地盤変形を考慮に入れた鋼管橋脚の地震応答の統計解析

STATISTICAL ANALYSIS OF EARTHQUAKE RESPONSE OF STEEL-PIPE BRIDGE PIER WITH CONSIDERATION OF UPPER LAYER DEFORMATION

小 坪 清 真*・高 西 照 彦**

By Seima Kotsubo and Teruhiko Takanishi

1. ま え が き

著者らは前論文¹⁾において、比較的硬い地盤で得られた地震記録を下層基盤での入力波として用い、上層軟弱地盤の変形を考えた場合の鋼管橋脚の地震応答を計算した。その際、鋼管橋脚と上層地盤をそれぞれ多質点系に置換し、modal analysisの手法を用いて、一つの入力地震波に対して刻々の橋脚天端の変位を数値積分によって求めた。したがって、この解析法では、いろいろの入力地震波に対する橋脚の地震応答を推定しようとする場合には個々の入力地震波に対していちいち同じような計算をくり返す必要があり、計算時間も長くなる。本論はスペクトル解析の手法を用いて、地盤の変形を考慮に入れた場合の橋脚の地震応答を統計的に計算し、比較的容易に橋脚の地震応答の最大値が推定できる計算図表を作製して鋼管橋脚の耐震設計の一資料を提供しようとするものである。

2. 解析の基本的な考え方

田治見²⁾は地震動およびそれに対する構造物の応答をエルゴード性をもつ定常確率過程とみなし、それらの分散の平方根がそれぞれの最大値に比例すると考え、構造物の地震応答を統計的に算出する方法を提案した。本論は地盤の変形を考慮に入れた場合の鋼管橋脚の地震応答もやはり、エルゴード性をもつ定常確率過程であるとみなし、地盤変形を考慮する場合の鋼管橋脚の応答の最大値と地盤変形を考慮しない場合のそれとの比が、それぞれの場合の応答の分散の平方根に比例するものと考え、地盤変形を考慮する場合の鋼管橋脚の地震応答の最大値を統計的に算出しようとするものである。

いま、 $y_{\max}$ 、 σ^2 をそれぞれ地盤の変形を考慮する場合の橋脚天端の地震動による最大応答変位およびその分散とし、地盤の変形を考慮しない場合には肩に添字0をつけて表わし(以後これにしたがう)、つぎの式が成り立つものとする。

$$y_{\max}/y^0_{\max} = \sigma/\sigma^0 = \lambda \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに、 λ は地盤の変形を考慮する場合と考慮しない場合の橋脚の地震応答変位の分散の比の平方根である。

λ が求められれば $y^0_{\max}$ が既知の場合には、式(1)から $y_{\max} = \lambda \cdot y^0_{\max}$ によって $y_{\max}$ が推定できる。 $y^0_{\max}$ の値は、たとえば G.W. Housner の平均速度スペクトル³⁾、田治見の加速度伝達率²⁾等からその値を推定することができる。

3. 応答計算理論

(1) 鋼管橋脚の振動モデル

前論における地震応答計算結果と本論による統計的計算結果とを比較検討することを考慮して、解析には前論と全く同一の鋼管橋脚を用いた。すなわち、図-1(a)に示すような鋼管橋脚を図-1(b)に示すような多質点系に置換して計算を行なった。

図-1 鋼管橋脚とその振動モデル

(2) 地盤の変位応答

地震加速度 $\ddot{\phi}(t)$ が与えられた場合の橋脚の応答を求めるには、まず $\ddot{\phi}$ による地盤の動きを求めなければならない。しかし、地震時における地盤の運動を解析するには厳密には波動論によらなければならないが、これはきわめて困難な問題である。したがって本論では、地盤

* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部土木工学教室

** 正会員 九州工業大学講師 開発土木工学教室

のせん断弾性係数 G は深さのみの関数であると仮定し、また地盤変形を次節で述べる橋脚の振動方程式に導入する便宜上、基礎地盤を集中質点系に置換し modal analysis によってその運動を求めることにした。

