アーチ橋のねじれ座屈について

正 員 倉 西 茂*

要 旨 本論文は2本主桁の円弧2ヒンジ・アーチ橋に等分布荷重が載ったときのねじれ座屈を論じたものである。座屈応力の算出にはエネルギー法を使用し、 $\sigma_{cr} = E\alpha_k(i/\alpha R)^2$ の形で座屈応力を与え、アーチ軸に直接載荷した場合の α_k を種々のねじれ剛性、主桁間隔、中心角のものについて求め、さらに荷重がアーチクラウンより h_c だけ上にある場合の α_k の減少率 μ_h 横桁の曲げによるねじり剛性の低下率 μ_q を与えたものである。

1. 緒 論

本論文で取り扱っているのは2本主桁の2ヒンジアーチ橋が等分布荷重を受けて側方へたわみながらねじれ座屈を起こす問題である。取り扱いの簡便さから円形アーチを取り上げたが、荷重によりアーチリブに生じている曲げモーメントの値は座屈値にそれほど大きな影響を与えず、主として関係するのはアーチリブに働いている直応力の値であるから、特に支間に比してアーチ高が高くない限り等しい水平反力を生じている放物線アーチ橋にも近似的に適用できるものと思われる。主桁のねじれ中心を結ぶ線の中点を通る軸をアーチ軸と呼び、アーチ橋はこのアーチ軸で代表させ、各部の変化はすべてこの軸の変位で書き表わすことにする。また主桁のねじれ中心と重心は一致するものとする。ここで座屈値を求めるにはすべてエネルギー法を用いた。なお本論文では床版の曲げ剛性は考慮せず、おもに上路式アーチ橋を対象としている。

2. 等分布荷重を受けるアーチ主桁が座屈変形を起こしたとき桁に蓄えられるエネルギー

アーチ軸のねじれ角は β 、主桁のねじれ角を β_0 、アーチ軸の水平変位は u 、輻射軸方向の変位は v とし図-1に示した方向に変位するものを正とする。アーチ軸は等分布荷重 q を受け次式で与えられる水平反力と曲げモーメントを受けているものとする。

$$H = \frac{qR}{8} \left(\frac{3}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2} \alpha \right) - \frac{7}{6} \sin \frac{3}{2} \alpha \right) - \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4} \sin \alpha + \frac{\alpha}{4} \cos \alpha \quad \dots\dots(1)$$

$$M = \frac{qR^2}{2} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \varphi \right) - HR(1 - \cos \varphi) \quad \dots\dots(2)$$

この荷重状態でのアーチ軸の変形を無視し、この応力状態の下でアーチ軸が座屈変形を起こしたときアーチが

図-1

得るエネルギーを計算しよう。

(1) 主桁のねじれ変形によるひずみエネルギー

主桁のねじり率 τ_x は

$$\tau_x = \frac{\alpha \beta_0}{ds} - \frac{1}{R} \frac{du}{ds}$$

で与えられるゆえ、主桁の曲げねじり剛性を無視すれば主桁に蓄えられるひずみエネルギー V_1 は2主桁で

$$V_1 = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{2GJ_T}{2} \left(\frac{\alpha \beta_0}{ds} - \frac{1}{R} \frac{du}{ds} \right)^2 R \cdot d\varphi \quad \dots\dots(3)$$

である。ここで GJ_T はねじり剛性である。曲げねじりの項は省略したが、主桁が閉じた断面の場合この項はねじり剛性の項に比して省略し得るのが普通であり、開いた断面の場合はアーチ軸のねじれ角と主桁のねじれ角は等しくなり、アーチ軸全体としての曲げねじりの項に比して、主桁のそれは小さくなり無視し得るものと思われる。もしこの項を考える

図-2

ときは、桁全体としての曲げねじり剛性に加えれば近似的に補正できる。

(2) 主桁の伸びによるひずみエネルギー

次にアーチ軸と各主桁の伸びを求めよう。図-2において

$$ds_1^2 = ds^2 + du^2, \quad ds_2 = ds_1 \left(1 - \frac{v}{R} \right)$$

$$ds_3 = ds_2 + dw, \quad ds_3^2 = \overline{ds}^2 - dv^2$$

* 東大工博 東北大学助教授、工学部土木工学科

よって

$$\overline{ds}^2 = dv^2 + \left\{ (ds^2 + du^2)^{1/2} \left(1 - \frac{v}{R} \right) + dw \right\}^2 \dots\dots (4)$$

なる関係があり、2次以上の高次の微小量を省略すると伸び ϵ は

$$\begin{aligned} \epsilon = \frac{\overline{ds} - ds}{ds} = & -\frac{v}{R} + \frac{dw}{ds} - \frac{v}{R} \frac{dw}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{R} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \dots\dots (5) \end{aligned}$$

