【研究ノート】

クロソイド部材をもつ連続桁およびラーメンの立体解析

Three-Dimensional Analysis of Continuous Girders
and Frames with Clothoidal Members山崎 徳也*・太田 俊昭**・彦坂 照***
By Tokuya Yamasaki, Toshiaki Ohta and Hiroshi Hikosaka

1. 緒 言

道路の平面線形要素は従来直線と円弧とに限られていたが、近年クロソイドが第3の主要線形要素として脚光を浴びるようになり、わが国でもすでにクロソイド曲線橋の施工例が報告されている。本研究は、かかるクロソイド部材に対する平面¹⁾(軸面内)に荷重が作用する場合)ならびに立体(軸面に垂直に荷重が作用する場合)たわみ角式を誘導したもので、クロソイド部材をもつ連続桁や立体 ラーメンなどの厳密理論解を可能ならしめるものである。

クロソイドはフレネル(Fresnel)の積分になり、演算が相当面倒であるので、実用に便ならしめるため誘導たわみ角式の諸係数および荷重項すべて電子計算機を用いて数表ならびに図表化し活用をはかったが、本文では紙面の都合上、その一部を要約して示すにとどめる。

なおクロソイドの定義および数学的特性などについては文献2)を参照されたい。

2. たわみ角式の誘導

たわみ角式の誘導には、さきに著者らが円弧部材の立体たわみ角式で用いた手法³⁾をそのまま踏襲するが、不静定力の作用点のみは、演算の簡易化のため弾性重心の代りに固定座標 (x, y) の原点を選ぶこととする。ここに取り扱うクロソイド部材は等断面とし、曲げおよびねじりモーメントの影響に加えて、軸力ならびにせん断力の影響もすべて考慮する。

任意の接線角 φ_1, φ_2 に対応する2点A, Bを両材端とする

図-1

クロソイド部材 AB が直交座標 (x, y, z) の $x-y$ 平面上にあるものとし、静定基本系としてA端自由, B端固定の片持ばりを採用する(図-1参照)。まず原点OとAを剛桿($I=\infty$)で結び、O点に加えた不静定量 $M^x, M^y, M^z, F^x, F^y, F^z$ と荷重とによって生ずる部材のひずみエネルギーを求め、Castiglianoの定理を用いて同点の変形成分を算定する。ついで別に両端弾性支持の部材ABを考え、幾何学的条件より両材端とO点の変形成分の関係式を求めれば、不静定量が両材端の変形成分で一般表示できる。しかるに両材端の端モーメントは容易に不静定量で表わすことができ、上記結果を代入すれば、ただちに両材端の端モーメントと変形成分の関係式、すなわちたわみ角式が誘導され結局次式となる。

立体たわみ角式:

$$\left. \begin{aligned} M_{AB}^x &= EK_c(\alpha_A^x \theta_A^x + \beta_A^x \theta_B^x + \gamma_A^x \theta_A^x \\ &\quad + \delta_A^x \theta_B^x + \varepsilon_A^x R) + C_{AB}^x \\ M_{BA}^x &= EK_c(\beta_B^x \theta_A^x + \alpha_B^x \theta_B^x + \delta_B^x \theta_A^x \\ &\quad + \gamma_B^x \theta_B^x + \varepsilon_B^x R) + C_{BA}^x \\ M_{AB}^y &= EK_c(\gamma_A^y \theta_A^y + \delta_A^y \theta_B^y + \alpha_A^y \theta_A^y \\ &\quad + \beta_A^y \theta_B^y + \varepsilon_A^y R) + C_{AB}^y \\ M_{BA}^y &= EK_c(\delta_B^y \theta_A^y + \gamma_B^y \theta_B^y + \beta_B^y \theta_A^y \\ &\quad + \alpha_B^y \theta_B^y + \varepsilon_B^y R) + C_{BA}^y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

平面たわみ角式:

$$\left. \begin{aligned} M_{AB}^x &= EK_z(\alpha_A^x \theta_A^x + \beta_A^x \theta_B^x + \gamma_A^x R^x \\ &\quad + \delta_A^x \Delta l / A_0) + C_{AB}^x \\ M_{BA}^x &= EK_z(\beta_B^x \theta_A^x + \alpha_B^x \theta_B^x + \gamma_B^x R^x \\ &\quad + \delta_B^x \Delta l / A_0) + C_{BA}^x \\ H &= EK_z(\alpha_C^x \theta_A^x + \beta_C^x \theta_B^x + \gamma_C^x R^x \\ &\quad + \gamma_C^x \Delta l / A_0) / A_0 + H \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $K_c = I_c / S_0$, $K_z = I_z / S_0$, $S_0 = S_2 - S_1$ (部材長)

