【研究ノート】

曲線箱桁橋の実用計算式 PRACTICAL FORMULAS FOR CURVED BOX GIRDER BRIDGE

小松定夫*・林 正**
By Radao Komatsu and Masa Hayashi

1. 緒 言

曲線箱桁の構造解析については、すでに数編の論文を
発表した^{1)~5)}。ところで、箱桁のようにねじり剛性が大
なる曲線主桁で $\alpha = R\sqrt{GJ/EC_w}$ が比較的大きい場合に
ついては文献^{1), 2), 5)}の解式が実用的な意味で簡単化でき
る。本文では計算の簡易化を目的として、単純曲線箱桁
および連続曲線箱桁に関する断面力（曲げモーメント、
曲げねじりモーメント、ねじりモーメント、せん断力）
および変形量（ねじり角、断面回転角、たわみ）の実用
計算式を与えた。

本文中、特に説明がない記号については、文献^{1), 2)}を
参照されたい。

2. 単純支持曲線箱桁の実用計算式

主桁断面が箱型形状のような閉断面である場合には、
文献¹⁾で与えられている厳密解は表-1, 2のようにきわ
めて簡単化される。また、この近似解は実用上十分な精
度を有する。

近似解を誘導する際、つぎの条件を用いた。

1) 閉断面を有する桁では、 $\alpha (= R\sqrt{GJ/EC_w})$ はか
なり大きいので、双曲線関数を含む項はきわめて高次の
微小項となり省略できる。

2) $\alpha^2 \gg 1$ として、近似計算を行なった。

たとえば、

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \doteq 1, \quad \frac{1}{\alpha^2 + 1} - \frac{1}{\alpha^2} \doteq -\frac{1}{\alpha^4} \text{ etc.}$$

3) せん断中心の図心に対する偏心量は無視できるの
で、 $R_0 \doteq R$ とした。

表-1 集中荷重を受ける単純支持曲線箱桁の近似解

M_y	$\bar{R}P \frac{\sin(\theta - \psi) \sin \varphi}{\sin \theta}$	$(0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (1)_1$
	$\bar{R}P \frac{\sin(\theta - \varphi) \sin \psi}{\sin \theta}$	$(\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (1)_2$
M_w	$\frac{\bar{R}\bar{R}P \sin(\theta - \psi) \sin \varphi}{\alpha^2 \sin \theta}$	$(0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (2)_1$
	$\frac{\bar{R}\bar{R}P \sin(\theta - \varphi) \sin \psi}{\alpha^2 \sin \theta}$	$(\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (2)_2$