一般に伸びの項は小さく(5)式の最初の2項は、他の2次の項と同程度の微小量と考えられるので、

$$-\frac{v}{R} + \frac{dw}{ds} = \delta \dots\dots\dots (6)$$

とおき、 δ は変位の項に比して2次の微小量とすれば(6)式を(5)式に代入して高次の微小量を省略すれば結局アーチ軸の伸びは次式で与えられる。

$$\epsilon = -\frac{v}{R} + \frac{dw}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \dots\dots (7)$$

次に各主桁の伸びを計算しよう。原点より正側を見て左側の主桁には変位の記号の肩に(1)をつけ、右側の主桁のものには(2)をつけて、それぞれの変位を表わせば(7)式と同様に

$$\epsilon^{(1)} = -\frac{v^{(1)}}{R} + \frac{dw^{(1)}}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv^{(1)}}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{du^{(1)}}{ds} \right)^2 \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

$$\epsilon^{(2)} = -\frac{v^{(2)}}{R} + \frac{dw^{(2)}}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv^{(2)}}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{du^{(2)}}{ds} \right)^2 \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

が得られる。各主桁の変位は、

$$\left. \begin{aligned} v^{(1)} &= v - \frac{b}{2} \beta, \quad w^{(1)} = \frac{b}{2} \frac{du}{ds} + w, \quad u^{(1)} = u^{(2)} = u \\ v^{(2)} &= v + \frac{b}{2} \beta, \quad w^{(2)} = -\frac{b}{2} \frac{du}{ds} + w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

で与えられるものとすれば(9)式を(8)式に代入することにより

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^{(1)} &= \frac{b}{2} \left(\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{R} \beta \right) + \frac{b^2}{8} \left(\frac{d\beta}{ds} \right)^2 - \frac{b}{2} \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{dw}{ds} + \epsilon \\ \epsilon^{(2)} &= -\frac{b}{2} \left(\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{R} \beta \right) + \frac{b^2}{8} \left(\frac{d\beta}{ds} \right)^2 + \frac{b}{2} \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{dw}{ds} + \epsilon \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10 \cdot a \sim b)$$

を得る。よって主桁の伸びひずみエネルギー V_2 は、

$$V_2 = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{EF}{2} (\epsilon^{(1)2} + \epsilon^{(2)2}) ds \dots\dots\dots (11)$$

ϵ は $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ よりさらに高次の微小量とし、高次の微小量を省略し整理すると、

$$V_2 = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{EFb^2}{4} \left(\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{R} \beta \right)^2 R \cdot d\varphi \dots\dots (12)$$

を得る。

(3) 主桁の曲げひずみエネルギー

次に主桁の曲げによるひずみエネルギーを求めよう。

主桁の微小部分を取り出し $C^{(1)}D^{(1)}$ とすれば最初 ds だけ離れていた2点が $\bar{C}^{(1)}(w^{(1)}, v^{(1)})$ $\bar{D}^{(1)}\left(w^{(1)} + \frac{dw^{(1)}}{ds}, v^{(1)} + \frac{dv^{(1)}}{ds}\right)$ に変位したとき高次の微小量を省略すれば $\approx$ 軸方向に

$$dv^{(1)} + (w^{(1)} + dw^{(1)})d\varphi \div dv^{(1)} + w^{(1)}d\varphi$$

だけ変位する。よって $\bar{C}^{(1)}\bar{D}^{(1)}$ の傾斜は、

$$\frac{dv^{(1)} + w^{(1)}d\varphi}{ds} = \frac{dv^{(1)}}{ds} + \frac{1}{R} w^{(1)}$$

となる。この傾斜の変化が曲率を与えるのであるから、

$$\left(\frac{1}{\rho_y^{(1)}} - \frac{1}{R} \right) = \frac{d^2 v^{(1)}}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{dw^{(1)}}{ds}$$

を得る。今(10)式より、

$$\frac{d^2 v^{(1)}}{ds^2} = -\frac{b}{2} \frac{d^2 \beta}{ds^2} + \frac{d^2 v}{ds^2}, \quad \frac{d^2 w^{(1)}}{ds^2} = \frac{b}{2R} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{dw}{ds}$$

また(7)式より、

$$\frac{1}{R} \frac{dw}{ds} = \frac{v}{R^2} + \frac{\epsilon}{R} - \frac{1}{2R} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2R} \left(\frac{du}{ds} \right)^2$$

が得られるからこれらをまとめて、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho_y^{(1)}} - \frac{1}{R} \right) &= \frac{d^2 v}{ds^2} - \frac{b}{2} \frac{d^2 \beta}{ds^2} + \frac{b}{2R} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{v}{R^2} \\ &+ \frac{\epsilon}{R} - \frac{1}{2R} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2R} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \end{aligned}$$

よって高次の微小量を省略すれば、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho_y^{(1)}} - \frac{1}{R} \right) &= \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} \right) - \frac{b}{2} \left(\frac{d^2 \beta}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2 u}{ds^2} \right) \\ &\dots\dots\dots (13 \cdot a) \end{aligned}$$

