任意な形状の斜張橋の解析*

ANALYSIS OF GENERAL TYPES OF CABLE-STAYED GIRDER BRIDGE

前田 幸雄**・林 正***

By Yukio Maeda and Masa Hayashi

1. 緒 言

近年架設の機会が多くみられるようになった斜張橋の解法は、わが国でもいくつか発表されているが^{2)~7)}、その大部分の研究は特定な形式の斜張橋に限定されている。本文では、実用上考えられる最も一般的な形式の斜張橋の解法を示したものであって、解析上の基本系である主桁が変断面の連続桁、ゲルバー桁あるいは単純ばりの連続した構造に対しても適用できる。

解析方法は通常の不静定構造物の解析に用いられる応力法によったが、この方法によれば計算式の次数は斜張橋の内的不静定次数に等しく、演算する行列は必要最低限の次数で済むことになる。弾性方程式は各塔ごとに導いたので、斜張橋が形式の異なった塔を複数有する場合にもおのおのの塔に関する式を組み合わせるだけで、構造系全体の弾性方程式は容易に求められる。また、塔上で各ケーブルの支持方法が異なる場合にも、式および項を加え合わせるだけで所要の弾性方程式が求められるので、構造系が異なるたびに最初から計算式をつくり直す必要がなくなる。

本文の終りに、3 径間連続桁を基本系とする斜張橋を対象として数値計算を行なって各形式の斜張橋の弾性特性を明らかにした。

2. 基本形式

斜張橋にはそれを構成する要素、すなわち主桁、塔およびケーブルの結合方法により多様な形式が存在する。任意な形の斜張橋は、表-1 に示す最も簡単な構造系で

表-1 基本形式

Bottom End of Tower		Hinged		Fixed	
Cable Support on Tower		Fixed	Sliding	Fixed	Sliding
Connection of Tower to Girder	Free (A-Type)				
	Fixed (B-Type)				

* 昭和 43 年度土木学会関西支部年次学術講演会にて一部発表済

** 正会員 工博 大阪大学助教授 土木工学教室

*** 正会員 大阪大学助手 土木工学教室

ある基本形式を組み合わせることによって得られ、その形式は主桁と塔との結合状態によって 2 種類に大別され、それをさらに塔脚における塔の支持条件と塔上におけるケーブルの定着条件とによって分類すると、実用上表-1 の 8 形式が考えられる。

A₂-Type は不安定構造物なので、この形式は単独では用いられないで、一般に A₁-Type と併用される。表-1 の形式のほかに、それらを変形した表-2 のような形式も考えられる。これらはいずれも元の形式において、塔の主桁より下の部分を除いたものであるから、計算式においても塔の下部の長さを零にすればよい。

表-2

また、ケーブルを主桁に定着せずに構造系外で支持する場合でも、解析方法は以上の基本形式に含まれる。

3. 基礎方程式

(1) 解析上の仮定

基礎方程式の誘導にあたって用いた仮定はつぎのとおりである。

① 斜張橋を平面構造物と見なし、解析は微小変位理論に基づく。

② 変形によるケーブルの傾斜角の変化は無視する。

③ ケーブルのサグによる影響は無視する。

④ ケーブルが主桁の重心軸より偏心して定着された場合には、ケーブルの水平分力によって生ずる付加曲げモーメントは考慮する。

⑤ 塔の曲げ剛性は一定なものとみなす。

⑥ 主桁および塔の軸力による伸縮は無視する。

⑦ B-Type の塔を複数有する斜張橋では、下部構造が不静定ラーメン形式となるので、本文では取り扱わない。したがって、斜張橋は B-Type の塔を 2 基以上有