* 正会員 工博 大阪大学教授 土木工学科

** 正会員 大阪大学助手 土木工学科

θ	$\frac{RP}{GJ} \left\{ -\bar{R} \frac{\sin(\theta - \psi) \sin \varphi}{\sin \theta} + R \frac{\theta - \psi}{\theta} \varphi \right\}$	$(0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (3)_1$
	$\frac{RP}{GJ} \left\{ -\bar{R} \frac{\sin(\theta - \varphi) \sin \psi}{\sin \theta} + R \frac{\theta - \varphi}{\theta} \psi \right\}$	$(\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (3)_2$
β	$\frac{\bar{R}\bar{R}P}{2} \left(\frac{1}{GJ} + \frac{1}{EI_y'} \right) \left[\frac{\sin(\theta - \psi)}{\sin \theta} \left(\theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \right) \right. \\ \left. + \{ \sin(\theta - \psi) - (\theta - \psi) \cos(\theta - \psi) \} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \right]$	$(0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (4)_1$
	$\frac{\bar{R}\bar{R}P}{2} \left(\frac{1}{GJ} + \frac{1}{EI_y'} \right) \left[\frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin \theta} \left(\theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \psi - \psi \cos \psi \right) \right. \\ \left. + \{ \sin(\theta - \varphi) - (\theta - \varphi) \cos(\theta - \varphi) \} \frac{\sin \psi}{\sin \theta} \right]$	$(\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (4)_2$
δ	$R^2 P \left[\frac{R}{GJ} \left\{ -\frac{\sin(\theta - \psi) \sin \varphi}{\sin \theta} + \frac{\theta - \psi}{\theta} \varphi \right\} - \frac{\bar{R}}{2} \left(\frac{1}{GJ} + \frac{1}{EI_y'} \right) \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{\sin(\theta - \psi)}{\sin \theta} \left(\theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \right) + \{ \sin(\theta - \psi) - (\theta - \psi) \cos(\theta - \psi) \} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \right\} \right]$	$(0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (5)_1$
	$R^2 P \left[\frac{R}{GJ} \left\{ -\frac{\sin(\theta - \varphi) \sin \psi}{\sin \theta} + \frac{\theta - \varphi}{\theta} \psi \right\} - \frac{\bar{R}}{2} \left(\frac{1}{GJ} + \frac{1}{EI_y'} \right) \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin \theta} \left(\theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \psi - \psi \cos \psi \right) + \{ \sin(\theta - \varphi) - (\theta - \varphi) \cos(\theta - \varphi) \} \frac{\sin \psi}{\sin \theta} \right\} \right]$	$(\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (5)_2$
T_s	$-P \left\{ \bar{R} \frac{\sin(\theta - \psi) \cos \varphi}{\sin \theta} - R \frac{\theta - \psi}{\theta} \varphi \right\}$	$(0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (6)_1$
	$P \left\{ \bar{R} \frac{\cos(\theta - \varphi) \sin \psi}{\sin \theta} - R \frac{\theta - \varphi}{\theta} \psi \right\}$	$(\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (6)_2$
T_w	$-\frac{\bar{R}P \sin(\theta - \psi) \cos \varphi}{\alpha^2 \sin \theta}$	$(0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (7)_1$
	$\frac{\bar{R}P \cos(\theta - \varphi) \sin \psi}{\alpha^2 \sin \theta}$	$(\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (7)_2$
T	$-P \left\{ \bar{R} \frac{\sin(\theta - \psi) \cos \varphi}{\sin \theta} - R \frac{\theta - \psi}{\theta} \varphi \right\}$	$(0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (8)_1$
	$P \left\{ \bar{R} \frac{\cos(\theta - \varphi) \sin \psi}{\sin \theta} - R \frac{\theta - \varphi}{\theta} \psi \right\}$	$(\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (8)_2$
Q	$P \frac{\theta - \psi}{\theta}$	$(0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (9)_1$
	$-P \frac{\psi}{\theta}$	$(\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (9)_2$
$\bar{Q}$	$\frac{\bar{R}P \sin(\theta - \psi) \cos \varphi}{R \sin \theta}$	$(0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (10)_1$
	$-\frac{\bar{R}P \cos(\theta - \varphi) \sin \psi}{R \sin \theta}$	$(\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (10)_2$

表-2 集中トルクを受ける単純支持曲線箱桁の近似解

M_y	$-mT \frac{\sin(\theta - \psi) \sin \varphi}{\sin \theta}$	$(0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (11)_1$
	$-mT \frac{\sin(\theta - \varphi) \sin \psi}{\sin \theta}$	$(\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (11)_2$

M_w	$-mT \frac{R}{\alpha^2} \frac{\sin(\theta-\psi) \sin \varphi}{\sin \theta} \quad (0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (12)_1$	
	$-mT \frac{R}{\alpha^2} \frac{\sin(\theta-\varphi) \sin \psi}{\sin \theta} \quad (\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (12)_2$	
θ	$mT \frac{R}{GJ} \frac{\sin(\theta-\psi) \sin \varphi}{\sin \theta} \quad (0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (13)_1$	
	$mT \frac{R}{GJ} \frac{\sin(\theta-\varphi) \sin \psi}{\sin \theta} \quad (\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (13)_2$	
β	$-mTR \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{GJ} + \frac{1}{EI_y'} \right) \left\{ \frac{\sin(\theta-\psi)}{\sin \theta} \left(\phi \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \right) + (\sin(\theta-\psi) - (\theta-\psi) \cos(\theta-\psi)) \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \right\} - \frac{1}{GJ} \frac{\sin(\theta-\psi) \sin \varphi}{\sin \theta} \right] \quad (0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (14)_1$	
	$-mTR \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{GJ} + \frac{1}{EI_y'} \right) \left\{ \frac{\sin(\theta-\varphi)}{\sin \theta} \left(\phi \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \sin \psi - \psi \cos \psi \right) + (\sin(\theta-\varphi) - (\theta-\varphi) \cos(\theta-\varphi)) \frac{\sin \psi}{\sin \theta} \right\} - \frac{1}{GJ} \frac{\sin(\theta-\varphi) \sin \psi}{\sin \theta} \right] \quad (\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (14)_2$	
δ	$\frac{mTR^2}{2} \left(\frac{1}{GJ} + \frac{1}{EI_y'} \right) \left[\frac{\sin(\theta-\psi)}{\sin \theta} \left(\phi \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \right) + (\sin(\theta-\psi) - (\theta-\psi) \cos(\theta-\psi)) \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \right] \quad (0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (15)_1$	
	$\frac{mTR^2}{2} \left(\frac{1}{GJ} + \frac{1}{EI_y'} \right) \left[\frac{\sin(\theta-\varphi)}{\sin \theta} \left(\phi \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \sin \psi - \psi \cos \psi \right) + (\sin(\theta-\varphi) - (\theta-\varphi) \cos(\theta-\varphi)) \frac{\sin \psi}{\sin \theta} \right] \quad (\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (15)_2$	
T_s	$mT \frac{\sin(\theta-\psi) \cos \varphi}{\sin \theta} \quad (0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (16)_1$	
	$-mT \frac{\cos(\theta-\varphi) \sin \psi}{\sin \theta} \quad (\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (16)_2$	
T_w	$\frac{mT}{\alpha^2} \frac{\sin(\theta-\psi) \cos \varphi}{\sin \theta} \quad (0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (17)_1$	
	$-\frac{mT}{\alpha^2} \frac{\cos(\theta-\varphi) \sin \psi}{\sin \theta} \quad (\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (17)_2$	
T	$mT \frac{\sin(\theta-\psi) \cos \varphi}{\sin \theta} \quad (0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (18)_1$	
	$-mT \frac{\cos(\theta-\varphi) \sin \psi}{\sin \theta} \quad (\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (18)_2$	
Q	0	(19)
$\bar{Q}$	$-\frac{mT}{R} \frac{\sin(\theta-\psi) \cos \varphi}{\sin \theta} \quad (0 \leq \varphi \leq \psi) \quad (20)_1$	
	$\frac{mT}{R} \frac{\cos(\theta-\varphi) \sin \psi}{\sin \theta} \quad (\psi \leq \varphi \leq \theta) \quad (20)_2$	

