-6.2%)	0.370 (+4.2%)
10	2.00	0.374	0.400 (+7.0%)	0.361 (-3.5%)	0.363 (-2.9%)	0.369 (-1.3%)	0.374 (±0.0%)
11	2.00	0.325	0.338 (+4.0%)	0.336 (+3.4%)	0.311 (-4.3%)	0.318 (-2.2%)	0.324 (-0.3%)
12	2.00	0.326	0.351 (+7.7%)	0.340 (+4.3%)	0.309 (-5.2%)	0.331 (+1.5%)	0.321 (-1.5%)
13	1.95	0.290	0.354 (+22.1%)	0.301 (+3.8%)	0.286 (-1.4%)	0.286 (-1.4%)	0.286 (-1.4%)
14	1.85	0.310	0.334 (+7.7%)	0.313 (+1.0%)	0.289 (-6.8%)	0.298 (-3.9%)	0.315 (+1.6%)
15	1.65	0.292	0.322 (+10.3%)	0.303 (+2.8%)	0.274 (-6.2%)	0.282 (-3.4%)	0.292 (±0.0%)
16	1.40	0.312	0.342 (+9.6%)	0.275 (-11.9%)	0.275 (-11.9%)	0.290 (-7.1%)	0.309 (-1.0%)
誤 差 の 相 加 平 均 $\bar{E}$			+5.2%	+1.3%	-3.4%	-1.6%	-0.0%
誤 差 の 絶 対 値 の 相 加 平 均 $ \bar{E} $			5.6%	4.3%	3.5%	2.9%	1.3%

れる公式を導く。そうすれば、すでにえられている観測流速をそのまま用いて結果を修正することができるであろう。しかし、修正された公式がはたして2点法より精度がよいかどうかは問題で、もし精度が優れていなければ、6割や4割の点での既往の観測値を捨て、2割と8割の点での観測値だけから2点法で計算すればよい。

平均値法の原理²⁶⁾は、区間 $[-1, 1]$ において変数 t に関する連続函数のこの区間での平均値 M が、この区間内に適当にとつた n 個の t の値 t_i に対する函数値 y_i と n 個の定係数 R_i との積 $R_i y_i$ の総和に近似的に等しくなるように、すなわち、次の式が近似的に成り立つように、 t_i および R_i の値を定めようとするものである。

$$M = R_1 y_1 + R_2 y_2 + \cdots + R_n y_n \cdots \cdots (a)$$

$2n$ 個の根 t_i , R_i を定めるための連立方程式は次のようになることが証明される。

$$\left. \begin{aligned} R_1 + R_2 + \cdots + R_n &= 1, & R_1 t_1 + R_2 t_2 + \cdots + R_n t_n &= 0 \\ R_1 t_1^2 + R_2 t_2^2 + \cdots + R_n t_n^2 &= 1/3, & R_1 t_1^3 + R_2 t_2^3 + \cdots + R_n t_n^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (b)$$

さて、3点法の公式は、

$$v_m = (v_{0.2} + 2v_{0.6} + v_{0.8})/4 = (1/4)v_{0.2} + (1/2)v_{0.6} + (1/4)v_{0.8}$$

であるが、観測点の位置はそのままとして定係数を修正した式を上 (a) 式のように、

$$v_m = R_1 v_{0.2} + R_2 v_{0.6} + R_3 v_{0.8} \cdots \cdots (c)$$

と書いて、 R_1, R_2, R_3 の値を (b) 式より求めればよい。(c) 式は座標点 z_1, z_2, z_3 をあらかじめそれぞれ $0.2h, 0.6h, 0.8h$ と選んで、定係数だけを未知数とした場合である。さて、変数 z は区間 $[0, h]$ で定義されているから、 $t = 2(z/h) - 1$ によつて区間 $[-1, 1]$ で定義される変数 t に変換すれば、

$$t_1 = 2(z_1/h) - 1 = -0.6, \quad t_2 = 2(z_2/h) - 1 = 0.2, \quad t_3 = 2(z_3/h) - 1 = 0.6 \cdots \cdots (d)$$