地盤が下層基盤から不規則な地震加速度 $\ddot{\phi}$ を受けた場合、地盤中の i 点の変位 u_i は地盤の第 p 次の振動型を U_{pi} とすれば次式のように表わせる。

$$u_i = \sum_{p=1}^P b_p U_{pi} \quad (2)$$

ここに、 P は採用する土の振動型の最高次数、 b_p は第 p 次の振動型の大きさを表わすものでつぎの微分方程式から求められる。

$$\ddot{b}_p + 2h_{gp}n_{gp}\dot{b}_p + n_{gp}^2b_p = -\delta_p\ddot{\phi} \quad (3)$$

$$\delta_p = \left(\sum_{i=1}^q \frac{w_i}{g} U_{pi} \right) / \left(\sum_{i=1}^q \frac{w_i}{g} U_{pi}^2 \right) \quad (4)$$

ここに、 n_{gp} 、 h_{gp} はそれぞれ地盤の第 p 次の振動の固有円振動数、減衰定数、 q は地盤中の質点の数、 w_i は質点 i の重量、 g は重力の加速度である。 w_i は基礎地盤を深さ方向に Δl に等分した場合、単位幅および単位奥行の土を考慮して $w_i = \rho_s \cdot \Delta l$ で与えられる。 ρ_s は土の単位体積重量。

以上より基盤の地震加速度 $\ddot{\phi}$ が与えられれば式(2)、(3)から刻々における u_i を計算することができる。

(3) 橋脚の変位応答の理論

橋脚の第 r 次の振動型を Y_{ri} とすれば、橋脚の i 点の変位はつぎのように書ける。

$$y_i = \sum_{r=1}^R a_r Y_{ri} \quad (5)$$

ここに、 R は採用した振動型の最高次数、 a_r は第 r 次の振動型の大きさを表わすものでつぎの微分方程式から求めることができる。

$$\ddot{a}_r + 2h_{sr}n_{sr}\dot{a}_r + n_{sr}^2a_r = -\xi_r\ddot{\phi} + \sum_{p=1}^P \tau_{rp}n_{gp}n_{gr}b_p \quad (6)$$

ここに、

$$\xi_r = \left(\sum_{i=1}^m \frac{W_i}{g} Y_{ri} \right) / \left(\sum_{i=1}^m \frac{W_i}{g} Y_{ri}^2 \right) \quad (7)$$

$$\tau_{rp} = \left(\sum_{i=1}^q K_i Y_{ri} U_{pi} \right) / \left(n_{gr}n_{gp} \sum_{i=1}^m \frac{W_i}{g} Y_{ri}^2 \right) \quad (8)$$

上式で、 m は橋脚天端の質点番号、 n_{sr} 、 h_{sr} はそれぞれ橋脚の第 r 次の振動の固有円振動数、減衰定数、 W_i は土と水の付着質量を考慮に入れた場合の橋脚の質点 i の重量、 K_i は i 点の地盤のばね定数で $K_i = kDNC \Delta l$ である。

ここに、 k は地盤反力係数、 D は鋼管外径、 N は鋼管数、 C は群杭効果を示す係数である。

いま、橋脚の天端 m 点において振動型 Y_{rm} を 1 にとれば天端の変位 y_m は式(5)からつぎのように表

せる。

$$y_m = \sum_{r=1}^R a_r \quad (9)$$

以上の結果から、橋脚と地盤の減衰定数 h_{sr} 、 h_{gp} が与えられれば、地震応答計算に必要な諸定数を用いて、橋脚天端の変位 y_m は式(3)、(6)、(9)の各式から $\ddot{\phi}$ に応じて刻々計算することができる。

4. 統計的解析

式(2)、(9)でそれぞれ $P=2$ 、 $R=2$ とした場合、すなわち、地盤と橋脚の振動次数をそれぞれ第2次までとった場合に式(1)の λ の値を求める計算式について述べる。

式(3)および式(6)より b_p 、 a_r のフーリエ変換 $B_p(i\omega)$ 、 $A_r(i\omega)$ を求め、これを用いて変位 y の分散 σ^2 を求めると次式で表わされる。

