EIN WEITERER REZIPROZITÄTSSATZ UND SEINE ANWENDUNGEN

a.o. Prof. Dr. Ing. Noboru Watanabe

I. Theorie

Abb. I. 1 a~e.

Abb. I. 2 a~e.

1. Man denkt sich einen Balken, auf den einige Lasten P, Q, p und q wirken (Abb. I. 1 a bzw. Abb. I. 2 a). Abb. I. 1 a ist die elas-

tische Biegelinie $f(P, Q, p, q)$, die sich in einzelne Biegelinien $f(P)$, $f(Q)$, $f(p)$ und $f(q)$, (Abb. I. 1 b~e), zerlegen lässt, und Abb. I. 2 a ist die Biegemomentlinie $M(P, Q, p, q)$, die sich in einzelne Biegemomentlinien $M(P)$, $M(Q)$, $M(p)$ und $M(q)$, (Abb. I. 2 b~e), zerlegen lässt, wobei P und Q Einzellasten sind und p und q Streckenlasten sind.

Es ergibt sich durch Einführung des Superpositionssatzes

$$\left. \begin{aligned} f(P, Q, p, q) &= f(P) + f(Q) + f(p) + f(q) \\ M(P, Q, p, q) &= M(P) + M(Q) + M(p) + M(q) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I. 1 a, b)$$

Die Buchstaben in der Klammer in Gl. (I. 1) bedeuten Funktionen der äusseren Lasten.

$f(P, Q, p, q)$ ist beispielweise der Ausdruck, der als Funktion der äusseren Lasten P, Q, p und q dargestellt wird, und $f(P)$ ist der Ausdruck, der als Funktion der einzelnen äusseren Last P dargestellt wird.

Da hier die (äussere) Formänderungsarbeit gleich der inneren Ergänzungsarbeit ist, erhält man

$$\frac{1}{2} (P \cdot f_P + Q \cdot f_Q + p \cdot \mathfrak{U}_p + q \cdot \mathfrak{U}_q) = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx. \dots\dots\dots (I. 2)$$

Schreibt man ausführlich, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \{ P \cdot f_P(P, Q, p, q) + Q \cdot f_Q(P, Q, p, q) \\ &\quad + p \cdot \mathfrak{U}_p(P, Q, p, q) + q \cdot \mathfrak{U}_q(P, Q, p, q) \} \\ &= \int_0^l \frac{M^2(P, Q, p, q)}{2EI} dx. \dots\dots\dots (I. 3) \end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{U}_p$ und $\mathfrak{U}_q$ die Biegelinienflächen sind, auf die die Streckenlasten p und q wirken.

Durch Benutzung von Gl. (I. 1 b) ergibt sich

$$\begin{aligned} M^2(P, Q, p, q) &= \{ M(P) + M(Q) + M(p) \\ &\quad + M(q) \}^2 = M^2(P) + M^2(Q) + M^2(p) \\ &\quad + M^2(q) + 2\{ M(P) \cdot M(Q) + M(P) \cdot M(p) \\ &\quad + M(P) \cdot M(q) + M(Q) \cdot M(p) \\ &\quad + M(Q) \cdot M(q) + M(p) \cdot M(q) \}. \dots\dots (I. 4) \end{aligned}$$

Zwischen Durchbiegungen gelten die folgenden Beziehungen

* Technische Fakultät, Hokkaido-Universität, Sapporo, Japan.

$$\left. \begin{aligned} f_P(P, Q, p, q) &= f_P(P) + f_P(Q) + f_P(p) + f_P(q), \\ f_Q(P, Q, p, q) &= f_Q(P) + f_Q(Q) + f_Q(p) + f_Q(q), \\ \mathfrak{U}_P(P, Q, p, q) &= \mathfrak{U}_P(P) + \mathfrak{U}_P(Q) + \mathfrak{U}_P(p) + \mathfrak{U}_P(q), \\ \mathfrak{U}_Q(P, Q, p, q) &= \mathfrak{U}_Q(P) + \mathfrak{U}_Q(Q) + \mathfrak{U}_Q(p) + \mathfrak{U}_Q(q). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I.5 \text{ a} \sim \text{d})$$

Durch Einsetzen von Gl. (I. 4) und (I. 5) in Gl. (I. 3) ergibt sich schliesslich :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [P \cdot \{f_P(P) + f_P(Q) + f_P(p) + f_P(q)\} + Q \cdot \{f_Q(P) + f_Q(Q) + f_Q(p) + f_Q(q)\} \\ & + p \{\mathfrak{U}_P(P) + \mathfrak{U}_P(Q) + \mathfrak{U}_P(p) + \mathfrak{U}_P(q)\} + q \{\mathfrak{U}_Q(P) + \mathfrak{U}_Q(Q) + \mathfrak{U}_Q(p) + \mathfrak{U}_Q(q)\}] \\ & = \frac{1}{2EI} \int_0^l [M^2(P) + M^2(Q) + M^2(p) + M^2(q) + 2\{M(P) \cdot M(Q) + M(P) \cdot M(p) \\ & + M(P) \cdot M(q) + M(Q) \cdot M(p) + M(Q) \cdot M(q) + M(p) \cdot M(q)\}] dx. \dots\dots\dots (I.6) \end{aligned}$$

Damit beide Seiten dieser Gleichung identisch sind, braucht man die Vergleiche infolge der Funktionsbeziehungen wie sie folgende Tafel zeigt :

