乱流の速度分布則について

ON THE VELOCITY DISTRIBUTION FUNCTION
OF TURBULENT FLOW椎 貝 博 美*
By Hiroyoshi Shi-igai

1. 概 説

乱流の速度分布をあらわす式としては、対数法則と指数法則がもっとも広く用いられてきている。しかし、両者の間の関係は、筆者の知る限りにおいては、未だ明らかにされていない。また、近代の乱流の統計理論の発達には、対数法則の一つの基盤となっている混合距離理論の不備を指摘し、その結果、なかば実験式のような意味において対数法則をとりあつかう人が多い。

この論文では、物理的な考察はある程度犠牲にして、数式的な面から検討を行ない、対数法則と指数法則間の関係を明らかにしようという試みがなされている。

物理性を犠牲にしているということは、この論文の弱点であるが、数式的な面においては、対数法則と指数法則がかなり近い関係にあることを示すことができた。

2. 予備的な考察

対数法則はよく知られているように Prandtl あるいは von Kármán によって混合距離理論を元にして導かれたのが最初である。

指数法則、特に $1/7$ 乗則は経験的に得られたものと思われる。

その後、乱流統計理論の発達により、両者を次元解析によって求めることがなされた¹⁾。両者とも次元解析によって得られる、ということは一種の矛盾である。そこでそれらについてなされている仮定の検討をも含めて、簡単に次元解析による方法を述べておくことにする。

まず、指数法則についてはつぎのとおりである。

$$\text{摩擦係数 } C_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U_0} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{摩擦速度 } U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

式 (1), (2) は定義である。ここで、 τ_0 : 壁面におけるせん断応力、 ρ : 密度、 U_0 : 自由流の速度である。

つぎに、 C_f はレイノルズ数によって定まり、そのべき乗であらわされるものと仮定する。ゆえに、

$$C_f = \frac{\text{const.}}{\left(\frac{U_0 \delta}{\nu}\right)^m} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 δ : 壁から自由流までの距離

(1), (2), (3) から、

$$\frac{U_0}{U_*} = \text{const.} \left(\frac{U_* \delta}{\nu}\right)^{m/(2-m)} \quad \dots\dots\dots (4)$$

つぎに、(4) の関係は壁より δ 以内の地点においても成立するものとする。これから、任意の $y < \delta$ において

$$\frac{U}{U_*} = \text{const.} \left(\frac{U_* y}{\nu}\right)^{m/(2-m)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

が得られる。つぎに、大きな仮定として、 U/U_0 は y/δ の関数で指数型であらわされるとする。この仮定は層流においてはある程度正しい。しかし、実は指数型の重ね合わせで得られる。乱流においては近似的な意味しかもない。式 (5) のような形式がすでに得られているので、これと 3 番目の仮定から、

$$\frac{U}{U_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{m/(2-m)} \quad \dots\dots\dots (6)$$

が得られる。 $m=1/4$ とおくと、つぎの一連の式が得られる。なお、定数は通常用いられている値を用いた。

$$C_f = 0.0466 \left(\frac{U_0 \delta}{\nu}\right)^{-1/4} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{U_0}{U_*} = 8.74 \left(\frac{U_* \delta}{\nu}\right)^{1/7} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{U}{U_*} = 8.74 \left(\frac{U_* y}{\nu}\right)^{1/7} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{U}{U_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \dots\dots\dots (10)$$

つぎに対数法則のほうを調べよう。まず、 τ_0, U, y, ν の間に関数関係があるとすれば、次元解析から、

$$\frac{U}{U_*} = f\left(\frac{U_* y}{\nu}\right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

が得られる。つぎに、自由流の流速 U_0 と任意点の流速 U との差はせん断力によって生ずるものと考え、 δ, y, U_* によって定まるものとする。しかるときは、

$$\frac{U_0 - U}{U_*} = g\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad \dots\dots\dots (12)$$

が得られる。式 (11), (12) を書き直すと、

$$\frac{U}{U_*} = f\left[\left(\frac{y}{\delta}\right)\left(\frac{U_* \delta}{\nu}\right)\right] \quad \dots\dots\dots (13)$$

* 正会員 工博 東京工業大学工学部

$$\frac{U}{U_*} = \frac{U_0}{U_*} - g\left(\frac{y}{\delta}\right) \dots\dots\dots(14)$$

両式が満足されるためには、 f, g が対数関数でなくてはならないから、通常用いられている形として、次式が得られる。

$$\frac{U}{U_*} = \frac{2.3}{\kappa} \log_e \frac{U_* y}{\nu} + c_1 \dots\dots\dots(15)$$

上記二つの方法によってわかるように、論旨はかなりはっきりしているが、やはり結果をあらかじめ知っていなければ、とうてい導けるようなものではない。また指数法則は、その仮定からして、層流状態に近いところ、すなわち、比較的低いレイノルズ数において成立することになるが、これは実測と一致している。