を得る。同様に

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho_y^{(2)}} - \frac{1}{R} \right) &= \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} \right) + \frac{b}{2} \left(\frac{d^2 \beta}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2 u}{ds^2} \right) \\ &\dots\dots\dots (13 \cdot b) \end{aligned}$$

が得られる。よって主桁の曲げによって得られるひずみエネルギー V_3 は、

$$\begin{aligned} V_3 &= \int_{-a/2}^{a/2} \frac{EJ_y}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\rho_y^{(1)}} - \frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_y^{(2)}} - \frac{1}{R} \right)^2 \right\} R \cdot d\varphi \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} \frac{2EJ_y}{2} \left\{ \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{4} \left(\frac{d^2 \beta}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2 u}{ds^2} \right)^2 \right\} R \cdot d\varphi \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

で与えられる。

(4) 横桁に蓄えられるひずみエネルギー

横桁は図-1に示したように両端に $(\beta - \beta_0)$ なるたわみ角を生じるのであるから、端モーメント M_q を加えたとき端部の回転が $(\beta - \beta_0)$ となるためには、

$$M_q = (\beta - \beta_0) \frac{6EJ_q}{b}$$

であるから横桁に蓄えられるひずみエネルギー $\bar{V}_4$ は

$$\bar{V}_4 = 2 \cdot \frac{1}{2} M_q (\beta - \beta_0) = \frac{6EJ_q}{b} (\beta - \beta_0)^2$$

である。ここで J_q は、横桁の断面2次モーメントである。横桁の間隔を λ とすれば、桁全体に蓄えられるエネ

ルギー V_4 は,

$$V_4 = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{6EJ_q}{b\lambda} (\beta - \beta_0)^2 R \cdot d\varphi \quad \dots\dots\dots (15)$$

で与えられる。

(5) 座屈を起こす直前に働いていた応力のなす仕事
主桁の伸びにより、主桁に最初から働いていた直応力 $N/2$ のなす仕事は、

$$V_5 = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} -\frac{N}{2} (\epsilon^{(1)} + \epsilon^{(2)}) R \cdot d\varphi$$

で与えられる。よって上式に (11) 式を代入し、

$$V_5 = - \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} N \left\{ \frac{b^2}{8} \left(\frac{d\beta}{ds} \right)^2 + \epsilon \right\} R \cdot d\varphi \quad \dots\dots\dots (16)$$

が得られる。巾員に比して主桁の高さが比較的高いときは、主桁のねじりにより橋軸方向のせん継の伸びによる仕事、

$$V_5' = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{N}{2} (i_0)^2 \left(\frac{d\beta_0}{ds} \right)^2 R \cdot d\varphi$$

$$(i_0)^2 = \frac{1}{F} \int_F r^2 dF \quad r \text{ はねじれ中心よりはかる。}$$

を加えなければならない。最初から働いていた水平軸まわりの曲げモーメントのなす仕事は、

$$V_6 = - \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{M}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\rho_y^{(1)}} - \frac{1}{R} \right) + \left(\frac{1}{\rho_y^{(2)}} - \frac{1}{R} \right) \right\} R \cdot d\varphi$$

より (13) 式を代入し

$$V_6 = - \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} M \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{v}{R} \right) R \cdot d\varphi \quad \dots\dots\dots (17)$$

を得る。荷重の失なうポテンシャル エネルギーは荷重がアーチ軸上に直接載っているものとすれば、

$$V_7 = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} q \{ v \cos \varphi - w \sin \varphi \} R \cdot d\varphi \cos \varphi \quad \dots\dots\dots (18)$$

荷重がアーチ クラウンで hc だけ高く水平線上にあるときは 図-3 に見られるようにアーチ軸より

$$h = (h_c + R) - R \cos \varphi$$

だけ高いところにあり、荷重はアーチをふくむ面に直角方向にのみ移動するものとする。アーチ軸のねじれ角の水平方向の成分は

$$\tilde{\beta} = \beta \cos \varphi$$

で与えられるゆえ、荷重の失なうポテンシャル エネルギーは V_7 よりさらに、

$$V_8 = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} q \frac{h}{2} \tilde{\beta}^2 \cos \varphi R \cdot d\varphi$$

よって

$$V_8 = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{q}{2} \{ (h_c + R) \beta^2 \cos^2 \varphi - R \beta^2 \cos^3 \varphi \} \cos \varphi R \cdot d\varphi \quad \dots\dots\dots (19)$$