ほぼ1軸対称で、 $I_{yz}=0$ である箱桁断面の応力は、次式のようになる。ここで座標系は図-1のようにとるものとする。

図-1 横断面の座標系

垂直応力

$$\sigma = \frac{R}{\rho} \frac{M_y}{I_y} z + W_s \frac{M_w}{C_w} \quad (21)$$

3. 連続曲線箱桁の実用計算式

主桁断面が箱型断面である連続曲線箱桁の実用計算式は、前節で近似解を導いたのと同じ条件を用いて、文献5)の諸式よりつぎのようになる。

(1) 弾性方程式の係数

$$[a]_{mj} = \frac{R_j}{E_s I_{y',j}} \left(\frac{2\phi_j - \sin 2\phi_j}{4 \sin^2 \phi_j} \right) + \frac{R_j}{G_s J_j} \times \left(\frac{\phi_j}{2} \operatorname{cosec}^2 \phi_j + \frac{1}{2} \cot \phi_j - \frac{1}{\phi_j} \right) \quad (22)$$

$$a_{m,m-1} = \frac{R_{m-1}}{E_s I_{y',m-1}} \left(\frac{\sin \phi_{m-1} - \phi_{m-1} \cos \phi_{m-1}}{2 \sin^2 \phi_{m-1}} \right) - \frac{R_{m-1}}{G_s J_{m-1}} \left(\frac{1}{2} [\phi_{m-1} \cot \phi_{m-1} + 1] \times \operatorname{cosec} \phi_{m-1} - \frac{1}{\phi_{m-1}} \right) \quad (23)$$

$$a_{m,m+1} = \frac{R_m}{E_s I_{y',m}} \left(\frac{\sin \phi_m - \phi_m \cos \phi_m}{2 \sin^2 \phi_m} \right) - \frac{R_m}{G_s J_m} \times \left(\frac{1}{2} [\phi_m \cot \phi_m + 1] \operatorname{cosec} \phi_m - \frac{1}{\phi_m} \right) \quad (24)$$

$$[b]_{mj} = -\frac{1}{G_s J_j} \left(\cot \phi_j + \frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\phi_j} \right) \quad (25)$$

$$b_{m,m-1} = \frac{1}{G_s J_{m-1}} \left(\operatorname{cosec} \phi_{m-1} - \frac{1}{\phi_{m-1}} \right) \quad (26)$$

$$b_{m,m+1} = \frac{1}{G_s J_m} \left(\operatorname{cosec} \phi_m - \frac{1}{\phi_m} \right) \quad (27)$$

$$[d]_{mj} = \frac{1}{G_s J_j R_j} \left(\alpha_j - \frac{1}{\phi_j} \right) \quad (28)$$