	I	II	III	IV
Linke Seite	$\frac{1}{2} P \cdot f_P(P)$	$\frac{1}{2} Q \cdot f_Q(Q)$	$\frac{1}{2} p \cdot \mathfrak{U}_P(p)$	$\frac{1}{2} q \cdot \mathfrak{U}_Q(q)$
Rechte Seite	$\frac{1}{2EI} \int M^2(P) dx$	$\frac{1}{2EI} \int M^2(Q) dx$	$\frac{1}{2EI} \int M^2(p) dx$	$\frac{1}{2EI} \int M^2(q) dx$
V		VI		VII
$\frac{1}{2} \{P \cdot f_P(Q) + Q \cdot f_Q(P)\}$		$\frac{1}{2} \{P \cdot f_P(p) + p \cdot \mathfrak{U}_P(P)\}$		$\frac{1}{2} \{P \cdot f_P(q) + q \cdot \mathfrak{U}_Q(P)\}$
$\frac{1}{2EI} \left\{ \int M(P) \cdot M(Q) dx + \int M(Q) \cdot M(P) dx \right\}$		$\frac{1}{2EI} \left\{ \int M(P) \cdot M(p) dx + \int M(p) \cdot M(P) dx \right\}$		$\frac{1}{2EI} \left\{ \int M(P) \cdot M(q) dx + \int M(q) \cdot M(P) dx \right\}$
VIII		XI		X
$\frac{1}{2} \{Q \cdot f_Q(p) + p \cdot \mathfrak{U}_P(Q)\}$		$\frac{1}{2} \{Q \cdot f_Q(q) + q \cdot \mathfrak{U}_Q(Q)\}$		$\frac{1}{2} \{p \cdot \mathfrak{U}_P(q) + q \cdot \mathfrak{U}_Q(p)\}$
$\frac{1}{2EI} \left\{ \int M(Q) \cdot M(p) dx + \int M(p) \cdot M(Q) dx \right\}$		$\frac{1}{2EI} \left\{ \int M(Q) \cdot M(q) dx + \int M(q) \cdot M(Q) dx \right\}$		$\frac{1}{2EI} \left\{ \int M(p) \cdot M(q) dx + \int M(q) \cdot M(p) dx \right\}$

In dieser Tafel ist die oben dargestellte Formänderungsarbeit jeweils gleich der unten dargestellten inneren Ergänzungsarbeit.

Durch Beobachtung der Vergleiche V, VI, VII, VIII, IX und X erhält man

$$\begin{aligned} \text{V} \dots \frac{1}{2EI} \int M(P) \cdot M(Q) dx &= \frac{1}{2EI} \int M(Q) \cdot M(P) dx = \frac{1}{2} P \cdot f_P(Q) = \frac{1}{2} Q \cdot f_Q(P), \dots\dots\dots (I.7) \\ \text{VI} \dots \frac{1}{2EI} \int M(P) \cdot M(p) dx &= \frac{1}{2EI} \int M(p) \cdot M(P) dx = \frac{1}{2} P \cdot f_P(p) = \frac{1}{2} p \cdot \mathfrak{U}_P(P), \\ \text{VII} \dots \frac{1}{2EI} \int M(P) \cdot M(q) dx &= \frac{1}{2EI} \int M(q) \cdot M(P) dx = \frac{1}{2} P \cdot f_P(q) = \frac{1}{2} q \cdot \mathfrak{U}_Q(P), \\ \text{VIII} \dots \frac{1}{2EI} \int M(Q) \cdot M(p) dx &= \frac{1}{2EI} \int M(p) \cdot M(Q) dx = \frac{1}{2} Q \cdot f_Q(p) = \frac{1}{2} p \cdot \mathfrak{U}_P(Q), \\ \text{IX} \dots \frac{1}{2EI} \int M(Q) \cdot M(q) dx &= \frac{1}{2EI} \int M(q) \cdot M(Q) dx = \frac{1}{2} Q \cdot f_Q(q) = \frac{1}{2} q \cdot \mathfrak{U}_Q(Q), \\ \text{X} \dots \frac{1}{2EI} \int M(p) \cdot M(q) dx &= \frac{1}{2EI} \int M(q) \cdot M(p) dx = \frac{1}{2} p \cdot \mathfrak{U}_P(q) = \frac{1}{2} q \cdot \mathfrak{U}_Q(p). \dots\dots\dots (I.9) \end{aligned}$$

Daraus gewinnt man den "Reziprozitätssatz", dass bei Einwirkung von äusseren Lasten auf einen elastischen Körper die inneren Ergänzungsarbeiten und die äusseren Formänderungsarbeiten jeweils gleich gross sind.

Setzt man in Gl. (I. 7) $P=Q$ oder $P=Q=1$, so erhält man den Satz von Betti-Maxwell. Aber Gl. (I. 7), (I. 8) und (I. 9) sagen insgesamt mehr aus als der Satz von Betti-Maxwell. Besonders in Gl. (I. 8) und (I. 9) kann man die Beziehung "der äusseren Formänderungsarbeit bzw. der halben potentiellen Energie" zwischen Einzellast und Streckenlast oder zwischen Streckenlast und Streckenlast sehen.

2. Wirken viele Lasten $P_1, P_i, \dots, P_n$ (Abb. I. 3 a~e), dann erhält man folgendes Schema :

das einen zur Hauptdiagonale symmetrischen Aufbau besitzt.

	P_1	P_2	P_i	P_j	$\dots$	P_n
$f(P_1)$	f_{11}	f_{21}	f_{i1}	f_{j1}	$\dots$	f_{n1}
$f(P_2)$	f_{12}	f_{22}	f_{i2}	f_{j2}	$\dots$	f_{n2}
$f(P_i)$	f_{1i}	f_{2i}	f_{ii}	f_{ji}	$\dots$	f_{ni}
$f(P_j)$	f_{1j}	f_{2j}	f_{ij}	f_{jj}	$\dots$	f_{nj}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$f(P_n)$	f_{1n}	f_{2n}	f_{in}	f_{jn}	$\dots$	f_{nn}

Abb. I. 3 a~e.