が得られる。

(6) 桁全体が得るポテンシャル エネルギー

桁全体が得るポテンシャル エネルギー V は

$$\begin{aligned} V = & (V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 - V_7 - V_8) \\ = & \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left[\frac{2GJ_T}{2} \left(\frac{d\beta_0}{ds} - \frac{1}{R} \frac{du}{ds} \right)^2 \right. \\ & + \frac{2EJ_y}{2} \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{1}{R} v \right)^2 + \frac{EJ_y b^2}{4} \left(\frac{d^2 \beta}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2 u}{ds^2} \right)^2 \\ & + \frac{EFb^2}{4} \left(\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{R} \beta \right)^2 + \frac{6EJ_q}{b\lambda} (\beta - \beta_0)^2 \\ & - N \frac{b^2}{8} \left(\frac{d\beta}{ds} \right)^2 - M \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} \right) \\ & - q \left\{ v \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} (h_c + R) \beta^2 \cos^2 \varphi \right. \\ & \left. \left. - \frac{R}{2} \beta^2 \cos^3 \varphi - \frac{w}{2} \sin^2 \varphi \right\} \right] R \cdot d\varphi \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

ここでアーチ軸の伸びは小さいとして省略した。上式を見るとねじれ角 β と水平変位 u は連成して V を最小にする変形を与えるが、 v と w はそれぞれ独立に V を最小にする変形を示す。よって v, w による座屈はここで除外しアーチのねじれ座屈についてのみ考えることにする。(20) 式で $v=0, w=0$ とおき $G=2GJ_T, C_{bd} = \frac{EJ_y b^2}{2}, C_{Jy} = 2EJ_y, C_J = \frac{EFb^2}{2}, C_q = 12 \frac{EJ_q}{b\lambda}$

とおき荷重は直接アーチ軸上に載っているものとすれば、

(20) 式は

$$\begin{aligned} V = & \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left[\frac{C_T}{2R^2} \left(\beta_0' - \frac{1}{R} u' \right)^2 + \frac{C_{bd}}{2R^4} \left(\beta'' - \frac{1}{R} u'' \right)^2 \right. \\ & + \frac{C_J}{2R^2} \left(\frac{1}{2} u'' + \beta \right)^2 + \frac{C_q}{2} (\beta - \beta_0)^2 \\ & \left. - \left\{ \frac{b^2}{8R^2} \beta'^2 + \frac{1}{2R^2} u'^2 \right\} N \right] R \cdot d\varphi \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここで、' は φ について微分したことを示している。

3. 座屈荷重の算出

(1) 座屈変形

ここで V を β, β_0, u について変分し V を最小すなわち $\partial V = 0$ にする変位 β, β_0, u を求めよう。アーチの両端端の変位は常に 0 であるから変分法により

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial V}{\partial \beta_0''} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial V}{\partial \beta_0'} + \frac{\partial V}{\partial \beta_0} &= 0 \\ \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial V}{\partial \beta''} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial V}{\partial \beta'} + \frac{\partial V}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial V}{\partial u''} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial V}{\partial u'} + \frac{\partial V}{\partial u} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

よって、

$$\frac{C_T}{R^2} \left(\beta_0'' - \frac{1}{R} u'' \right) + C_q (\beta - \beta_0) = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{bd}}{R^4} \beta^{IV} + H \frac{b^2}{4R^2} \beta'' + \frac{C_J}{R^2} \beta + C_q \beta - C_q \beta_0 \\ - \frac{C_{bd}}{R^5} u^{IV} + \frac{C_q}{R^3} u'' = 0 \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{C_J}{R^4} + \frac{C_{bd}}{R^5} \right) u^{IV} + \left(\frac{H}{R^2} - \frac{C_T}{R^4} \right) u'' - \frac{C_{bd}}{R^5} \beta^{IV} \\ + \frac{C_J}{R^3} \beta'' + \frac{C_T}{R^3} \beta_0'' = 0 \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ここでアーチ軸に働く直応力 N は近似的に水平反力 H と等しいとした。(25), (26) 式より β_0, β_0' を求め、(24) 式に代入すれば、

$$\frac{C_J}{R^3} u^{IV} + \left(\frac{H}{R} + \frac{C_J}{R^3} \right) u'' + \left(\frac{C_J}{R^2} + \frac{Hb^2}{4R^2} \right) \beta'' + \frac{C_J}{R^2} \beta = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

を得る。今端部条件を満足するたわみ曲線として、

$$u = R \cdot A \left(\cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi + \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{\alpha} \varphi \right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

をとれば、 β として (27) 式を満足し端部条件 $\varphi = \pm \frac{\alpha}{2}$ で $\beta = 0, \beta'' = 0$ となるねじれ曲線が求まる。

$$\beta = A \left(\nu_1 \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi + \nu_2 \cos \frac{3\pi}{\alpha} \varphi \right) \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで

$$\nu_1 = \frac{\left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{R^2 H}{C_J} + 1 \right) \right\}}{\left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left(1 + \frac{Hb^2}{4C_J} \right) - 1} \quad \dots\dots\dots (30 \cdot a)$$

$$\nu_2 = \frac{3 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left\{ 9 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{R^2 H}{C_J} + 1 \right) \right\}}{9 \left(1 + \frac{Hb^2}{4C_J} \right) \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 1} \quad \dots\dots\dots (30 \cdot b)$$