ゆえに、未知数 R_1, R_2, R_3 を定めるための連立方程式は (b) 式に (d) の値を入れて、

$$R_1 + R_2 + R_3 = 1, \quad -0.6R_1 + 0.2R_2 + 0.6R_3 = 0, \quad 0.36R_1 + 0.04R_2 + 0.36R_3 = 1/3 \cdots \cdots (e)$$

(e) の連立方程式を解けば、 $R_1 = 17/36, R_2 = 1/12, R_3 = 4/9$ となるから、修正3点法の公式は次のようになる。

$$v_m = (17v_{0.2} + 3v_{0.6} + 16v_{0.8})/36 \cdots \cdots (11)$$

(11) 式が誤差をとまなわいたための垂直流速曲線の最高次数は2次である。なぜならば、(b) 式の初めから3つの式までを成立させて4番目の式すなわち t に関する3次の式を成立させていないからである。

同じようにして、修正4点法の公式(誤差をとまわらないための垂直流速曲線の最高次数は3次)を求めると、

$$v_m = \{11(v_{0.2} + v_{0.8}) + (v_{0.4} + v_{0.6})\} / 24 \dots \dots \dots (12)$$

(11) 式と (12) 式を用いて、表-1 の資料につき結果を修正したものが同表の終りの2列である。すなわち、修正された公式を用いれば誤差は著しく小さくなり、3点法については従来の公式で誤差の絶対値が2.0%を越す資料において修正が著しい(番号1, 9, 10)。そしてその資料数は4個より1個(番号11)に減っている。4点法についてもほぼ同じで、修正の著しいものは番号3, 5, 7, 17, 18, 19であり、修正後誤差の絶対値が2.0%を越す例は1個(番号11)あるに過ぎない。ところで、誤差の絶対値平均をみると、修正された両方法はいずれも2点法と同じ精度である。このことは、4割および6割の点での観測値は全く不要で、2割、8割の点での観測値だけを用い2点法より計算すればよいことを示している。すなわち、従来の3点法、4点法は全く無価値な公式であり、4割、6割の点での観測値を入れることによって悪い結果を与えていると結論される。

なお、2点法の正確な公式においては、観測点の位置は $0.211h$, $0.789h$ である。これらをそれぞれ $0.2h$, $0.8h$ とすることは、平均値法の原理からいえば精度を犠牲にすることになる。3点法や4点法の修正式の誘導と同じようにして、2つの観測点を $z_1 = 0.2h (t_1 = -0.6)$, $z_2 = 0.8h (t_2 = 0.6)$ に固定し、(b) 式より定係数 R_1, R_2 を求めると $R_1 = R_2 = 1/2$ がえられるが、これら $t_1, t_2; R_1, R_2$ の値は (b) 式の初めの2つの方程式しか成立させず、3番目の式、 $t_1^2 R_1 + t_2^2 R_2 = 1/3$ を成立させない。すなわち、2割、8割の点での流速の相加平均をもつて縦平均流速とするという簡易化された2点法は、理論的に流速分布が1次式の場合にしか正確な値を与えないこととなり、3次式まで誤差のない正確な2点法の公式にくらべて余りにも精度が劣る。ゆえに、水深が浅いときには簡易化された式を用いてもよいが、水深が大きいときには正確な観測点をとることが望まれる。

5. 結 語

(1) 開水路の垂直流速曲線については、渦動粘性係数を深さのどのような函数と仮定するかによつて種々な理論式がえられるが、筆者はこれを深さに無関係な定数と仮定して、Bazin, Boussinesq, Humphreys-Abbot, 安芸教授の諸公式を包含する2次放物線式を誘導する。