Durch Einführung des "weiteren Reziprozitätssatzes" erhält man die folgenden allgemeinen Schreibweisen

$$P_j \cdot f_{ji}(P_i) = P_i \cdot f_{ij}(P_j). \quad \dots \dots \dots (I. 10)$$

Wirken Einzellasten P_i und Streckenlasten q_j , in gleicher Weise dann ergibt sich

$$q_j \cdot \mathfrak{A}_{ji}(P_i) = P_i \cdot f_{ij}(q_j). \quad \dots \dots \dots (I. 11)$$

Wirken Streckenlast q_i und Streckenlast q_j , in gleicher Weise, so erhält man

$$q_j \cdot \mathfrak{A}_{ji}(q_i) = q_i \cdot \mathfrak{A}_{ij}(q_j). \quad \dots \dots \dots (I. 12)$$

Wirken ferner Biegemomente als äussere Lasten, so nimmt man den Neigungswinkel φ an Stelle der Durchbiegung f an

$$M_j \cdot \varphi_{ji}(M_i) = M_i \cdot \varphi_{ij}(M_j), \quad \dots \dots \dots (I. 13)$$

$$M_j \cdot \varphi_{ji}(P_i) = P_i \cdot f_{ij}(M_j), \quad \dots \dots \dots (I. 14)$$

$$M_j \cdot \varphi_{ji}(q_i) = q_i \cdot \mathfrak{A}_{ij}(M_j). \quad \dots \dots \dots (I. 15)$$

Wirken ferner Drillmomente als äussere Lasten, so nimmt man den Verdrehungswinkel ϕ an Stelle der Durchbiegung f an

$$M_{Dj} \cdot \phi_{ji}(M_{Di}) = M_{Di} \cdot \phi_{ij}(M_{Dj}), \quad \dots \dots \dots (I. 16)$$

$$m_{Dj} \cdot \mathfrak{A}_{ji}(M_{Di}) = M_{Di} \cdot \phi_{ij}(m_{Dj}), \quad \dots \dots \dots (I. 17)$$

$$m_{Dj} \cdot \mathfrak{A}_{ji}(m_{Di}) = m_{Di} \cdot \mathfrak{A}_{ij}(m_{Dj}). \quad \dots \dots \dots (I. 18)$$

3. Man denkt sich einen Balken, auf den viele Lasten P, Q, p und q wirken (Abb. I. 4 a). Abb. I. 4 a ist die elastische Biegelinie $f(P, Q, p, q)$, die sich in zwei Biegelinien $f(P, p)$ und $f(Q, q)$, (Abb. I. 4 b u. c), zerlegen lässt. Abb. I. 4 b lässt sich in zwei Biegelinien $f(P)$ und $f(p)$, (Abb. I. 4 d u. e) zerlegen. Abb. I. 4 c lässt sich auch in zwei Biegelinien $f(Q)$ und $f(q)$, (Abb. I. 4 f u. g), zerlegen.

Durch Benutzung von Gl. (I. 7), (I. 8) und (I. 9) erhält man zwischen den Abb. I. 4 d,e,f,g folgende Beziehungen :

Abb. I. 4 a~g.

$$\left. \begin{aligned} P \cdot f_P(Q) &= Q \cdot f_Q(P), \\ P \cdot f_P(q) &= q \cdot \mathfrak{U}_q(P), \\ p \cdot \mathfrak{U}_p(Q) &= Q \cdot f_Q(p), \\ p \cdot \mathfrak{U}_p(q) &= q \cdot \mathfrak{U}_q(p). \end{aligned} \right\}$$

aus denen sich die Summe

$$\begin{aligned} P \cdot \{f_P(Q) + f_P(q)\} + p \cdot \{\mathfrak{U}_p(Q) + \mathfrak{U}_p(q)\} \\ = Q \{f_Q(P) + f_Q(p)\} + q \{\mathfrak{U}_q(P) + \mathfrak{U}_q(p)\} \end{aligned}$$

ergibt.

Durch Einführung des Superpositionssatzes

$$\left. \begin{aligned} f_P(Q) + f_P(q) &= f_P(Q, q), \\ \mathfrak{U}_p(Q) + \mathfrak{U}_p(q) &= \mathfrak{U}_p(Q, q), \\ f_Q(P) + f_Q(p) &= f_Q(P, p), \\ \mathfrak{U}_q(P) + \mathfrak{U}_q(p) &= \mathfrak{U}_q(P, p). \end{aligned} \right\}$$

erhält man

$$P \cdot f_P(Q, q) + p \cdot \mathfrak{U}_p(Q, q) = Q \cdot f_Q(P, p) + q \cdot \mathfrak{U}_q(P, p)$$

.....(I. 19)

Gl. (I. 19) zeigt die Beziehung zwischen Abb. I. 4 b und Abb. I. 4 c.

Allgemein geschrieben lautet der Reziprozitätssatz wie folgt

$$\sum_{j=1}^j Q_j \cdot f_{Q_j}(P_1, P_2 \dots P_i) = \sum_{i=1}^i P_i \cdot f_{P_i}(Q_1, Q_2 \dots Q_j) \quad \text{.....(I. 20)}$$

Man kann auch für die Streckenlasten, die Momente, und die Drillmomente diese Gleichung benutzen.

II. Beispiele.

1. Die Kombination zwischen den Einzellasten (Abb. II. 1 a~c).

Abb. II. 1 a~c.

$$f = \frac{P}{6EI} (3lx^2 - x^3), \quad \frac{df}{dx} = \frac{P}{6EI} (6lx - 3x^2).$$

Abb. II. 1 a :

$$f_{21}(P_1) = \frac{P_1}{6EI} (3l_1l_2^2 - l_2^3), \quad f_{31}(P_1) = \frac{P_1}{6EI} (3l_1l_3^2 - l_3^3).$$