しないものとするが、B'-Type はこの限りではない。

(2) 記号

斜張橋は、任意な形式の r 基の塔と n 本のケーブルを有するものとする。

第 t 番目の塔は、第 l 番目から第 m 番目までの $(m-l+1)$ 本のケーブルを有し、塔頂より下に向かって順次ケーブル番号をつけていくものとする。

図-1 任意な形状の斜張橋

図-2 第 t 番目の塔に関する記号

X_i : 第 i ケーブルの不静定張力。

$\bar{X}_t$: 主桁と塔との剛結点 t に作用する不静定曲げモーメント。主桁に時計回りの曲げモーメントが作用するものを正とする。

β_t : 第 t 塔のロッキングによる回転角。時計回りを正とする。

α_i : 第 i ケーブルの傾斜角。主桁上より反時計回りに測る。

e_i : 主桁の重心軸から第 i ケーブル定着点までの偏心距離。下向きを正とする。

$\bar{l}_i$: 第 i ケーブルの長さ。

A_i : 第 i ケーブルの断面積。

E_i : 第 i ケーブルの見掛け上の縦弾性係数。

f_i : 第 i ケーブルのフレキシビリティ ($f_i = \bar{l}_i / E_i A_i$)。

h_i : 塔脚から塔のケーブル定着点 i までの高さ。

h_t : 第 t 塔の主桁より下部の長さ。

$\bar{h}_i$: 主桁より塔のケーブル定着点 i までの高さ ($\bar{h}_i = h_i - h_t$)。

$E_t J_t$: 第 t 塔の曲げ剛性。

ΔL_i : 塔の i 点における水平変位。右向きを正とする。

(3) 基礎方程式

基礎方程式は第 t 塔に着目して導くが、基本系であるケーブルと塔を取り除いた連続形式の主桁の影響値は既知であるとする。

a) 変形様式

塔の変形は、 A_1, A_2, B_1, B_2 -Type では、曲げ変形とロッキングが連成する。 A_3, A_4, B_3, B_4 -Type では、曲げ変形が生ずる。したがって、B-Type の塔を有する斜

図-3 A_1 -Type の変形様式

図-4 B_1 -Type の変形様式

張橋では、塔の変形により主桁は ΔL_t だけ水平移動する (B'-Type では移動しない)。

ケーブル位置の偏心による付加曲げモーメントは時計回りを正として

$$M_i = -e_i X_i \cos \alpha_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots (1)$$

ケーブルの伸びは

$$\Delta l_i = \frac{\bar{l}_i}{E_i A_i} X_i = f_i X_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots (2)$$

b) 幾何学的条件式

変形後の変位の連続性を表わす適合条件で、塔でのケーブルの支持方法により 2 通りの場合がある。

図-5 節点変位の関係

④ 固定支持:

$$\Delta l_i = \delta_i \sin \alpha_i + \Delta \bar{L}_i \cos \alpha_i \quad \dots\dots (3)$$

⑤ 滑動支持:

第 a, b ケーブルが 1 本のケーブルから成り、塔で滑動支持されている場合には

$$\Delta l_a + \Delta l_b = \delta_a \sin \alpha_a + \delta_b \sin \alpha_b + \Delta \bar{L}_a (\cos \alpha_a + \cos \alpha_b) \quad \dots\dots (4)$$

さらに力学的に

$$X_a = X_b \quad \dots\dots (5)$$

が成立する。

ここに、 $\Delta \bar{L}_i$ は塔のケーブル定着点 i の主桁に対する相対水平変位を表わす。すなわち、B-Type の第 p 塔による主桁の水平変位を ΔL_p とすると

$$\Delta \bar{L}_i = \Delta L_i - \Delta L_p \quad (i=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (6)$$

c) 主桁の変形量

塔およびケーブルを切離した主桁の第 k 点のたわみおよびたわみ角は

$$\begin{aligned} \delta_k &= \delta_{k0} - \sum_{i=1}^n (\eta_{ki} \sin \alpha_i + e_i \zeta_{ki} \cos \alpha_i) X_i \\ &+ \sum_{p=1}^s \zeta_{kp} \bar{X}_p \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_k &= \theta_{k0} - \sum_{i=1}^n (\phi_{ki} \sin \alpha_i + e_i \psi_{ki} \cos \alpha_i) X_i \\ &+ \sum_{p=1}^s \psi_{kp} \bar{X}_p \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここに

- δ_{k0} : 外力荷重による基本主桁の第 k 点のたわみ
- θ_{k0} : 外力荷重による基本主桁の第 k 点のたわみ角
- η_{ki} : 単位集中荷重 $P_i=1$ による基本主桁の第 k 点のたわみ
- ϕ_{ki} : 単位集中荷重 $P_i=1$ による基本主桁の第 k 点のたわみ角
- ζ_{ki} : 時計回りの単位曲げモーメント $M_i=1$ による基本主桁の第 k 点のたわみ
- ψ_{ki} : 時計回りの単位曲げモーメント $M_i=1$ による基本主桁の第 k 点のたわみ角
- s : 斜張橋が有する B-Type の塔の数で、少なくとも $(s-1)$ 基は B'-Type

である。

d) 塔の平衡方程式

④ A₁, A₂-Type

塔はロッキングとともに曲げ変形を受けることから、第 t 塔のケーブル定着点の水平変位は 図-3 を参照して

$$\begin{aligned} \Delta L_j &= h_j \beta_t - \frac{1}{6 h_l E_t J_t} \left[\sum_{k=l}^j h_j (h_l - h_k) \right. \\ &\quad \times (2 h_l h_k - h_k^2 - h_j^2) X_k \cos \alpha_k \\ &\quad + \sum_{k=j+1}^m h_k (h_l - h_j) (2 h_l h_j - h_j^2 - h_k^2) \\ &\quad \left. \times X_k \cos \alpha_k \right] \quad (j=l, \dots, m) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

上式にて $j=l$ とすると

$$\beta_t = \Delta L_l / h_l \dots\dots\dots (9)'$$

また、塔の支承条件より

$$\sum_{k=l}^m h_k X_k \cos \alpha_k = 0 \dots\dots\dots (10)$$

⑤ A₃, A₄-Type

塔は $(m-l+1)$ 個の集中荷重を受ける片持ばりと考えられるから

$$\begin{aligned} \Delta L_j &= -\frac{1}{6 E_t J_t} \left[\sum_{k=l}^j h_j^2 (3 h_k - h_j) X_k \cos \alpha_k \right. \\ &\quad + \sum_{k=j+1}^m h_k^2 (3 h_j - h_k) X_k \cos \alpha_k \left. \right] \\ &\quad (j=l, \dots, m) \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

⑥ B₁, B₂-Type

曲げモーメント $\bar{X}_t$ が塔に作用しているから

$$\begin{aligned} \Delta L_j &= h_j \beta_t - \frac{1}{6 h_l E_t J_t} \left[\sum_{k=l}^j h_j (h_l - h_k) (2 h_l h_k \right. \\ &\quad - h_k^2 - h_j^2) X_k \cos \alpha_k + \sum_{k=j+1}^m h_k (h_l - h_j) \\ &\quad \times (2 h_l h_j - h_j^2 - h_k^2) X_k \cos \alpha_k \\ &\quad \left. + (h_l - h_j) (2 h_l h_j - 3 h_l^2 - h_j^2) \bar{X}_t \right] \\ &\quad (j=l, \dots, m) \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

主桁の水平変位は

$$\begin{aligned} \Delta L_t &= h_t \beta_t - \frac{1}{6 h_l E_t J_t} \left[\sum_{k=l}^m h_t (h_l - h_k) (2 h_l h_k \right. \\ &\quad - h_k^2 - h_t^2) X_k \cos \alpha_k + 2 h_t (h_l - h_t) (h_l \\ &\quad \left. - 2 h_t) \bar{X}_t \right] \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