$$d_{m,m-1} = \frac{1}{G_s J_{m-1} R_{m-1} \phi_{m-1}} \quad (29)$$

$$d_{m,m+1} = \frac{1}{G_s J_m R_m \phi_m} \quad (30)$$

(2) 弾性方程式の荷重項

a) 等分布荷重

$$L_{mj} = p_j \mathfrak{L}_{1j} \frac{R_j}{E_s I_{y',j}} \left[\frac{(1 - \cos \phi_j)(\phi_j - \sin \phi_j)}{2 \sin^2 \phi_j} \right] + p_j \frac{R_j}{G_s J_j} \left[\mathfrak{L}_{1j} \left(\frac{\phi_j}{2} \operatorname{cosec} \phi_j - \frac{1}{2} \right) \tan \frac{\phi_j}{2} - \mathfrak{L}_{2j} \left(\tan \frac{\phi_j}{2} - \frac{\phi_j}{2} \right) \right] \quad (31)$$

$$N_{mj} = \frac{p_j}{G_s J_j} \left[\mathfrak{L}_{1j} \left(\tan \frac{\phi_j}{2} - \frac{1}{\alpha_j} \right) + \mathfrak{L}_{2j} \left(\frac{1}{\alpha_j} - \frac{\phi_j}{2} \right) \right] \quad (32)$$

b) 横方向線荷重

$$L_{mm} = W_m \times \left[\frac{\mathfrak{L}_{2m}}{E_s I_{y',m}} \left(\frac{\psi_m' \sin \psi_m - \psi_m \sin \psi_m' \cos \phi_m}{2 \sin^2 \phi_m} \right) + \frac{1}{G_s J_m} \left\{ \mathfrak{L}_{2m} \left(\frac{\psi_m' \sin \psi_m - \psi_m \sin \psi_m' \cos \phi_m}{2 \sin^2 \phi_m} - \frac{\sin \psi_m'}{\alpha_m^2 \sin \phi_m} \right) - \mathfrak{L}_{3m} \left(\frac{\sin \psi_m'}{\sin \phi_m} - \frac{\psi_m'}{\phi_m} \right) \right\} \right] \quad (33)$$

$$L_{m,m-1} = W_{m-1} \left[\frac{\mathfrak{L}_{2m-1}}{E_s I_{y',m-1}} \times \left(\frac{\psi_{m-1} \sin \psi'_{m-1} - \psi'_{m-1} \sin \psi_{m-1} \cos \phi_{m-1}}{2 \sin^2 \phi_{m-1}} \right) + \frac{1}{G_s J_{m-1}} \left\{ \mathfrak{L}_{2m-1} \times \left(\frac{\psi_{m-1} \sin \psi'_{m-1} - \psi'_{m-1} \sin \psi_{m-1} \cos \phi_{m-1}}{2 \sin^2 \phi_{m-1}} \right) - \frac{\sin \psi_{m-1}}{\alpha^2_{m-1} \sin \phi_{m-1}} \right\} - \mathfrak{L}_{3m-1} \left(\frac{\sin \psi_{m-1}}{\sin \phi_{m-1}} - \frac{\psi_{m-1}}{\phi_{m-1}} \right) \right] \quad (34)$$

$$N_{mm} = \begin{cases} \frac{W_m}{R_m G_s J_m} \left(\mathfrak{L}_{2m} \frac{\sin \psi'_m}{\sin \phi_m} - \mathfrak{L}_{3m} \frac{\psi'_m}{\phi_m} \right) & (\psi_m \neq 0) \\ 0 & (\psi_m = 0) \end{cases} \quad (35)$$

$$N_{m,m-1} = \begin{cases} \frac{W_{m-1}}{R_{m-1} G_s J_{m-1}} \left(\mathfrak{L}_{2,m-1} \frac{\sin \psi_{m-1}}{\sin \phi_{m-1}} - \mathfrak{L}_{3,m-1} \frac{\psi_{m-1}}{\phi_{m-1}} \right) & (\psi_{m-1} \neq \phi_{m-1}) \\ 0 & (\psi_{m-1} = \phi_{m-1}) \end{cases} \quad (36)$$

(3) 断面力と変形量

断面力と変形量は、表-3 のとおりである。

参 考 文 献

- 1) 小西一郎・小松定夫：単純曲線桁橋の立体的解析，土木学会論文集第90号，昭和38年2月
- 2) 小西一郎・小松定夫：薄肉連続曲線桁橋の立体的解析，土木学会論文集第91号，昭和38年3月
- 3) 小松定夫：曲線並列桁橋の実用計算式，土木学会論文集第93号，昭和38年5月
- 4) Sadao Komatsu : Structural Analysis for Continuous S-Shaped Curved Girder Bridge, Proc. 13th JNC-AM, 1963
- 5) Ichiro Konishi and Sadao Komatsu : Three Dimensional Analysis of Curved Girder with Thin-Walled Cross Section, Pub. IABSE, Vol. 25, 1965