A_0 : クロソイドのパラメーター²⁾

3. 係数および荷重項の数値計算

式(1)および式(2)のたわみ角式の係数および荷重項の算定は文献2)にならって単位クロソイド部材を対象に行ない、単に長さの要素のみを A_0 倍(A_0 はクロソイドのパラメーター)することによって実用に供しようとした。なお、ねじりモーメント、軸力およびせん断力の影響をそれぞれつぎの4個の無次元量により導入した。

ねじりモーメント: $\kappa = EI_r / GJ$, 軸力: $\nu = S_0 / r_0$

z 軸方向のせん断力: $\mu_1 = k_1 EI_r / GAS_0^2$

r 軸方向のせん断力: $\mu_2 = k_2 EI_r / GAS_0^2$

ここに、 EI_r , EI_z : r, z 軸に関する曲げ剛性

GJ : ねじり剛性, G : せん断弾性係数

S_0 : 部材長, A : 断面積

k_1, k_2 : 断面形状による定数

$r_0 = \sqrt{I_z / A}$: 断面2次半径

クロソイド部材を規定するには始点Oから両材端A, Bまでの曲線長 S_1, S_2 を与えればよく、これら S_1, S_2 の各種の組み合わせに対して係数および荷重項を算定した。

図-2のごとく、部材長 S_0 , 中心角 2α の円弧部材と同じ部

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学教室

** 学生会員 工修 九州大学大学院 工学研究科 博士課程 在学

*** 正会員 九州大学助手 工学部土木工学教室

図-2

材長のクロノイド部材とを比較すれば、両材端における接線の交角は円弧部材では 2α 、クロノイド部材では $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ となる。いまかかるクロノイド部材を $\varphi = 2\alpha$ なる円弧部材で近似した場合、両者のたわみ角式係数と荷重項を比較すれば以下のとおりである。クロノイド部材は $\varphi = 0.5$ ラジアン ($S_1 = 0, S_2 = 1.0$) と $\varphi = 0.7$ ラジアン ($S_1 = 0.2, S_2 = 1.2$) の2種をとり、立体的たわみ角式の諸係数を円弧部材のそれと対照して表-1に掲げた。表-1より、各係数はつぎの3グループに分けられることがわかる。

- (i) 円弧、クロノイド両部材の係数値がほぼ等しいもの
..... β^r, β^t
- (ii) 両材端AとBの係数値がクロノイド部材では形状上の非対称性より一致しないが、円弧部材では対称性より一致し、しかもクロノイド部材の両係数のほぼ中間値となるもの..... $\alpha^r, \alpha^t, r^r, r^t$
- (iii) 円弧、クロノイド両部材の係数値がまったく異なるもの..... δ^r, δ^t

これらの中で、(ii)の α^r のみは円弧、クロノイド両部材間の差異が小さく、また α^r に劣らず曲げモーメントに大なる影響をもつ β^r が(i)に属するところから、結局曲げモーメントについては、クロノイド部材を円弧部材で近似してもかなりの精度を期待できることが予想される。しかし $\alpha^t, r^r, r^t, \delta^r$ および δ^t がいずれも円弧、クロノイド両部材間で大きな差異をもつ