β_0 も同様に、

$$\beta_0 = A \left(\nu_3 \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi + \nu_4 \cos \frac{3\pi}{\alpha} \varphi \right) \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここで、

$$\nu_3 = \frac{\left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{C_q}{C_T} R^2 \nu_1}{\left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{C_q}{C_T} R^2} \quad \dots\dots\dots (32 \cdot a)$$

$$\nu_4 = \frac{3 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{C_q}{C_T} R^2 \nu_2}{9 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{C_q}{C_T} R^2} \quad \dots\dots\dots (32 \cdot b)$$

を得る。以上は対称変形であるが、逆対称の変形もどうように、

$$\left. \begin{aligned} u &= RA \left(\sin \frac{2\pi}{\alpha} \varphi + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{\alpha} \varphi \right) \\ \beta &= A \left(\nu_1' \sin \frac{2\pi}{\alpha} \varphi + \nu_2' \sin \frac{4\pi}{\alpha} \varphi \right) \\ \beta_0 &= A \left(\nu_3' \sin \frac{2\pi}{\alpha} \varphi + \nu_4' \sin \frac{4\pi}{\alpha} \varphi \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (33 \cdot a \sim c)$$

と求まるが、一般に対称変形の方が低い座屈荷重を与える。

(2) 座屈荷重

(27), (28), (29) 式を $V_i (i=1, 2 \dots 6)$ に代入し次のようにおけば、

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{A^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left(\beta_0' - \frac{1}{R} u' \right)^2 d\varphi \\ &= \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \{ (1 - \nu_3)^2 + (1 - 3\nu_4)^2 \} \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{A^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left(\beta'' - \frac{u''}{R} \right)^2 d\varphi \\ &= \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^4 \{ (1 - \nu_1)^2 - (3 - 9\nu_2)^2 \} \frac{\alpha}{2} \\ I_3 &= \frac{1}{A^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left(\frac{u''}{R} + \beta \right)^2 d\varphi \\ &= \left[\left\{ \nu_1 - \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \right\}^2 + \left\{ \nu_2 - 3 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \right\}^2 \right] \frac{\alpha}{2} \\ I_4 &= \frac{1}{A^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (\beta - \beta_0)^2 d\varphi \\ &= \{ (\nu_1 - \nu_3)^2 + (\nu_2 - \nu_4)^2 \} \frac{\alpha}{2} \\ I_5 &= \frac{1}{A^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \beta'^2 d\varphi \\ &= \left\{ \nu_1^2 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + 9\nu_2^2 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \right\} \frac{\alpha}{2} \\ I_6 &= \frac{1}{A^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left(\frac{u'}{R} \right)^2 d\varphi \\ &= \left\{ 2 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \right\} \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (34 \cdot a \sim f)$$

$\delta V = 0$ より

$$C_T I_1 + \frac{C_{bd}}{R^2} I_2 + C_J I_3 + C_q R^2 I_4 - H_{cr} \left(\frac{b^2}{4} I_5 + R^2 I_6 \right) = 0$$

よって限界水平反力 H_{cr} は

$$H_{cr} = \frac{GI_1 + \frac{C_{bd}}{R^2} I_2 + C_J I_3 + C_q R^2 I_4}{\frac{b^2}{4} I_5 + R^2 I_6} \quad \dots\dots\dots (35)$$

で与えられる。 $I_i (i=1, 2 \dots 6)$ は H の関数として与えられているので (35) 式は H_{cr} の陰関数となっているが、 $I_i (i=1, 2 \dots 6)$ 中の H_{cr} による H_{cr} の変化は比較的小さく逐次近似を行えば十分正確な値が得られると思われる。(35) 式を整理して書けば限界応力度 σ_{cr} は、

$$\begin{aligned} \sigma_{cr} &= E \\ &\times \frac{4\alpha^2 m \left(\frac{i}{\alpha R} \right)^2 \bar{I}_1 + \alpha^4 \left(\frac{b}{\alpha R} \right)^2 \left(\frac{i}{\alpha R} \right)^2 \bar{I}_2 + \alpha^2 \left(\frac{b}{\alpha R} \right)^2 \bar{I}_3}{\alpha^2 \left(\frac{b}{\alpha R} \right)^2 \bar{I}_5 + 4 \bar{I}_6} \quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

$$\text{ここで } m = \frac{GJ_T}{EJ_y}, \quad i^2 = \frac{J_y}{F}, \quad \bar{I}_i = I_i \left(\frac{2}{\alpha} \right)$$

である。

今 (30) 式で H の項の最小荷重に対する影響は小さいと無視すれば、

$$\nu_1 = \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2, \quad \nu_2 = 3 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (37)$$