表-3 連続曲線桁橋の断面力と変形量

M_{ym}	$M_{m0} + M_m \frac{\sin \varphi'_m}{\sin \phi_m} + M_{m+1} \frac{\sin \varphi_m}{\sin \phi_m}$	(37)
M_{wm}	$M_{wm0} + \frac{R_m}{\alpha^2_m} \left(M_m \frac{\sin \varphi'_m}{\sin \phi_m} + M_{m+1} \frac{\sin \varphi_m}{\sin \phi_m} \right)$ ($\varphi_m \neq 0, \phi_m$)	(38)
T_{sm}	$T_{sm0} + \frac{1}{R_m \phi_m} (\mathfrak{M}_m - \mathfrak{M}_{m+1}) + M_m \left(\frac{\cos \varphi'_m}{\sin \phi_m} - \frac{1}{\phi_m} \right) + M_{m+1} \left(\frac{1}{\phi_m} - \frac{\cos \varphi_m}{\sin \phi_m} \right)$ ($\varphi_m \neq 0, \phi_m$)	(39)
T_{wm}	$T_{wm0} + \frac{1}{\alpha^2_m} \left(M_m \frac{\cos \varphi'_m}{\sin \phi_m} - M_{m+1} \frac{\cos \varphi_m}{\sin \phi_m} \right)$ ($\varphi_m \neq 0, \phi_m$)	(40)
T_m	$T_{m0} + \frac{1}{l_m} (\mathfrak{M}_m - \mathfrak{M}_{m+1}) + M_m \left(\frac{\cos \varphi'_m}{\sin \phi_m} - \frac{1}{\phi_m} \right) + M_{m+1} \left(\frac{1}{\phi_m} - \frac{\cos \varphi_m}{\sin \phi_m} \right)$	(41)
$\bar{Q}_m$	$\bar{Q}_{m0} - \frac{1}{R_m} \left(M_m \frac{\cos \varphi'_m}{\sin \phi_m} - M_{m+1} \frac{\cos \varphi_m}{\sin \phi_m} \right)$	(42)
δ_m	$\delta_{m0} + R_m \left[\frac{\mathfrak{M}_m}{G_s J_m} \left(\frac{\sin \varphi'_m}{\sin \phi_m} - \frac{\varphi'_m}{\phi_m} \right) + \frac{\mathfrak{M}_{m+1}}{G_s J_m} \left(\frac{\sin \varphi_m}{\sin \phi_m} - \frac{\varphi_m}{\phi_m} \right) - M_m \left\{ \frac{R_m}{G_s J_m} \left(\frac{\sin \varphi'_m}{\sin \phi_m} - \frac{\varphi'_m}{\phi_m} \right) + \frac{\lambda_m}{\sin \phi_m} \left(\varphi_m \cos \varphi'_m - \phi_m \frac{\sin \varphi'_m}{\sin \phi_m} \right) \right\} - M_{m+1} \left\{ \frac{R_m}{G_s J_m} \left(\frac{\sin \varphi_m}{\sin \phi_m} - \frac{\varphi_m}{\phi_m} \right) + \frac{\lambda_m}{\sin \phi_m} \left(\phi_m \cos \phi_m \frac{\sin \varphi_m}{\sin \phi_m} - \varphi_m \cos \varphi_m \right) \right\} \right]$ ここに $\lambda_m = \frac{R_m}{2} \left(\frac{1}{G_s J_m} + \frac{1}{E_s I_{ym'}} \right)$	(43) (44)
β_m	$\beta_{m0} + \frac{1}{G_s J_m} \left[\left(\frac{R_m}{\alpha^2_m} M_m - \mathfrak{M}_m \right) \frac{\sin \varphi'_m}{\sin \phi_m} + \left(\frac{R_m}{\alpha^2_m} M_{m+1} - \mathfrak{M}_{m+1} \right) \frac{\sin \varphi_m}{\sin \phi_m} \right] + \frac{\lambda_m}{\sin \phi_m} \left[M_m \left(\varphi_m \cos \varphi'_m - \phi_m \frac{\sin \varphi'_m}{\sin \phi_m} \right) + M_{m+1} \left(\phi_m \cos \phi_m \frac{\sin \varphi_m}{\sin \phi_m} - \varphi_m \cos \varphi_m \right) \right]$ ($\varphi_m \neq 0, \phi_m$)	(45)

(1967.8.6・受付)