Abb. II. 1 b :

$$\begin{aligned} f_{12}(P_2) &= \frac{P_2}{6EI} (3l_2l_2^2 - l_2^3) + \frac{P_2}{6EI} (6l_2l_2 - 3l_2^2)(l_1 - l_2) \\ &= \frac{P_2}{6EI} (3l_1l_2^2 - l_2^3), \end{aligned}$$

$$f_{32}(P_2) = \frac{P_2}{6EI} (3l_2l_3^2 - l_3^3).$$

Abb. II. 1 c :

$$f_{13}(P_3) = \frac{P_3}{6EI} (3l_3 \cdot l_3^2 - l_3^3) + \frac{P_3}{6EI} (6l_3 \cdot l_3 - 3l_3^2)(l_1 - l_3) = \frac{P_3}{6EI} (3l_1 \cdot l_3^2 - l_3^3),$$

$$f_{23}(P_3) = \frac{P_3}{6EI} (3l_2 \cdot l_3^2 - l_3^3).$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore P_2 \cdot f_{21}(P_1) &= \frac{P_1 \cdot P_2}{6EI} (3l_1l_2^2 - l_2^3) = P_1 \cdot f_{12}(P_2), \\ P_3 \cdot f_{31}(P_1) &= \frac{P_1 \cdot P_3}{6EI} (3l_1l_3^2 - l_3^3) = P_1 \cdot f_{13}(P_3), \\ P_3 \cdot f_{32}(P_2) &= \frac{P_2 \cdot P_3}{6EI} (3l_2l_3^2 - l_3^3) = P_2 \cdot f_{23}(P_3). \end{aligned} \right\} \quad \text{.....[s. Gl. (I. 10)]}$$

2. Die Kombination zwischen Streckenlast und Einzellast (Abb. II. 2 a u. b).

Abb. II. 2 a u. b.

Abb. II. 2 b :

$$\mathfrak{M}_{12}(P_2) = 2 \int_0^{l/2} \frac{P_2}{48 EI} (3lx^2 - 4x^3) dx = \frac{P_2}{24 EI} [lx^3 - x^4]_0^{l/2} = \frac{P_2 l^4}{384 EI}.$$

$$\therefore P_2 \cdot f_{21}(q_1) = \frac{P_2 q_1 l^4}{384 EI} = q_1 \cdot \mathfrak{M}_{12}(P_2). \quad \dots\dots\dots [\text{s. Gl. (I.11)}]$$

3. Die Kombination zwischen den Streckenlasten (Abb. II. 3 a u. b).

Abb. II. 3 a u. b.

$$f(q_1) = \frac{q_1}{24 EI} (6a_1^2 x^2 - 4a_1 x^3 + x^4), \quad 0 \leq x \leq a_1.$$

$$f(q_1) = \frac{q_1}{EI} \left\{ \frac{a_1^4}{8} + \frac{a_1^3}{6} (x - a_1) \right\}, \quad a_1 \leq x \leq a_1 + a_2.$$

$$f(q_2) = \frac{q_2}{EI} \left\{ \frac{a_2(a_1 + a_2/2)x^2}{2} - \frac{a_2 x^3}{6} \right\}, \quad 0 \leq x \leq a_1.$$

Abb. II. 3 a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{12}(q_1) &= \frac{q_1 a_1^3}{EI} \int_{a_1}^{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{8} + \frac{x-a_1}{6} \right) dx \\ &= \frac{q_1 a_1^3}{EI} \left[\frac{a_1}{8} x - \frac{a_1}{6} x + \frac{x^2}{12} \right]_{a_1}^{a_1+a_2} = \frac{q_1 (2a_1^3 a_2^2 + 3a_1^4 a_2)}{24 EI}, \end{aligned}$$

Abb. II. 3 b :

$$\mathfrak{M}_{12}(q_2) = \frac{q_2 a_2}{EI} \int_0^{a_1} \left(\frac{a_1 + a_2/2}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} \right) dx = \frac{q_2 a_2}{EI} \left[\frac{a_1 + a_2/2}{6} x^3 - \frac{x^4}{24} \right]_0^{a_1} = \frac{q_2 (2a_1^3 a_2^2 + 3a_1^4 a_2)}{24 EI}.$$

$$\therefore q_2 \cdot \mathfrak{M}_{12}(q_1) = \frac{q_1 q_2 (2a_1^3 a_2^2 + 3a_1^4 a_2)}{24 EI} = q_1 \cdot \mathfrak{M}_{12}(q_2). \quad \dots\dots\dots [\text{s. Gl. (I.12)}]$$

4. Die Kombination zwischen Einzellast und Biegemoment (Abb. II. 4 a u. b).

Abb. II. 4 a u. b.

$$f(M_1) = \frac{M_1}{6 EI l} (2l^2 x - 3lx^2 + x^3),$$

$$f(P_2) = \frac{P_2}{48 EI} (3l^2 x - 4x^3), \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2};$$

$$\frac{df(P_2)}{dx} = \frac{P_2}{48 EI} (3l^2 - 12x^2), \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}.$$

Abb. II. 4 a :

$$f_{21}(M_1) = \frac{M_1}{6 EI l} \left(2l^2 \cdot \frac{l}{2} - 3l \cdot \frac{l^2}{4} + \frac{l^3}{8} \right) = \frac{M_1 l^2}{16 EI}.$$

Abb. II. 4 b :

$$\varphi_{12}(P_2) = \frac{P_2}{48 EI} \cdot 3l^2 = \frac{P_2 l^2}{16 EI}.$$

$$\therefore P_2 f_{21}(M_1) = \frac{M_1 P_2 l^2}{16 EI} = M_1 \cdot \varphi_{12}(P_2). \quad \dots\dots\dots [\text{s. Gl. (I.14)}]$$

5. Die Kombination zwischen Streckenlast und Biegemoment (Abb. II. 5 a u. b).

Abb. II. 5 a u. b.

$$f(M_1) = \frac{M_1}{6 EI l} (2l^2 x - 3lx^2 + x^3),$$

$$f(q_2) = \frac{q_2}{24 EI} (l^3 x - 2lx^3 + x^4),$$

$$\frac{df(q_2)}{dx} = \frac{q_2}{24 EI} (l^3 - 6lx^2 + 4x^3).$$

Abb. II. 5 a :

$$\mathfrak{U}_{21}(M_1) = \frac{M_1}{6EI} \int_0^l (2lx^2 - 3lx + x^3) dx = \frac{M_1}{6EI} \left[l^2x^2 - lx^3 + \frac{x^4}{4} \right]_0^l = \frac{M_1 l^3}{24EI},$$

Abb. II. 5 b :

$$\varphi_{12}(q_2) = \frac{q_2 l^3}{24EI},$$

$$\therefore q_2 \cdot \mathfrak{U}_{21}(M_1) = \frac{M_1 q_2 l^3}{24EI} = M_1 \cdot \varphi_{12}(q_2) \dots \dots \dots [\text{s. Gl. (I.15)}]$$

6. Die Kombination zwischen Einzeldrillmoment und Streckendrillmoment (Abb. II. 6 a u. b.).

Abb. II. 6 a u. b.