となり、また横桁は十分剛であり、主桁に剛結されているものとすれば $\nu_1 = \nu_3, \nu_2 = \nu_4$ となる。この場合 $\bar{I}_i$ の値はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_1 &= \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left\{ 2 - 20 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + 82 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^4 \right\} \\ \bar{I}_2 &= \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^4 \left\{ 10 - 164 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + 726 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^4 \right\} \\ \bar{I}_3 &= \bar{I}_4 = 0, \quad \bar{I}_5 = 82 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^6, \quad \bar{I}_6 = 2 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (38 \cdot a \sim e)$$

図-4 (a) (39) 式の座屈係数の値

図-4 (b) (39) 式の座屈係数の値

図-4 (c) (39) 式の座屈係数の値

図-4 (d) (39) 式の座屈係数の値

もし横桁はヒンジで主桁に結合されているものとすれば, (32) 式で

$$\nu_3=1, \nu_4=\frac{1}{3}$$

となり, よって (34・a) 式で

$$I_3=0$$

となり, 主桁のねじり剛性はこのような変形に

対しては発揮できない。(36) 式はさらに整理すると (37) 式で与えられるような変形に対しては,

$$\sigma_{cr}=E\alpha_k\left(\frac{i}{\alpha R}\right)^2 \dots\dots\dots (39)$$

$$\alpha_k=\frac{4\alpha^2 m \bar{I}_1 + \alpha^4 \left(\frac{b}{\alpha R}\right)^2 \bar{I}_2}{\alpha^2 \left(\frac{b}{\alpha R}\right)^2 \bar{I}_5 + 4\bar{I}_6} \dots\dots\dots (40)$$

が得られる。すなわちアーチ主桁の水平軸まわりの回転半径 i とアーチ軸全長の比の関数として座屈応力を示しその係数 α_k を $\alpha, m, \left(\frac{b}{\alpha R}\right)$ の値を変えて示せば 図-4 (a)~(d) が得られる。

(3) 横桁の曲げ剛性の影響

前節でわかるとおりアーチ主桁のねじれ剛性がねじれ座屈におよぼす影響は非常に大きい, 主桁を連結する横桁の曲げ剛性がある程度の値をもたないとねじれ剛性の効果は発揮できない。また横桁がビン構造で主桁に結合されているときも同ようである。今 $\frac{C_q R^2}{6 C_T} = \frac{E J_q R^2}{G J_T b \lambda} = p$ の値を変え, 主桁のねじり剛性の低下率 μ_q を求めたのが 図-5 である。図からわかるとおり主桁のねじり剛性を十分に発揮させるには p は 10^3 程度の値をとることが望ましく, 1 程度ではほとんどねじり剛性は期待

できない。

本理論では横構の変形を無視しているが, 横構の断面が小さいとやはり耐荷力は減少すると予想される。また端部で x 軸まわりの回転が許されると限界応力は今与えれ値の 1/4 以下となり, アーチはねじれ変形に対し非常に弱くなってしまふ。アーチのねじれ座屈を防止する上からも, 起拱部は十分強固にする必要があると思われる。

図-5 横桁の曲げ変形によるねじり剛性の減少率 μ_q

(4) 荷重がアーチ クラウンより h_c だけ上にある場合

前章ではこの項を省略して計算を進めたが, 座屈変形は直接アーチ軸に載荷された場合と同じく (28), (29), (31) 式を用いて V_8 を求めると次式が得られる。

$$V_8 = q \frac{A^2}{2} R^2 I_8$$

$$I_8 = \left(1 + \frac{h_c}{R}\right) \left[\frac{\nu_1^2}{4} \left\{ \frac{3}{4\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 9} \sin \frac{3}{2} \alpha + \frac{3}{4\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3}{2} \alpha + 3 \sin \frac{\alpha}{2} \right\} + \frac{\nu_1 \nu_2}{2} \left\{ \frac{3}{4\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 9} \sin \frac{3}{2} \alpha + \frac{3}{4\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{16\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 9} \sin \frac{3}{2} \alpha - \frac{3}{16\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \sin \frac{\alpha}{2} \right\} + \frac{\nu_2^2}{4} \left\{ \frac{1}{12\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 3} \sin \frac{3}{2} \alpha \right\} \right]$$

図-6 (a) 荷重が h_c だけアーチ クラウン
より上にあるときの α_h 減少率 M_h 図-6 (b)
同 左 図-6 (c)
同 左

図-6 (d) 同 上

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{36\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3}{2} \alpha + 3 \sin \frac{\alpha}{2} \left\{ \right. \\
 & - \left[\frac{\nu_1^2}{8} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 4} \sin 2\alpha + \frac{2}{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right. \right. \\
 & + 2 \sin \alpha + \frac{3}{2} \alpha \left. \right\} + \frac{\nu_1 \nu_2}{8} \left\{ \frac{2}{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 4} \sin 2\alpha \right. \\
 & + \frac{4}{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \sin \alpha - \frac{1}{2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 2} \sin 2\alpha \\
 & - \frac{4}{4\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \sin \alpha \left. \right\} + \frac{\nu_2^2}{8} \left\{ \frac{1}{9\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 4} \sin 2\alpha \right. \\
 & + \frac{2}{9\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha + 2 \sin \alpha + \frac{3}{2} \alpha \left. \right\} \left. \right\} \\
 & \dots\dots\dots (41)
 \end{aligned}$$