3. 数式的な検討

次元解析的な方法によっても、なお、指数法則と対数法則間の関係は明らかではない。そこで、この節では著者の考えた数式的な検討を行なう。

まず、せん断応力 τ と平均速度勾配との間にはつぎの関係が成立するものとする。

$$\tau = \rho \eta \frac{du}{dy} \dots\dots\dots(16)$$

ここで、 η は一般化された粘性係数で、その物理的意味はしばらく問わないものとする。つぎに τ は次式で与えられると仮定する。

$$\tau = \tau_0 \left(1 - c \frac{y}{\delta}\right) \quad c = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \dots\dots\dots(17)$$

ただし、 c は 1 または 0 とする。 $c=1$ のときは、開水路のように τ が線型に変化する、という仮定になる。 $c=0$ のときは $\tau=\tau_0$ となり、境界層内の流れのような場合である。式 (16), (17) から、

$$\frac{U_*^2 \left(1 - c \frac{y}{\delta}\right)}{\eta} = \frac{du}{dy} \dots\dots\dots(18)$$

が得られる。また η は

$$\eta = \eta \left(\frac{y}{\delta}, U_*, \delta\right) \dots\dots\dots(19)$$

で定まると仮定する (η の次元は速度 $\times$ 長さ)。さらに

$$\eta \sim U_*^m \delta^l y^l \dots\dots\dots(20)$$

とおく。 $n=1, m+l=1$ であることはすぐわかるので、

$$\eta \sim U_* \delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1-m} \dots\dots\dots(22)$$

が得られる。 $1-m$ を改めて n とかいて

$$\eta = U_* \delta \left(\kappa \frac{y}{\delta}\right)^n \dots\dots\dots(23)$$

が得られる。とくに $n=1$ とおくと $\eta = U_* \kappa y$ となって混合距離理論と同じ仮定となる。ただし、 κ のおき方には問題があって、もちろん $\eta = \kappa U_* \delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^n$ とおくこともできる。ただ式 (23) ようにおくと、多少便利な点があるのでこのようにおいた。この式を式 (19) に代入すれば、

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_* \left(1 - c \frac{y}{\delta}\right)}{\delta \left(\kappa \frac{y}{\delta}\right)^n} \dots\dots\dots(24)$$

が得られる。 $y/\delta = \xi$ とおいて、無次元化を行なうと、

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{U_*}{\kappa^n} [\xi^{-n} - c \xi^{1-n}] \dots\dots\dots(25)$$

が得られる。 $n=1, 2$ の場合、積分すれば、

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa^n} \left[\frac{1}{1-n} \xi^{1-n} - \frac{c}{2-n} \xi^{2-n} + A \right] \dots\dots\dots(26)$$

が得られる。また $n=1$ のときは、

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa} [\ln \xi - c \xi + B] \dots\dots\dots(27)$$

が得られる。 $n=2$ のときも同様に、

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa^2} [-\xi^{-1} - c \ln \xi + B'] \dots\dots\dots(27')$$

となる。

式 (26) において、 $n=6/7$ とおけば、

$$\frac{U}{U_*} = \frac{7}{\kappa^{6/7}} \left[\xi^{1/7} - \frac{c}{8} \xi^{8/7} \right] \dots\dots\dots(28)$$

が得られる。ただし、 $\xi=0$ で $u=0$ 、すなわち $A=0$ とおいた。これは、一応粘性底層を無視していることである。

式 (27) で $c=1$ とおくと、 τ の変化を考慮した対数法則が得られ、 $c=0$ とおけば、 $\tau=\tau_0$ —一定としたときの対数法則となる。また、式 (28) でも同様で、たとえば $c=0$ とおくと、 $1/7$ 乗則が得られる。このようにしてみると、式 (23) において、 $n=1$ とおくか、または 1 に近い $6/7$ とおくかによって、式 (19) の基礎式から、対数法則、あるいは指数法則のいずれでも導けるのがわかる。したがって、数値的には、いずれによろうともそれほど相異はないことが明らかである。いいかえると、もし、一つの実験値があって、対数法則にほぼ一致すれば、指数法則にも大体合うことが予想されるのである。なお、式 (26) で、たとえば $n=8/9$ とおけば $1/9$ 乗則が得られるから、 $1/9$ 乗則は $1/7$ 乗則より対数法則に近いことがわかる。

いま、試みに式 (28) で y/δ 付近の様子を考えよう。 $y/\delta = 1-\epsilon$ ($\epsilon \ll 1$) とおけば、

$$\xi^{1/7} = (1-\epsilon)^{1/7} \doteq \left(1 - \frac{1}{7}\epsilon\right) \doteq 1 + \frac{1}{7} \log(1-\epsilon)$$

であるから、 $\xi^{1/7} \doteq 1 + \frac{1}{7} \log \xi$ であることがわかる。

$c=0$ について、式 (28) に上記の関係を代入すると、

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa^{6/7}} \left[\log_e \frac{y}{\delta} \right] + \frac{7}{\kappa^{6/7}} \dots\dots\dots(29)$$