さらに、力のつりあい条件から

$$\sum_{k=l}^m h_k X_k \cos \alpha_k + \bar{X}_t = 0 \dots\dots\dots (14)$$

⑦ B₃, B₄-Type

図-4 を参照して

$$\begin{aligned} \Delta L_j &= -\frac{1}{6 E_t J_t} \left[\sum_{k=l}^j h_j^2 (3 h_k - h_j) X_k \cos \alpha_k \right. \\ &\quad + \sum_{k=j+1}^m h_k^2 (3 h_j - h_k) X_k \cos \alpha_k \\ &\quad \left. + 3 h_t (2 h_j - h_t) \bar{X}_t \right] \quad (j=l, \dots, m) \\ &\quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta L_t &= -\frac{1}{6 E_t J_t} \left[\sum_{k=l}^m h_t^2 (3 h_k - h_t) X_k \cos \alpha_k \right. \\ &\quad \left. + 3 h_t^2 \bar{X}_t \right] \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

e) 剛結条件式 (B-Type のみ)

主桁と塔とが剛結されていることから

$$\theta_t = \bar{\theta}_t \dots\dots\dots (17)$$

が成立する。ここに、 θ_t は式 (8) により、 $\bar{\theta}_t$ は各形式により次式で与えられる。

⑧ B₁, B₂-Type

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_t &= \beta_t - \frac{1}{6 h_l E_t J_t} \left[\sum_{k=l}^m (h_l - h_k) (2 h_l h_k - h_k^2 \right. \\ &\quad - 3 h_t^2) X_k \cos \alpha_k \\ &\quad \left. + 2 (3 h_t^2 - 3 h_t h_l + h_l^2) \bar{X}_t \right] \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

⑨ B₃, B₄-Type

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_t &= -\frac{1}{2 E_t J_t} \left[\sum_{k=l}^m h_t (2 h_k - h_t) X_k \cos \alpha_k \right. \\ &\quad \left. + 2 h_t \bar{X}_t \right] \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

4. 弾性方程式

n 本のケーブルを有する斜張橋では、弾性方程式は幾何学的条件式より n 元連立方程式となるが、B₃, B₄-Type の塔が存在する場合にはさらに剛結条件式を加えなければならない。また、A₁, A₂-Type では弾性方

式を簡潔にするために塔の平衡方程式をそのままの形で連立させた。

弾性方程式を誘導するときにケーブル張力 X_i の代りにその鉛直成分 V_i を用いる。すなわち、

$$V_i = X_i \sin \alpha_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots(20)$$

また、式の冗長化を避けるためにつぎの記号を用いる。

$$\left. \begin{aligned} F_i &= f_j / \sin^2 \alpha_j, \quad L_j = h_j \cot \alpha_j \\ \bar{L}_j &= (h_j - h_t) \cot \alpha_j, \quad Y_{ji} = \eta_{ji} + e_i \zeta_{ji} \cot \alpha_i \\ Z_{ti} &= \phi_{ti} + e_i \psi_{ti} \cot \alpha_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

斜張橋が形式の異なる塔を有する場合でも、弾性方程式をおのおのの塔についてつくることのできるの、以下第 t 塔について式を導く。

(1) A₁-Type

まず、第 t 塔が A₁-Type の場合には式 (3) から

$$\frac{f_j}{\sin^2 \alpha_j} V_j = \delta_j + \Delta L_j \cot \alpha_j - \Delta L_p \cot \alpha_j \quad (j=l, \dots, m) \dots\dots\dots(3)'$$

この式と、式 (10) とを連立させることにより第 t 塔に関する弾性方程式は、ケーブル張力の鉛直成分 V_i 、ロッキングによる塔の回転角 β_t と B-Type の塔による曲げモーメント $\bar{X}_p$ を未知量として、つぎのようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} F_j V_j + \sum_{i=1}^n Y_{ji} V_i + \sum_{k=l}^m H_{jk} V_k - \sum_{p=1}^s \zeta_{jp} \bar{X}_p - L_j \beta_t \\ + \Delta L_p \cot \alpha_j = \delta_{j0} \quad (j=l, \dots, m) \dots\dots\dots(22)_1 \\ \sum_{k=l}^m L_k V_k = 0 \dots\dots\dots(22)_2 \end{aligned} \right.$$