よって (35) 式の分母に $\frac{R^2 I_b}{\alpha H}$ を加えると荷重がアーチ
クラウンより h_c だけ高い場合の限界水平反力を求める
ことができる。 α_H は (1) 式で与えたように荷重 qR に
よる水平反力を求める係数で $H = \alpha_H \cdot qR$ で与えられる。
荷重が h_c だけアーチ クラウンより上にあるための α_k
の減少率 μ_h は (37) 式で与えられる変形に対しては、

図-6 (a)~(d) に示したようになる。すなわちアーチ
軸に直接載っているとした場合の α_k を μ_h 倍すればよい。
このように荷重が高い位置にあるための減少率はか
なり大きく $h_c = 0.04R$ の場合主桁間隔が狭く $\alpha R/b =$
20 のときは座屈荷重は約半分になってしまう。

4. 結 言

主桁に閉じた断面を使用すると $m=1 \sim 0.1$, 開いた断
面を使用すると $10^{-2} \sim 10^{-3}$ 程度の値を m はとるものと
思われる。 $m=10^{-2} \sim 10^{-3}$ 程度のねじり剛性ではほとん
どねじれ座屈の防止に役立たないことが 図-4 を見る
とうかがえる。アーチ軸の長さを一定にとって考えると
アーチの高さが低い場合ねじり剛性が小さいときは主桁
間隔が座屈荷重によぼす影響は比較的小さいが、ねじ
り剛性が大きくなると、主桁間隔が狭くなると逆にかえ
ってねじれ座屈荷重は大きくなり、例えば $m=0.1$,
 $b/\alpha R=1/8$ のときにくらべ $b/\alpha R=1/20$ のときは座屈
応力は約2倍となる。アーチの高さが高くなるとねじれ
剛性が小さいものは主桁間隔が狭くなるに従い座屈荷重
は低下するが、ねじり剛性が大きいときは主桁間隔が狭
いほど座屈荷重は大きくなるが、低いアーチほどは大き
くならない。一般にアーチの高さが高いほど座屈荷重は
低下する。

このようにねじり剛性が大きいときは主桁間隔が狭い
とねじれ座屈よりも側方への曲げ座屈, または面内座屈
の方が問題になると思われる。側方への曲げ座屈は,
(29), (31) 式で $\nu_1 = \nu_3 = 1$, $\nu_2 = \nu_4 = 1/3$ なる値をとると
き起りその限界水平反力は、

$$\sigma_{cr} = E \alpha_{KB} \left(\frac{b}{\alpha R} \right)^2 \dots\dots\dots (42)$$

で与えられ α_{KB} は 表-1 で与えられる。

表-1

α	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
α_{KB}	$4.87\pi^2$	$4.72\pi^2$	$4.72\pi^2$	$4.61\pi^2$	$4.51\pi^2$

図 7 α_K が 40 以下なる α と $\frac{\alpha R}{b}$ の関係

面内座屈と比較すると逆対称面内座屈の α_K は 40 程度の値をとるが、荷重が直接アーチ軸に載っているときねじれ剛性が小さく $\alpha=1.6$, $b/\alpha R=1/20$ 程度のときは α_K は 40 程度となり、ねじれ座屈が起る危険が生じるが荷重がアーチ クラウン より h_c だけ上にあるときは、

ねじれ剛性が小さい場合 図-7 で示した曲線より右下側にアーチ主桁間隔および中心角があるとき α_K は 40 以下となり、面内座屈よりねじれ座屈が生じやすくなる。今述べたように主桁断面に開いた断面を用いた場合ねじれ座屈を起こす可能性があるが、閉じた断面を用いても横桁の剛度が低い場合はねじれ剛性を十分に発揮できない。ねじれ座屈を防止するためには少なくとも $m\mu_q$ が 0.1 以上の値となることが望ましいと思われる。

参 考 文 献

- 1) 長柱委員会：“弾性安定要覧”，コロナ社（1960）
- 2) Timoshenko, S.: Theory of Elastic Stability, McGraw Hill (1936)
- 3) Bleich: Buckling Strength of Metal Structure, McGraw Hill (1952)
- 4) 倉西正嗣：“弾性率”，日本機械学会（1948）
- 5) Ratzerdorfer: Die Kuickenfestigkeit von Staben und Stabwerken, Springer (1936)

（原稿受付：1961.1.10）

THE TORSIONAL BUCKLING STRENGTH OF SOLID RIB ARCH BRIDGE

By Dr. Eng., Shigeru Kuranishi, C.E. Member

SYNOPSIS

In this paper, the author discusses the laterally torsional elastic buckling problem of two-hinge circular arch bridge, composed of two main arched girders, cross beams and lateral bracing, loaded by uniformly distributed vertical forces (see Fig. 1). Employing the energy method, he obtains the critical stress.