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{2\pi}{T} \left| \sum_{r=1}^R A_r(i\omega) \right|^2 d\omega \quad (10)$$

ここに、

$$A_r(i\omega) = \frac{-\xi_r F(i\omega) + \sum_{p=1}^P \tau_{rp} n_{gp} n_{gr} B_p(i\omega)}{n_{sr}^2 - \omega^2 + 2h_{sr}n_{sr}(i\omega)} \quad (11)$$

$$B_p(i\omega) = \frac{-\delta_p F(i\omega)}{n_{gp}^2 - \omega^2 + 2h_{gp}n_{gp}(i\omega)} \quad (12)$$

また、 $F(i\omega)$ は $\ddot{\phi}(t)$ のフーリエ変換である。

σ^2 を式(1)に代入し積分を遂行し、 λ^2 の式の形を簡単にすると結局次式のように表わすことができる。

$$\lambda^2 = \frac{\lambda_{11}^2 + 2\eta R_0^{12} \lambda_{12}^2 + \eta^2 R_0^{22} \lambda_{22}^2}{1 + 2\eta R_0^{12} + \eta^2 R_0^{22}} \quad (13)$$

ここに、

$$\eta = \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \right) / \left(\frac{n_{s2}}{n_{s1}} \right)^2 \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{11}^2 &= \sum_{k=0}^2 \sum_{j=0}^2 \alpha_{1k} \alpha_{1j} R_{kj}^{11}, \\ \lambda_{12}^2 &= \sum_{k=0}^2 \sum_{j=0}^2 \alpha_{1k} \alpha_{2j} R_{kj}^{12}, \\ \lambda_{22}^2 &= \sum_{k=0}^2 \sum_{j=0}^2 \alpha_{2k} \alpha_{2j} R_{kj}^{22} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$R_0^{12} = I_{00}^{12} / I_{00}^{11}, \quad R_0^{22} = I_{00}^{22} / I_{00}^{11} \quad (16)$$

式(15)において、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{10} &= 1, \quad \alpha_{11} = \frac{\tau_{11}\delta_1}{\xi_1}, \quad \alpha_{12} = \left(\frac{\tau_{12}\delta_2}{\xi_1} \right) / \left(\frac{n_{g2}}{n_{g1}} \right) \\ \alpha_{20} &= 1, \quad \alpha_{21} = \left(\frac{\tau_{21}\delta_1}{\xi_2} \right) / \left(\frac{n_{g2}}{n_{g1}} \right), \quad \alpha_{22} = \frac{\tau_{22}\delta_2}{\xi_2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{kj}^{11} &= I_{kj}^{11} / I_{00}^{11}, \quad R_{kj}^{12} = I_{kj}^{12} / I_{00}^{12}, \\ R_{kj}^{22} &= I_{kj}^{22} / I_{00}^{22}, \\ R_{jk}^{11} &= R_{kj}^{11}, \quad R_{jk}^{22} = R_{kj}^{22}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式(16)、(18)の I はつぎに示すような分積分を表わす。