 Φ = Verdrehungswinkel, GJ_D = Torsionssteifigkeit, C_M = Wölbwiderstand, M_w° = Wölbverdrillmomentenintegral,

$$\beta = \sqrt{\frac{GJ_D}{EC_M}}, \quad \alpha = \frac{l}{2}\beta;$$

$$GJ_D \cdot \Phi(M_{D1}) = M_w^\circ(M_{D1}) - \frac{M_{D1}}{2\beta} \cdot \frac{\sinh \beta x_1}{\cosh \alpha},$$

$$GJ_D \cdot \Phi(m_{D2}) = M_w^\circ(m_{D2}) - \frac{m_{D2}}{\beta^2} \left(1 - \frac{\sinh \beta x_2 + \sinh \beta x_1}{\sinh 2\alpha} \right).$$

Abb. II. 6 a :

$$\begin{aligned} GJ_D \cdot \mathfrak{U}_{21}(M_{D1}) &= 2 \int_0^{l/2} \left(M_{D1} \cdot \frac{x}{2} - \frac{M_{D1}}{2\beta} \cdot \frac{\sinh \beta x}{\cosh \alpha} \right) dx \\ &= 2 \left[\frac{M_{D1} \cdot x^2}{4} - \frac{M_{D1}}{2\beta^2} \cdot \frac{\cosh \beta x}{\cosh \alpha} \right]_0^{l/2} = M_{D1} \left\{ \frac{l^2}{8} - \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh \alpha} \right) \right\}, \end{aligned}$$

Abb. II. 6 b :

$$GJ_D \cdot \Phi_{12}(m_{D2}) = \frac{m_{D2} \cdot l^2}{8} - \frac{m_{D2}}{\beta^2} \left(1 - \frac{2 \sinh \alpha}{\sinh 2\alpha} \right) = m_{D2} \left\{ \frac{l^2}{8} - \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh \alpha} \right) \right\}.$$

$$\therefore M_{D1} \Phi_{12}(m_{D2}) = \frac{M_{D1} \cdot m_{D2}}{GJ_D} \left\{ \frac{l^2}{8} - \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh \alpha} \right) \right\} = m_{D2} \cdot \mathfrak{U}_{21}(M_{D1}) \dots \dots \dots [\text{s. Gl. (I.17)}]$$

7. Die Kombination mehrerer Einzellasten untereinander (Abb. II. 7 a u. b.).

$$f(P_1, P_2) = \frac{P_1(l-x)}{12EI} \left\{ \frac{3}{4}l^2 - (l-x)^2 \right\} + \frac{P_2(l-x)}{24EI} \left\{ \frac{15}{16}l^2 - (l-x)^2 \right\},$$

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l;$$

$$f(Q_1, Q_2) = \frac{Q_1 x}{18EI} \left(\frac{8}{9}l^2 - x^2 \right) + \frac{Q_2 \cdot x}{30EI} \left(\frac{24}{25}l^2 - x^2 \right), \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}.$$

Abb. II. 7 a u. b.

Abb. II. 7 a :

$$\begin{aligned} f_{Q1}(P_1, P_2) &= \frac{P_1}{12EI} \left(l - \frac{2}{3}l \right) \left\{ \frac{3}{4}l^2 - \left(l - \frac{2}{3}l \right)^2 \right\} + \frac{P_2}{24EI} \\ &\times \left(l - \frac{2}{3}l \right) \left\{ \frac{15}{16}l^2 - \left(l - \frac{2}{3}l \right)^2 \right\} = \frac{P_1 l}{36EI} \left(\frac{23}{36}l^2 \right) \\ &+ \frac{P_2 l}{72EI} \left(\frac{119}{144}l^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{Q2}(P_1, P_2) &= \frac{P_1}{12EI} \left(l - \frac{4}{5}l \right) \left\{ \frac{3}{4}l^2 - \left(l - \frac{4}{5}l \right)^2 \right\} + \frac{P_2}{24EI} \\ &\times \left(l - \frac{4}{5}l \right) \left\{ \frac{15}{16}l^2 - \left(l - \frac{4}{5}l \right)^2 \right\} = \frac{P_1 l}{60EI} \left(\frac{71}{60}l^2 \right) \\ &+ \frac{P_2 l}{60EI} \left(\frac{359}{400}l^2 \right). \end{aligned}$$

Abb. II. 7 b :

$$f_{P1}(Q_1, Q_2) = \frac{Q_1}{18EI} \cdot \frac{l}{2} \left(\frac{8}{9}l^2 - \frac{l^2}{4} \right) + \frac{Q_2}{30EI} \cdot \frac{l}{2} \left(\frac{24}{25}l^2 - \frac{l^2}{4} \right) = \frac{Q_1 \cdot l}{36EI} \left(\frac{23}{36}l^2 \right) + \frac{Q_2 \cdot l}{60EI} \left(\frac{71}{60}l^2 \right),$$

$$f_{P2}(Q_1, Q_2) = \frac{Q_1}{18EI} \cdot \frac{l}{4} \left(\frac{8}{9}l^2 - \frac{l^2}{16} \right) + \frac{Q_2}{30EI} \cdot \frac{l}{4} \left(\frac{24}{25}l^2 - \frac{l^2}{16} \right) = \frac{Q_1 \cdot l}{72EI} \left(\frac{119}{144}l^2 \right) + \frac{Q_2 \cdot l}{120EI} \left(\frac{359}{400}l^2 \right).$$