Fig. 1

The total potential energy of the distorted arch is given as a function of the displacement and twist as follows :

$$V = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left[\frac{GJ_T}{R^2} \left(\beta_0' - \frac{1}{R} u' \right)^2 + \frac{EJb^2}{4R^2} \left(\beta'' - \frac{1}{R} u'' \right)^2 + \frac{EFb^2}{4R^2} \left(\beta + \frac{1}{R} u \right)^2 + \frac{6EJ_q}{b\lambda} (\beta_0 - \beta)^2 - \left(\frac{b^2}{8R^2} \beta'^2 + \frac{1}{2R^2} u'^2 \right) H - \frac{q}{2} \{ (h_c + R) \cos^2 \varphi - R \cos^3 \varphi \} \beta^2 \right] R \cdot d\varphi \quad (1)$$

where J_T is the torsional coefficient, F is the area, J is the moment of inertia about y axis of the main arched girder's cross section, J_q is the moment of inertia of the cross beams' cross section and λ is the spacing of the cross beams.

As the functions which satisfy the boundary conditions, the deflection curve and twist

curve of the arch axis are assumed to be of the forms

$$u = A \cdot R \left(\cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi + \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{\alpha} \varphi \right) \quad (2 \cdot a)$$

$$\beta = A \left(\nu_1 \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi + \nu_2 \cos \frac{3\pi}{\alpha} \varphi \right) \quad (2 \cdot b)$$

$$\beta_0 = A \left(\nu_3 \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi + \nu_4 \cos \frac{3\pi}{\alpha} \varphi \right) \quad (2 \cdot c)$$

where

$$\nu_1 = \frac{\left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{2R^2H}{EFb^2} + 1 \right) \right\}}{\left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left(1 + \frac{H}{2EF} \right) - 1}$$

$$\nu_2 = \frac{3 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left\{ 9 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{2R^2H}{EFb^2} + 1 \right) \right\}}{9 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left(1 + \frac{H}{2EF} \right) - 1}$$

$$\nu_3 = \frac{\left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{6EJ_qR^2}{GJ_Tb\lambda} \nu_1}{\left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{6EJ_qR^2}{GJ_Tb\lambda}}$$

$$\nu_4 = \frac{3 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{6EJ_qR^2}{GJ_Tb\lambda} \nu_3}{9 \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{6EJ_qR^2}{GJ_Tb\lambda}}$$

Those deflection and twist curves produce no strain energy due to bending about the radial axis and give the arch a minimum strain energy. The buckling load in symmetrical mode is smaller than that in asymmetric one.

The average critical stress at the arch crown can be expressed as

$$\sigma_{cr} = E \alpha_K (i/\alpha R)$$

where i is the radius of gyration of the main arched girder's cross section and therefore $(i/\alpha R)$ means the slenderness ratio of the arch rib. The buckling coefficient α_K depends on the loading condition, the torsional rigidity of the main girder, the flexural rigidity of the cross beams, the distance between the two main girders, and also on the central angle and radius of the arch axis. The α_K is computed neglecting the terms of H in Eq. (2) and shown in the figures with various ratios $m = GJ_T/EJ$, with various ratios $(b/\alpha R)$ and with

Fig. 2

Fig. 3

various central angles α . For example, α_K is shown here in **Figs. 2 and 3** in the case of $m=0.1$ and $m=0$.

Generally speaking, the flatter is the arch, the higher is the critical stress. When the arched main girder has fairly large torsional rigidity, the narrower is the arch, the higher is the critical stress for the torsional buckling. When the main girder has fairly small torsional rigidity, the narrower is the arch, the lower is the critical stress.

The above mentioned results have been obtained under the assumptions that the cross beams are rigid and rigidly connected to the main arched girder. While the torsional rigidity is reduced by the deformation of cross beams. This reduction factor μ_q for the torsional rigidity of the main arched girder is computed and shown in **Fig. 4**.

When the loads are applied on the horizontal line h_c , above the arch crown the critical

Fig. 4

stress becomes lower. This reduction factor μ_h to α_K is also computed for various ratios h_c/R and shown in the figures.

Fig. 5

Fig. 6

For example, this reduction factor μ_h is shown in **Figs. 5 and 6**, when $h_c/R=0$ and $h_c/R=0.04$.

The critical stress for the buckling in the plane of arch axis is expressed in the same form as that of the torsional buckling and in this case, α_K is about 40. Therefore, there is the possibility of the occurrence of torsional buckling, when α_K is smaller than 40. The region $\alpha_K < 40$ is computed varying the ratio h_c/R in the case $m=0$ and shown in **Fig. 7**.

Fig. 7