$$\begin{aligned}
 I_{00}^{11} &= \int_0^\infty \frac{\Phi(\omega)}{S_1(\omega)} d\omega \\
 I_{01}^{11} &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{\omega^2}{n_{g1}^2}\right) \frac{\Phi(\omega)}{N_1(\omega)S_1(\omega)} d\omega \\
 I_{02}^{11} &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{\omega^2}{n_{g2}^2}\right) \frac{\Phi(\omega)}{N_2(\omega)S_1(\omega)} d\omega \\
 I_{11}^{11} &= \int_0^\infty \frac{\Phi(\omega)}{N_1(\omega)S_1(\omega)} d\omega \\
 I_{12}^{11} &= \int_0^\infty \frac{N_3(\omega)\Phi(\omega)}{N_1(\omega)N_2(\omega)S_1(\omega)} d\omega \\
 I_{22}^{11} &= \int_0^\infty \frac{\Phi(\omega)}{N_2(\omega)S_1(\omega)} d\omega
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 I_{00}^{12} &= \int_0^\infty \frac{S_2(\omega)\Phi(\omega)}{S_1(\omega)S_2(\omega)} d\omega, \quad I_{01}^{12} = I_a - 4h_g I_d \\
 I_{02}^{12} &= I_b - 4h_{g2} I_e, \quad I_{10}^{12} = I_a + 4h_g I_d \\
 I_{11}^{12} &= \int_0^\infty \frac{S_3(\omega)\Phi(\omega)}{N_1(\omega)S_1(\omega)S_2(\omega)} d\omega, \\
 I_{12}^{12} &= I_c - 4I_f \\
 I_{20}^{12} &= I_b + 4h_{g2} I_e, \quad I_{21}^{12} = I_c + 4I_f \\
 I_{22}^{12} &= \int_0^\infty \frac{S_3(\omega)\Phi(\omega)}{N_2(\omega)S_1(\omega)S_2(\omega)} d\omega \\
 I_a &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{\omega^2}{n_{g1}^2}\right) \frac{S_3(\omega)\Phi(\omega)}{N_1(\omega)S_1(\omega)S_2(\omega)} d\omega, \\
 I_b &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{\omega^2}{n_{g2}^2}\right) \frac{S_3(\omega)\Phi(\omega)}{N_2(\omega)S_1(\omega)S_2(\omega)} d\omega \\
 I_c &= \int_0^\infty \frac{N_3(\omega)S_3(\omega)\Phi(\omega)}{N_1(\omega)N_2(\omega)S_1(\omega)S_2(\omega)} d\omega, \\
 I_d &= \int_0^\infty \frac{\omega^2}{n_{g1}n_{s2}} \frac{S_4(\omega)\Phi(\omega)}{N_1(\omega)S_1(\omega)S_2(\omega)} d\omega \\
 I_e &= \int_0^\infty \frac{\omega^2}{n_{g2}n_{s2}} \frac{S_4(\omega)\Phi(\omega)}{N_2(\omega)S_1(\omega)S_2(\omega)} d\omega, \\
 I_f &= \int_0^\infty \frac{\omega^2}{n_{g2}n_{s2}} \frac{N_4(\omega)S_4(\omega)\Phi(\omega)}{N_1(\omega)N_2(\omega)S_1(\omega)S_2(\omega)} d\omega
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

I_{kj}^{22} は式 (19) において $S_1(\omega)$ の代りに $S_2(\omega)$ とすればよい。また、式 (19), (20) において、

$$\begin{aligned}
 N_1(\omega) &= \left(1 - \frac{\omega^2}{n_{g1}^2}\right)^2 + 4h_{g1}^2 \frac{\omega^2}{n_{g1}^2} \\
 N_2(\omega) &= \left(1 - \frac{\omega^2}{n_{g2}^2}\right)^2 + 4h_{g2}^2 \frac{\omega^2}{n_{g2}^2} \\
 N_3(\omega) &= \left(1 - \frac{\omega^2}{n_{g1}^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{n_{g2}^2}\right) + 4h_{g1}h_{g2} \frac{\omega^2}{n_{g1}n_{g2}} \\
 N_4(\omega) &= \left(1 - \frac{\omega^2}{n_{g1}^2}\right) h_{g2} - \frac{n_{g2}}{n_{g1}} \left(1 - \frac{\omega^2}{n_{g2}^2}\right) h_{g1}
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

$S_1(\omega) \sim S_4(\omega)$ は上式で添字 g を添字 s に書き直せばよい。

また、 $\Phi(\omega)$ は地震加速度 $\ddot{\phi}(t)$ のパワー スペクトルを示し、 $\ddot{\phi}(t)$ のフーリエ変換を $F(i\omega)$ とすれば $\Phi(\omega)$ は次式のように表わされる。