$$P_1 f_{P_1}(Q_1, Q_2) + P_2 f_{P_2}(Q_1, Q_2) = \frac{P_1 Q_1 l^3}{36 EI} \left(\frac{23}{36} \right) + \frac{P_1 Q_2 l^3}{60 EI} \left(\frac{71}{60} \right) + \frac{P_2 Q_1 l^3}{72 EI} \left(\frac{119}{144} \right) + \frac{P_2 Q_2 l^3}{120 EI} \left(\frac{359}{400} \right),$$

$$Q_1 \cdot f_{Q_1}(P_1, P_2) + Q_2 \cdot f_{Q_2}(P_1, P_2) = \frac{P_1 Q_1 l^3}{36 EI} \left(\frac{23}{36} \right) + \frac{P_1 Q_2 l^3}{60 EI} \left(\frac{71}{60} \right) + \frac{P_2 Q_1 l^3}{72 EI} \left(\frac{119}{144} \right) + \frac{P_2 Q_2 l^3}{120 EI} \left(\frac{359}{400} \right).$$

$$\therefore P_1 \cdot f_{P_1}(Q_1, Q_2) + P_2 \cdot f_{P_2}(Q_1, Q_2) = Q_1 \cdot f_{Q_1}(P_1, P_2) + Q_2 \cdot f_{Q_2}(P_1, P_2). \quad \dots\dots\dots [\text{s. Gl. (I.20)}]$$

III. Anwendungen.

1. Wie gross ist die innere Ergänzungsarbeit im eingespannten, einige Lasten belasteten Balken, wenn an den Einspannungen ein zusätzliches Moment wirkt? (Abb. III. 1 a).

Abb. III. 1 a~c.

Lösung : (Abb. III. 1 b u. c)

Wenn an einem eingespannten Ende ein Moment M wirkt, ergibt sich aus ihm eine Formänderung $f(M)$ des Balkens.

Mit Gl. (I. 20) erhält man

$$M \cdot \varphi_M(P, Q, q) = P \cdot f_P(M) + Q \cdot f_Q(M) + q \cdot \mathcal{U}_q(M).$$

Da $\varphi_M(P, Q, q) = 0$ ist,

so ergibt sich

$$P \cdot f_P(M) = 0, \quad Q \cdot f_Q(M) = 0, \quad q \cdot \mathcal{U}_q(M) = 0. \quad \dots\dots\dots (\text{III.1})$$

Die halbe "potentielle Energie" oder die innere Ergänzungsarbeit infolge eines äusseren Momentes an einem eingespannten Ende ist Null.

Beispiele :

(i) Die Kombination zwischen dem eingespannten Balken und dem freigestützten Balken mit Endmoment. (Abb. III. 2 u. Abb. III. 3) und (Abb. III. 4 u. Abb. III. 5).

Abb. III. 2 a~c.

Abb. III. 3 a u. b.

Die in Abb. III. 2 b,c und Abb. III. 3 b dargestellten Abbildungen sind Momentlinien.

$$\text{Die halbe "potentielle Energie" = die innere Ergänzungsarbeit} = \int \frac{M(P) \cdot M(M)}{2 EI} dx \equiv \text{Null};$$

denn

$$\frac{1}{2 EI} \int \{ (\text{Abb. III. 2 b}) \cdot (\text{Abb. III. 3 b}) + (\text{Abb. III. 2 c}) \cdot (\text{Abb. III. 3 b}) \} dx$$

$$= \frac{1}{2 EI} \left\{ -\frac{l}{6} M \left(\frac{4 Pl}{27} + \frac{2 \cdot 2 Pl}{27} \right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{9} Pl \cdot M \left(\frac{2 l}{3} + \frac{2 l}{3} \right) \right\} = 0.$$

Abb. III. 4 a~c.

Abb. III. 5 a u. b.

$$\int \frac{M(q) \cdot M(M_1, M_2)}{2 EI} dx = \frac{1}{2 EI} \int \{ (\text{Abb. III. 4 b}) \cdot (\text{Abb. III. 5 b}) + (\text{Abb. III. 4 c}) \cdot (\text{Abb. III. 5 b}) \} dx$$

$$= \frac{1}{2 EI} \left\{ -\frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{12} (M_1 + M_2) + \frac{l}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} (M_1 + M_2) \right\} = 0.$$

(ii) Die Kombination zwischen dem eingespannten Balken und dem freigestützten Balken mit Endmoment. (Abb. III. 6 u. Abb. III. 7).

Abb. III. 6 a~g.

Abb. III. 7 a u. b.

$$\int \frac{M(P, Q, q) \cdot M(M)}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int \{ (\text{Abb. III. 6 b}) \cdot (\text{Abb. III. 7 b}) + (\text{Abb. III. 6 c}) \cdot (\text{Abb. III. 7 b}) \\ + (\text{Abb. III. 6 d}) \cdot (\text{Abb. III. 7 b}) + (\text{Abb. III. 6 e}) \cdot (\text{Abb. III. 7 b}) + (\text{Abb. III. 6 f}) \cdot (\text{Abb. III. 7 b}) \\ + (\text{Abb. III. 6 g}) \cdot (\text{Abb. III. 7 b}) \} dx = \frac{l}{3} \cdot \frac{3Pl}{16} M - \frac{l}{4} \cdot \frac{Pl}{4} M + \frac{l}{3} \cdot \frac{4Ql}{27} M - \frac{1}{6} \left(\frac{2l}{3} + \frac{2l}{3} \right) \frac{2Ql}{9} M \\ + \frac{l}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} M - \frac{l}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} M = 0.$$

Bemerkung :

Die halbe "potentielle Energie" oder die innere Ergänzungsarbeit infolge eines äusseren Momentes an einem eingespannten Ende ist Null. Durch Benutzung dieses Satzes kann man die statisch unbestimmten Momente berechnen.

Abb. III. 8 a~d.

Abb. III. 9 a u. b.

Abb. III. 10 a u. b.