が得られる。これは、指数法則を対数法則で近似したものであるが、このときには κ の代りに $\kappa^{6/7}$ を用いたことになる。もっとも、 κ が一定であるのか、 κ^n が一定であるのか、それとも κ も κ^n も変化するのかということとは、このような方法からは定められない。いま、かりに $\kappa=0.4$ でこれが universal constant であるとすれば、

$\kappa^{6/7}=0.46$ となる。つまり指数法則によるべきものを、半対数紙上にプロットすれば、みかけ上、カルマン定数が增大していることを示す。また、この議論を一般化すれば、式 (26) を対数則で近似すると、このときのカルマン定数のみかけの値は κ^n となるので、 $n>1$ の場合は、みかけ上カルマン定数が減少することになる。いいかえると、カルマン定数そのものが不変であっても、速度分布形が変化するとカルマン定数が変化したように観測されることを示す。

物理的な考察は後に行なうことにして、もう少し、式 (28) について調べよう。式 (28) から平均流速 $\bar{U}$ は、

$$\frac{\bar{U}}{U_*} = \frac{6.125}{\kappa^{6/7}} \quad (c=0) \quad \dots\dots\dots(30-1)$$

$$\frac{\bar{U}}{U_*} = \frac{5.71}{\kappa^{6/7}} \quad (c=1) \quad \dots\dots\dots(30-2)$$

で与えられ、 $y=\delta$ における最大流速 U_0 は、

$$\frac{U_0}{U_*} = \sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{7}{\kappa^{6/7}} \quad (c=0) \quad \dots\dots\dots(31-1)$$

$$\frac{U_0}{U_*} = \frac{6.125}{\kappa^{6/7}} \quad (c=1) \quad \dots\dots\dots(31-2)$$

で与えられる。 $\kappa=0.4$ とおくならば、シエジー型の式、すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \bar{U} &= 41 \sqrt{HI} & (c=0) \\ \bar{U} &= 38 \sqrt{HI} & (c=1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(32)$$

が得られる。ただし、 $U_* = \sqrt{gHI}$ とおいた。この値は c の値の下限值にほぼ等しい。より一般にシエジーの C は

$$\begin{aligned} C &= \frac{\sqrt{g}}{\kappa^n} \left(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{2-n} \right) \\ &= \frac{1}{(1-n)(2-n)} \frac{\sqrt{g}}{\kappa^n} \quad (n \neq 1, 2) \quad \dots\dots(33) \end{aligned}$$

の形式になる。ただし n が 1 をこえることはできない。

4. 総 括

前節では数式上の議論を主として行なってきたが、この節においては多少物理的な考察も含めて総括を行なう。

まず、渦動粘性係数 η に関する仮定であるが、 $\eta \sim y$ ということと、混合距離理論において $l = \kappa y$ とおくことはほぼ同様の仮定といえる。したがって、 η について他少勝手な仮定をおくことは、 l について、仮定をおくのと同じことであるといえる。この限りにおいて、指数法則と対数法則とは、非常に近い関係にあることが示された。

式 (29) についてはつぎのように解釈できる。すなわち、指数型の流速分布を与える式は、管路の中心部、開

水路の水面付近、あるいは境界層の上部付近では対数式で近似できる。ただし、 κ の値はみかけ上変化する。このような場合は壁面付近で数式からはずれざるはずである。

式 (31) から、 κ^n が減少すれば c_f の値も減少する。このことは過去の実験で知られている。しかし、このとき、もし U_0 が一定とすれば U_* が減少することになり、実験事実と反する。

せん断応力 τ が線型に変化するとき、 $\tau = \tau_0 = \text{const.}$ とおいた場合の流速分布形式の相違はそれほど大きいものではない。たとえば、式 (27) で $c=1$ とした場合でも $c=0$ とした場合でもそれほど大きな差を生じないのはよく知られている。図-1 は境界層内での速度分布の実測値の一例²⁾と、式 (28) で $c=1, c=0$ とした場合の比較を示す。これから、開水路において $\tau = \tau_0$ と近似的においた式でも一応実測値と一致する理由の一部がわかった。

このような方法による解析は、結局すべての不明な点を η の仮定の中に入れて処理しているので、物理性には非常に乏しい。しかし、乱流の統計理論等においても、たとえば、対数則を正しいものとして採用し、さらにその微分等も用いられているという点において、数式的な見地からは極かい方にそれほどの物理性はないといえる。その意味において、この論文は、対数則と $1/7$ 乗則の同価性を論じたものである。

参 考 文 献

- 1) Schubauer, G.B. and Tchen, C.M.: Turbulent Flow, Princeton Univ. Press, 1961
- 2) Lobb, K.R., Winkler, E.M., and Persh, J.: J. Aeronaut. Scie. 22, 1~9 (1955)

(1967.9.11・受付)