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} |F(i\omega)|^2 \tag{22}$$

以上、 λ の計算式について述べたが、実際問題として λ を求めるのに個々の場合に式 (19), (20) の積分値を計算するのはきわめて複雑であり実用的でない。そこであらかじめ地盤と橋脚の固有振動数、減衰定数等 (n_g, h_g, n_s, h_s 等) の値をいろいろに変えて I_{kj}^{11} 等の積分値を計算し式 (16), (18) の R_{kj}^{11}, R_0^{12} 等の値を求めてその結果を図表化しておくという方法を用いることにした。このようにすれば実際にある一定の n_g, n_s, h_g, h_s 等の値に対して λ を求めようとする場合、 η, α_{kj} 等は式 (14), (17) から計算できる既知の定数であるから、与えられた n_g, n_s, h_g, h_s 等の値に必ず R_{kj}^{11}, R_0^{12} 等の値を図表から読み取って式 (15), (13) に入れば λ の値は比較的容易に求めることができる。

5. R_{kj}^{11} 等の数値計算

R_{kj}^{11} 等の値を求めるには I_{kj}^{11} 等の積分を行なわねばならないが、それには基盤における地震加速度 $\ddot{\phi}(t)$ のパワー スペクトル $\Phi(\omega)$ の式の形がわかっていなければならない。本節の計算にはつぎに示す式²⁾を用いた。

$$\Phi(\omega) = C_0 \frac{1 + 4h_0^2 \frac{\omega^2}{n_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{n_0^2}\right)^2 + 4h_0^2 \frac{\omega^2}{n_0^2}} \tag{23}$$

ここに、 C_0 は一定値、 n_0 は地震加速度 スペクトルの卓越円振動数、 h_0 はスペクトルの山の形に関係する量である。なお、地震加速度がランダムな波形をもっていると考えられる場合にはそのパワー スペクトルは一定値となり

$$\Phi(\omega) = C_0 \tag{24}$$

R_{kj}^{11} 等の計算は地盤と橋脚に対していずれも第2次振動までを考えた場合に相当する $P=R=2$ の場合について行なった。また I_{kj}^{11} 等の積分は電子計算機を使用して留数計算を行なうことによって求めた。なお、 R_{kj}^{11}, R_0^{12} 等の計算図表はその一部を後節に示した。

6. 計算例および考察

著者らは前論において図-1 に示した鋼管橋脚の地震応答を計算し、地盤の変形を考慮する場合と考慮しない場合の橋脚天端の最大応答変位の比を地盤の性質をいろいろ変えた場合について求めた。本節の目的は第1に本論の一適用例を示すこと、第2に本論の統計的計算によって得られた結果と前論ですでに得られている数値計算結果とを比較検討することの2つである。そのため地盤や橋脚の諸元等はすべて前論の場合と同一の数値を用いた。

前論の計算では入力地震波 $\ddot{\phi}(t)$ としてエルセントロ地震 (May 18, 1940) を用いたので、本論でも式 (23) の n_0 の値はエルセントロ地震の卓越周期を 0.5 秒前後と見て $n_0=12.56$ を採用した。 h_0 の値については田治

見²⁾にしたがって $h_0=0.3$ とした。

前述のごとく地盤変形の影響を明らかにするために、地盤の性質を前論と同じく表-1に示すように No. 1 から No. 6 まで6通りに変えた。いずれの場合にも、地盤反力係数 k は深さ方向に三角形分布とし、地盤の厚さ 5.5m を3等分 ($q=3$) し、地盤のせん断弾性係数 G との比 $G/k=20$ とした。なお計算は橋脚の下端が基礎地盤とヒンジ結合をなしている場合について行なった。

表-1 地盤の性質

No.	1	2	3	4	5	6
k_0 (kg/cm ²)	4.0	1.0	0.4	0.29	0.1	0.04
G_0 (kg/cm ²)	80	20	8.0	5.80	2.0	0.80