表-1

部材	$\varphi = 2\alpha = 0.5$			$\varphi = 2\alpha = 0.7$		
	円弧	クロノイド		円弧	クロノイド	
κ	$\alpha_A^r = \alpha_B^r$	α_A^r	α_B^r	$\alpha_A^t = \alpha_B^t$	α_A^t	α_B^t
1	3.901	3.977	3.783	3.809	3.922	3.657
2	3.870	3.963	3.711	3.752	3.891	3.553
3	3.840	3.952	3.645	3.697	3.863	3.459
	$\alpha_A^t = \alpha_B^t$	α_A^t	α_B^t	$\alpha_A^t = \alpha_B^t$	α_A^t	α_B^t
1	1.089	1.021	1.181	1.158	1.066	1.285
2	0.586	0.524	0.681	0.653	0.568	0.778
3	0.413	0.358	0.511	0.482	0.400	0.601
	$\beta_A^r = \beta_B^r$	$\beta_A^t = \beta_B^t$		$\beta_A^r = \beta_B^r$	$\beta_A^t = \beta_B^t$	
1	2.024	2.001		2.044	2.021	
2	2.030	2.004		2.055	2.029	
3	2.036	2.005		2.063	2.033	
	$\beta_A^t = \beta_B^t$	$\beta_A^t = \beta_B^t$		$\beta_A^t = \beta_B^t$	$\beta_A^t = \beta_B^t$	
1	-0.960	-0.939		-0.923	-0.902	
2	-0.461	-0.444		-0.427	-0.411	
3	-0.295	-0.280		-0.264	-0.250	
	$r_A^r = r_A^t = -r_B^r = -r_B^t$	$r_A^r = r_A^t$	$r_B^r = r_B^t$	$r_A^r = r_A^t = -r_B^r = -r_B^t$	$r_A^r = r_A^t$	$r_B^r = r_B^t$
1	-0.488	-0.248	0.711	-0.666	-0.440	0.870
2	-0.482	-0.205	0.735	-0.651	-0.393	0.879
3	-0.476	-0.191	0.732	-0.637	-0.375	0.862
	$\delta_A^r = \delta_B^r = -\delta_A^t = -\delta_B^t$	$\delta_A^r = \delta_B^r$	$\delta_B^r = \delta_A^t$	$\delta_A^r = \delta_B^r = -\delta_A^t = -\delta_B^t$	$\delta_A^r = \delta_B^r$	$\delta_B^r = \delta_A^t$
1	0.008	0.256	0.240	0.022	0.268	0.225
2	0.012	0.215	0.192	0.032	0.231	0.169
3	0.018	0.202	0.172	0.040	0.221	0.143

表-2

(単位: PS_0)

κ	$\varphi = 2\alpha = 0.5$ ($\mu_1 = 0$)			$\varphi = 2\alpha = 0.7$ ($\mu_1 = 0$)		
	円弧	クロノイド		円弧	クロノイド	
	$-C_A^r = C_B^r$	$-C_A^r$	C_B^r	$-C_A^r = C_B^r$	$-C_A^r$	C_B^r
1	0.1269	0.1262	0.1269	0.1287	0.1279	0.1288
2	0.1275	0.1268	0.1277	0.1298	0.1290	0.1300
3	0.1281	0.1273	0.1283	0.1308	0.1299	0.1310
4	0.1286	0.1278	0.1289	0.1317	0.1308	0.1318
	$C_A^t = C_B^t$	C_A^t	C_B^t	$C_A^t = C_B^t$	C_A^t	C_B^t
1	0.0003	-0.0077	0.0084	0.0009	-0.0073	0.0091
2	0.0005	-0.0063	0.0073	0.0013	-0.0057	0.0083
3	0.0006	-0.0057	0.0070	0.0016	-0.0050	0.0083
4	0.0008	-0.0054	0.0070	0.0020	-0.0045	0.0085

ゆえ、ねじりモーメントについて上記のごとき近似を行なうことは危険といわねばならず、つぎの荷重項の比較からもこのことは裏付けられる。すなわち表-2は、部材中間点に集中荷重 P が作用する場合の立体的たわみ角式の荷重項を示したもので、 C_{AB}^r, C_{BA}^r については円弧、クロノイド部材間の差異が $\pm 1\%$ 程度であるのに対し、 C_{AB}^t, C_{BA}^t ではきわめて大きな差異が認められる。以上の結果より、クロノイド部材が非対称形状であることが、ねじりに対してきわめて不安定な要因となっており、ねじりに関しては円弧部材の理論で代用しえないことが確認される。

さて、荷重項 C^r, C^t, C^s は周知のごとく両端固定ばりの固定端モーメントである。これら荷重項の算定結果をもとに、クロノイド形状および断面性状が両端固定クロノイドばりの端モーメントにおよぼす影響について、以下2, 3の考察を加えてみる。

(i) 曲率の影響

r 軸に関する固定端曲げモーメント C_{AB}^r, C_{BA}^r は部材の曲率の影響をほとんど受けて、曲線長スパンとする換算直線材の固定端モーメントに対する増加分は高々3%である。しかし固定端ねじりモーメントについては、曲率の増加とともに C_{AB}^t は急減少、 C_{BA}^t は急増加という非対称特性をもつ(図-3参照)。

(ii) $\kappa = EI_r/GJ$ の影響

κ の増加とともに r 軸に関する固定端曲げモーメント C_{AB}^r, C_{BA}^r はいずれも増加する傾向にあるが、その割合は無視できる。しかし固定端ねじりモーメントについては、図-3に示すごとく C_{AB}^t は κ の増加につれて急激に減少するが、 C_{BA}^t は曲率小なる範囲