Um die in Abb. III. 8 a dargestellten statisch unbestimmten Momente X_1 und X_2 zu berechnen, zerlegt man zuerst die Momentenlinien infolge der Abb. III. 8 a in einzelne Momentenlinien, die in Abb. III. 8 b, c, d gezeigt sind. Wenn man an den eingespannten Enden die beliebigen äusseren Momente M_1 und M_2 anbringt wie in Abb. III. 9 und Abb. III. 10 gezeigt ist, ergeben sich folgende zwei Gleichungen :

$$\text{Ergänzungsarbeit} = \frac{1}{2EI} \int_0^l \{ (\text{Abb. III. 8 b}) \cdot (\text{Abb. III. 9 b}) + (\text{Abb. III. 8 c}) \cdot (\text{Abb. III. 9 b}) \\ + (\text{Abb. III. 8 d}) \cdot (\text{Abb. III. 9 b}) \} dx = \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{9} PlM_1 \left(\frac{l}{3} + \frac{4}{3} l \right) + \frac{l}{3} X_1 M_1 + \frac{l}{6} X_2' M_1 \right\} \equiv 0,$$

$$\text{Ergänzungsarbeit} = \frac{1}{2EI} \int_0^l \{ (\text{Abb. III. 8 b}) \cdot (\text{Abb. III. 10 b}) + (\text{Abb. III. 8 c}) \cdot (\text{Abb. III. 10 b}) \\ + (\text{Abb. III. 8 d}) \cdot (\text{Abb. III. 10 b}) \} dx = \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{9} PlM_2 \left(\frac{2l}{3} + \frac{2l}{3} \right) + \frac{l}{6} X_1 M_2 + \frac{l}{3} X_2 M_2 \right\} \equiv 0,$$

also

$$\left. \begin{aligned} 2X_1 + X_2 &= -\frac{10}{27}Pl \\ X_1 + 2X_2 &= -\frac{8}{27}Pl \end{aligned} \right\},$$

und

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{10}{27} & 1 \\ -\frac{8}{27} & 2 \end{vmatrix} Pl}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{4}{27}Pl, \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\frac{10}{27} \\ 1 & -\frac{8}{27} \end{vmatrix} Pl}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{27}Pl.$$

2. Für die in Abb. III. 11 dargestellte Platte, auf die die gleichmässige Belastung q_1 wirkt, nimmt man die Durchbiegung am Punkt m $f_{21}(q)$ an.

Abb. III. 11 a u. b.

Frage: Wie gross ist das Volumen $V_{12}(P_2)$ der Plattenformänderung, wenn die Einzellast P_2 den Punkt m belastet?

Lösung: (Abb. III. 11 a u. b).

Mit Gl. (I. 11) erhält man

$$q_1 \cdot V_{12}(P_2) = P_2 \cdot f_{21}(q_1),$$

und

$$V_{12}(P_2) = \frac{P_2}{q_1} f_{21}(q_1). \quad \text{.....(III. 2)}$$

Bemerkung:

Gleichung $V_{12}(P_2) = P_2/q_1 \cdot f_{21}(q_1)$ kann zur Berechnung der Platte benutzt werden, die infolge der Einzellast P_2 eine Formänderung besitzt, d.h. in Abb. III. 12 c hat das Volumen der Plattenformänderung den bestimmten Wert $V_{12}(P_2)$ (Abb. III. 12 b).

In dieser Gleichung nimmt man nun $P_2 = q_1 F$ wie bei der Fahrbahnplatte einer Brücke an, wobei F die Belastungsfläche des Rades ist.

Es ergibt sich

$$V_{12}(P_2) = \frac{q_1 \cdot F}{q_1} \cdot f_{21}(q_1) = F \cdot f_{21}(q_1). \quad \text{.....(III. 3)}$$

3. Der durchlaufende Balken.

Abb. III. 12 a~c.

Abb. III. 13 a u. b.

Für den in Abb. III. 13 dargestellten Balken erhält man mit Gl. (I. 11)

$$q_2 \cdot \mathfrak{U}_{21}(P_1) = P_1 \cdot f_{12}(q_2), \quad \text{und} \quad \mathfrak{U}_{21}(P_1) = \frac{P_1}{q_2} \cdot f_{12}(q_2). \quad \text{.....(III. 4)}$$

Wenn sich die Einzellast P_1 auf dem Balken fortbewegt und man annimmt, dass die in Abb. III. 13 b dargestellte elastische Biegelinie schon bekannt ist, kann man die Biegelinienfläche $\mathfrak{U}_{21}(P_1)$ infolge P_1 mit Gl. (III. 4) direkt berechnen.

Ist nun die in Abb. III. 14 a dargestellte elastische Biegelinie bekannt, gibt es die maximalen Durchbiegungen $I f_{12}(q_2)_{\max.}$, $II f_{12}(q_2)_{\max.}$, $III f_{12}(q_2)_{\max.}$ auf den Punkten m_I , m_{II} , m_{III} . Wenn die Verkehrslast P_1 auf die Punkte m_I , m_{II} , m_{III} wirkt, ergeben sich infolge Gl. (III. 4) maximale

Abb. III. 14 a~d.

Biegelinienflächen $I \mathcal{U}_{21}(P_1)_{\max.}$, $II \mathcal{U}_{21}(P_1)_{\max.}$, $III \mathcal{U}_{21}(P_1)_{\max.}$ wie Abb. III. 14 b,c,d zeigen.

Da im allgemeinen

$$I f_{12}(q_2)_{\max.} > II f_{12}(q_2)_{\max.} > III f_{12}(q_2)_{\max.} \text{ ist,}$$

so ergibt sich

$$I \mathcal{U}_{21}(P_1)_{\max.} > II \mathcal{U}_{21}(P_1)_{\max.} > III \mathcal{U}_{21}(P_1)_{\max.} \quad \dots\dots\dots (III.5)$$

In gleicher Weise erhält man die folgende Beziehung :

$$I f_{12}(q_2)_{\max.} : II f_{12}(q_2)_{\max.} : III f_{12}(q_2)_{\max.} = I \mathcal{U}_{21}(P_1)_{\max.} : II \mathcal{U}_{21}(P_1)_{\max.} : III \mathcal{U}_{21}(P_1)_{\max.} \quad \dots\dots\dots (III.6)$$

Abb. III. 15 a~d.