計算結果を図-2に示す。図-2は地盤の変形を考慮する場合の橋脚天端の変位応答の分散と地盤の変形を考慮しない場合のそれとの比の平方根 λ (式(1)からこの値は橋脚の各最大変位の比に等しい) を n_{g1}/n_{s1} を横軸にとり、橋脚の減衰定数をパラメータとして表わしたものである。実線は $h_s=0.05$ の場合を、点線は $h_s=0.1$ の場合を示す。図中の○印と×印は前論に示したエルセントロ地震に対する応答計算結果を示したもので、○印は同図中の実線に、×印は点線にそれぞれ対応するものである。図-2から前論のエルセントロ地震記録に対して電子計算機によって刻々求めた応答計算値と本論による統計的計算値とは比較的良好一致していることがわかる。

図-2 振幅の比 λ

なお、入力地震波に対する橋脚の刻々の変位応答を計算しようとする場合、これを modal analysis の手法を用いて行なうときにどれくらいの振動次数までとればよいかの一つの目安として式(14)、(16)から τR_0^{12} 、 $\tau^2 R_0^{22}$ の値を採用するのも有用な方法の一つになりうると考えられる。

7. 基礎での地震動の性質の影響

式(18)の R_{kj}^{11} 等の計算には h_s 、 n_s/n_g の値のみでなく n_0 、 h_0 、 h_g 等パラメータの数が多く、したがっていろいろの入力地震波に対する応答を統計的に計算しようとする場合にはそのパラメータの値をいろいろに変えて多くの図表を作らねばならないことになる。しかし n_0 、

h_0 の値をそれぞれいろいろ変えて橋脚の応答を統計的に計算して地盤の変形を考慮する場合の変位応答の分散と地盤の変形を考慮しない場合のそれとの比の平方根 λ をとると、この λ の値は n_0 、 h_0 の値の変化による影響をわずかしか受けて、上層地盤の性質に応じてほぼ一定値を有するとみてよいことがわかった。極端な場合として、入力地震波として全くランダムな波を考えたとき、すなわち、入力地震波の特性値 n_0 、 h_0 を全く無視して $\phi(\omega)=C_0$ とした場合について統計的計算を行なった結果、 λ の値の変化はわずかであった。統計的計算がある現象のいろいろな現われ方に対する一種の平均値的な意味合いを持つことを考慮すれば n_0 、 h_0 の変化による λ の値のわずかの相違は図表の単純化の点からも無視してよいのではないと思われる。このように考えてよいとすれば、パラメータの数が少なくなって h_s 、 h_g 、 n_s/n_g のみとなり入力地震波の性質をほとんど考えることなしに橋脚の変位応答におよぼす地盤変形の影響を図表を使って比較的簡単な計算から見積ることができることになる。

8. 応答計算図表

図-3(1)、(2)、(3)は基礎から入射する地震動を

図-3(1) R_0^{12} 、 R_0^{22} 、 R_{kj}^{11} の値

図-3(2) R_{kj}^{12} の値

図-3 (3) R_{hj}^{12} の値

ランダムとして、 h_s および h_g を factor として n_{s1}/n_{g1} の値を横軸にとり、 R_0^{kj} , R_{kj}^{11} , R_{kj}^{22} の値を図示したものである。実際の耐震設計においては、この図を用いることにより地盤変形を考慮する場合の鋼管橋脚の地震

応答の最大値を容易に求めることができる。

9. む す び

地盤および鋼管橋脚の振動型と固有振動周期がわかれば統計理論より得られた簡単な図表を用いて、地盤変形を考慮に入れた鋼管橋脚の地震応答を容易に求めることがわかった。しかし実際問題として水中にある軟弱地盤の固有振動周期を推定することには相当の困難があるであろう。われわれはこの問題についても目下考察中である。

参 考 文 献

- 1) 小坪清真・高西照彦：「鋼管橋脚の耐震性におよぼす基礎地盤変形の影響」，土木学会論文集148号，昭和42年12月。
- 2) 田治見宏：「耐震理論に関する基礎的研究」，東大生産技術研究所報告，Vol. 8, No. 4, 昭和34年3月。
- 3) G.W. Housner: Behavior of Structures during Earthquake, Proc. ASCE., Vol. 85, EM 4. Oct. 1959.

(1967.12.25・受付)