(2) 縦平均流速の測定という問題に限るならば、垂直流速分布に関する2次放物線説や対数曲線説のいかににかかわらず、平均値法より誘導された2点法、平均値3点法はいずれも合理的である。対数分布に対しては平均値3点法の誤差は2点法のその半分である。

(3) 縦平均流速算定式に関する従来の諸公式と平均値法公式とを利根川の資料に適用して流れが整正な場合には2点法または平均値3点法を、杭打水制閘のように極端な乱れのある場合には平均値4点法を用いればよいことが示される。従来の3点法、4点法はいずれの場合にもよい結果を与えない。

(4) 従来の3点法、4点法がよい結果を与えない原因は、観測流速に乗じる係数が合理的でないからで、平均値法の原理に基づいてこの係数を修正すれば、結果を著しく改善することができるが、その精度は2点法のそれを出ない。これより、水深の4割、6割の点での観測流速をもちこむことは無意味であることが結論される。

終りに貴重な資料を提供していただいた建設省利根川上流工事事務所に対し深甚な謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 春日屋伸昌: 平均値法による流量算定式について, 土木学会誌, 第38巻, 第7号, 1953, p. 17~p. 21.
- 土木学会: 水理公式集, 1949, p. 1~p. 2. 3) 物部長徳: 水理学(増補改訂版), 1954, p. 104~p. 106.
- 安芸皎一: 流量測定法, 1954, p. 46~p. 49. 5) 狩野徳太郎: 農業水利, 1949, p. 47~p. 49.
- Rouse, H.: Fluid mechanics for hydraulic engineers, 1938, p. 274~p. 275.
- Hayami, S.: On the mechanics of flow in a wide alluvial river, Journ. of the Shanghai Science Inst., Section 1, Vol. 1, July, 1939, p. 239~p. 261.
- 安芸皎一: 浮子特に竿浮子に依る観測流速の更正係数に就て, 土木学会誌, 第18巻, 第1号, 1932, p. 105~p. 129.
- 久宝 保: 開水路における乱流の縦平均流速分布について, 土木学会誌, 第35巻, 第7号, 1950, p. 9~p. 13.
- 野満隆治: 河川学, 1943, p. 81. 11) 安芸皎一: 河相論, 1954, p. 36.
- 土木学会: 水理公式集, 1949, p. 1. 13) 本間 仁: 水理学, 1939, p. 120.
- 土木学会: 水理公式集, 1949, p. 1~p. 2. 15) 同左, p. 12~p. 13.
- 春日屋伸昌: 開水路の垂直流速曲線における平均流速の位置の分布性について, 土木学会誌, 第40巻, 第5号, 1955, p. 24~p. 29.
- 春日屋伸昌: 開水路の垂直流速曲線に及ぼす諸因子間の相関性について, 土木学会誌, 第40巻, 第10号, 1955, p. 44~p. 51.
- Vanoni, V.A.: Velocity distribution in open channels, Civil Eng., Vol. 11, 1941, p. 356~p. 357.
- 佐藤清一: 水理学(下巻), 1955, p. 81.
- Taylor, E.H.: Velocity distribution in open channels, Trans. A.G.U., 1939, p. 641~p. 643.
- 春日屋伸昌: 平均値法の原理と流量測定への応用, 中央大学70周年記念工学部論文集, 1955, p. 57~p. 74.
- 宮本武之輔: 治水工学, 1953, p. 85.
- 春日屋伸昌: 開水路における垂直流速曲線について, 土木学会誌, 第38巻, 第9号, 1953, p. 15~p. 20.
- Grover, N.C. and Harrington, A.W.: Stream flow, 1949, p. 250.
- 春日屋伸昌: 流量測定における二, 三の問題, 中央大学工学部研究報告, 第1巻, 第1号, 1957, p. 19~p. 29.
- 春日屋伸昌: 最小2乗法と実験式, 応用数学講座, 第5巻, 第2部, 1957, p. 296~p. 300.