図-3 集中荷重 P に対する最大固定端ねじりモーメント

($\varphi < 0.3$) では κ が大なるほど減少し、それ以上の曲率では急増する。

(iii) せん断力の影響

前に述べたごとく、クロノイド部材に対するせん断力の影響は無次元量 μ_1, μ_2 によって導入される。軸面に垂直な荷重を受ける場合、固定端の最大曲げおよび最大ねじりモーメントにおよぼす μ_1 の効果は小さく、特に集中荷重が部材の中央点付近に作用する場合や満載等分布荷重が作用する場合には、せん断力の影響をまったく受けない。他方、軸面内荷重に対するせん断力の影響は部材の曲率とともに増加するが、本研究で取り扱った $S_0/r_0=20\sim100$ 程度の部材では、たかだか 5% 増までである。

図-4

(iv) 軸力の影響

クロノイドのごとき伸縮部材では、軸力が軸面内曲げに少なからぬ影響をおよぼし、その効果は部材が細長い場合に特に顕著である。図-4 は、軸面内法線方向集中荷重 $P=1$ が A 端から B 端に移動する場合の、固定端曲げモーメント C_{AB}^m の変化を、 $S_0/r_0=20, 50, 100$ の部材について示したものである。せん断力の影響とは逆に、荷重が中央点付近に作用する場合に、軸力の影響は最も大きく現われており、 $S_0/r_0=50$ を規準にとれば、 $S_0/r_0=20, 100$ のとき $S_1=0, S_2=0.5$ の部材ではそれぞれ +5% および -13%、また $S_1=0, S_2=1.0$ の部材ではそれぞれ +62% および -56% の変動がある。また部材の曲率が小なる場合 (図-4 (b)) のほうが、大なる場合 (図-4 (a)) よりはるかに軸力無視による誤差が大きいことが認められる。

4. 連続桁および立体ラーメンの解法

クロノイド部材をもつ連続桁に、軸面に垂直な荷重が作用する場合、各支点がいずれも完全なねじり拘束 ($\theta' = 0$) をもつものとするれば、解法骨子は連続直線桁の場合とまったく同様である。すなわち単に r 軸に関する節点方程式を求めたうえで、これを連立に解けば容易に所要の端モーメントを算定しうる。

また図-5のごとき立体ラーメンでは、構造物の各節点における r, t および z 軸に関する 3 個の回転角と 3 個の変位の都合 6 個の未知数に対応して、3 軸に関する 3 つの節点方程式と軸方向の 3 つのせん断力のつりあい式とがえられ、構造物全体の節点数を n 個とすれば、結局 $6n$ 個の未知変形成分に関する $6n$ 元 1 次の連立方程式がえられる。これを解いて結果を式 (1)、

(2) に代入すれば、所要の材端モーメントがただちに決定される。

図-5

5. 結 語

クロノイド曲線の任意区間を部材長とし、等断面で任意のパラメーター A_0 をもつクロノイド部材に対する、平面ならびに立体たわみ角式を誘導し、本学の電子計算機を使用してたわみ角式の係数および荷重項を数表ならびに図表化し、実用に供しうることとした。紙面の都合上本文にはその一部しか掲げえなかったが、これらの完備した係数表および荷重項表を使用すれば、上記クロノイド部材をもつ連続格子桁や立体ラーメンなどに対して所要の連立方程式をきわめて機械的に求めることができ、厳密解を容易に算定しうるようになる。

つぎに本研究の結果明らかにされたクロノイド部材の物理的特性に基づいて、かかる部材をもつ立体構造物の解析に際して考慮すべき事項を要約すればつぎのごとくである。

まずクロノイド部材では円弧部材よりも軸力に対する影響が大であり、これを無視できないこと、さらにはほぼ曲率の等しい円弧部材と比較しても、形状上の非対称性から断面諸力にかなりの差異が見られ、特にねじりモーメントの相違は著しく、クロノイド部材を円弧部材で近似して設計する簡便法は、ねじりに対して脆弱な構造物やねじり挙動の大なる構造物の設計計算には危険をとまなうこと、しかしねじりを無視する略算法では、曲率大なる部材に対して円弧部材で、曲率小なる部材に対して直線材で近似しうることなどがあげられる。

参 考 文 献

- 1) 山崎・太田：クロノイド部材の軸面内荷重に対するたわみ角式、九州大学工学集報、第 38 巻、第 2 号、昭和 40 年 6 月
- 2) 日本道路協会：クロノイド・ポケットブック、昭和 36 年 10 月 1 日発行、丸善
- 3) 山崎・太田：円弧部材をもつラーメンの立体解析、土木学会論文集第 107 号、昭和 39 年 7 月 (1966.3.31・受付 1967.3.6・再受付)