Für die elastischen Biegelinien der in Abb. III. 15 dargestellten Schrägseilhängebrücke erhält man, mit Gl. (I. 12) :

$$q_1 \cdot \mathcal{U}_{12}(q_2) = q_2 \cdot \mathcal{U}_{21}(q_1). \quad \dots\dots\dots (III.7)$$

Setzt man in Gl. (III. 7) $q_1 = q_2$, so ergibt sich

$$\mathcal{U}_{12}(q_2) = \mathcal{U}_{21}(q_1). \quad \dots\dots\dots (III.8)$$

4. Der Rahmen.

Abb. III. 16 a u. b.

Für die elastischen Biegelinien des in Abb. III. 16 dargestellten Rahmens erhält man mit Gl. (I. 19) oder (I. 20)

$$P \cdot f_P(Q, q) + p \cdot \mathcal{U}_p(Q, q) = Q \cdot f_Q(P, p) + q \cdot \mathcal{U}_q(P, p). \quad \dots\dots\dots (III.9)$$

Abb. III. 17 a u. b.

Für die elastischen Biegelinien des in Abb. III. 17 dargestellten Rahmens, auf den die Streckenlast

p , die Einzellasten P, Q und das Moment M wirken, erhält man mit Gl. (I. 20)

$$P \cdot f_P(M, Q) + p \cdot \mathfrak{A}_p(M, Q) = M \cdot \varphi_M(P, p) + Q \cdot f_Q(P, p) \dots \dots \dots (\text{III.10})$$

5. Der versteifte Stabbogen und die Hängebrücke.

Abb. III. 18

Abb. III. 19

Man nimmt an, dass die Bogenkurve des versteiften Stabbogens und die Durchhangkurve der Hängebrücke eine quadratische Parabel sind und dass diese Brücken einfach statisch unbestimmt sind. An der Schnittstelle in Bogen- oder Kable-Mitte wirke die Horizontalkomponente $H=1$, wie dieses Abb. III. 18 und Abb. III. 19 zeigen. Man nimmt an, dass die ganze innere Arbeit der Brücke gleich ΣW , die innere Arbeit infolge des Biegemomentes in dem versteiften Balken gleich W_V und dass das Verhältnis dieser inneren Arbeiten gleich γ sei. Dann ergibt sich:

$$\gamma = \frac{W_V}{\Sigma W} = \frac{\int_0^l \frac{M(x)^2}{2EI} dx}{\int_0^l \frac{M(x)^2}{2EI} dx + \mathfrak{A} \int_0^l \frac{Q(x)^2}{2GF} dx + \int_0^l \frac{N(x)^2}{2EF} dx + \Sigma \frac{S^2 \mathcal{L}}{2EF_S}} \dots \dots \dots (\text{III.11})$$

wobei $M(x)$, $Q(x)$ und $N(x)$ das Biegemoment, die Schubkraft und die Normalkraft des versteiften Balkens, ferner S die Normalkräfte der Stäbe und der Seile sind.

Schreibt man ausführlich, so ergibt sich in Abb. III. 18 und Abb. III. 19

$$\int_0^l \frac{M(x)^2}{2EI} dx = \frac{8f^2 l}{2 \cdot 15 EI}, \quad \mathfrak{A} \int_0^l \frac{Q(x)^2}{2GF} dx = \frac{\mathfrak{A} \cdot 16 f^2}{2 \cdot 3 GFl}, \quad \int_0^l \frac{N(x)^2}{2EF} dx = -\frac{l}{2EF} \dots \dots \dots (\text{III.12})$$

γ ist im allgemeinen 0.95~0.98 beim versteiften Stabbogen und 0.90~0.95 bei der Hängebrücke.

Wenn die gleichmässige Streckenlast q wie in Abb. III. 20 a und Abb. III. 21 a wirkt, erhält man die Momentenlinie, die Schubkraftlinie und die elastische Biegelinie des versteiften Balkens wie in der Abb. III. 20 b,c,d und Abb. III. 21 b,c,d gezeigt ist. Diese Linien sind der $(1-\gamma)$

Abb. III. 20 a~d.

Abb. III. 21 a~d.

Abb. III. 22 a~d.

Abb. III. 23 a~d.

fachen Linien des frei aufliegenden Balkens gleich.

Für die in Abb. III. 22 b,d und Abb. III. 23 b,d dargestellten elastischen Biegelinien des versteiften Balkens erhält man mit Gl. (I. 11)

$$q_1 \cdot \mathfrak{U}_{12}(P_2) = P_2 f_{21}(q_1), \quad \text{und} \quad \mathfrak{U}_{12}(P_2) = \frac{P_2}{q_1} \cdot f_{21}(q_1),$$

Da $f_{21}(q_1) = \frac{5 q_1 l^4}{384 EI} (1-r)$ ist, so ergibt sich

$$\mathfrak{U}_{12}(P_2) = \frac{P_2}{q_1} \cdot \frac{5 q_1 l^4}{384 EI} (1-r) = \frac{5 P_2 l^4}{384 EI} (1-r). \quad \text{.....(III.13)}$$

Der Ausdruck von $\mathfrak{U}_{12}(P_2)$ wird schließlich nur eine Funktion von P_2 .

6, Die Schale.

Abb. III. 24 a u. b.

Für die in Abb. III. 24 dargestellten Formänderung der Schale, auf die die gleichmässigen Lasten p, q und die Einzellasten P, Q wirken, erhält man auch mit Gl. (I. 19) oder (I. 20)

$$P \cdot f_P(Q, q) + p \cdot V_p(Q, q) = Q \cdot f_Q(P, p) + q \cdot V_q(P, p), \quad \text{.....(III.14)}$$

wobei $V_p(Q, q)$ und $V_q(P, p)$ das Volumen der Schaleformänderung sind.

(Received June 11, 1962)