ここに

$$H_{jk} = \begin{cases} \frac{L_j \cot \alpha_k}{6 E_t J_t} (h_l - h_k) (2 h_l h_k - h_k^2 - h_j^2) & (k \leq j) \dots\dots\dots(23)_1 \\ \frac{L_k \cot \alpha_j}{6 E_t J_t} (h_l - h_j) (2 h_l h_j - h_j^2 - h_k^2) & (k \geq j) \dots\dots\dots(23)_2 \end{cases}$$

上式中、第 p 塔に働く不静定曲げモーメント $\bar{X}_p$ は第 p 塔が B₁, B₂-Type なら式 (14) によりケーブルの不静定張力 X_i に置き換えられる。また、B₃, B₄-Type なら未知量としてそのまま式中に残る。主桁の水平変位 ΔL_p は第 p 塔の形式に応じて式 (13) または式 (16) を用いる。B-Type の塔が存在しない場合には、 $\bar{X}_p$ および ΔL_p を含む項は消える。以上のことは、以下に記述する各弾性方程式に対しても適用するものとする。

つぎに、第 t 塔が A₁'-Type の場合には他の塔の形式に関係なく式 (22)₁ において ΔL_p の項を省く。

(2) A₃-Type

式 (3) から $\Delta L_j, \delta_j, \Delta \bar{L}_j$ を消去すると、第 j ケーブルに関する式は

$$F_j V_j + \sum_{i=1}^n Y_{ji} V_i + \sum_{k=l}^m H_{jk} V_k - \sum_{p=1}^s \zeta_{jp} \bar{X}_p$$

$$+ \Delta L_p \cot \alpha_j = \delta_{j0} \quad (j=l, \dots, m) \dots\dots\dots(24)$$

ここに

$$H_{jk} = \begin{cases} \frac{L_j \cot \alpha_k}{6 E_t J_t} h_j (3 h_k - h_j) \quad (k \leq j) \dots\dots\dots(25)_1 \\ \frac{L_k \cot \alpha_j}{6 E_t J_t} h_k (3 h_j - h_k) \quad (k \geq j) \dots\dots\dots(25)_2 \end{cases}$$

(3) B₁-Type

式 (3) と式 (17) を連立させて

$$\left\{ \begin{aligned} F_j V_j + \sum_{i=1}^n Y_{ji} V_i + \cot \alpha_j \sum_{k=l}^m (H_{jk}' - H_{tk}') V_k \\ - \sum_{p=1}^s \zeta_{jp} \bar{X}_p - \bar{L}_j \beta_t = \delta_{j0} \\ \sum_{i=1}^n Z_{ti} V_i - \sum_{k=l}^m K_{tk} V_k - \sum_{p=1}^s \psi_{tp} \bar{X}_p + \beta_t = \theta_{t0} \end{aligned} \right.$$

ここに、 H_{jk}', H_{tk}', K_{tk} はそれぞれ式 (12), (13), (18) の右辺第 2 項を表わす。

この 2 式より塔の回転角 β_t を消去すると、弾性方程式は

$$\begin{aligned} F_j V_j + \sum_{i=1}^n (Y_{ji} + \bar{L}_j Z_{ti}) V_i + \sum_{k=l}^m H_{jk} V_k \\ - \sum_{p=1}^s (\zeta_{jp} + \bar{L}_j \psi_{tp}) \bar{X}_p \\ = \delta_{j0} + \bar{L}_j \theta_{t0} \quad (j=l, \dots, m) \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

式中、 H_{jk} は

$$H_{jk} = \begin{cases} \frac{\bar{L}_j \cot \alpha_k}{6 E_t J_t} \bar{h}_j (3 \bar{h}_k - \bar{h}_j) \quad (k \leq j) \dots\dots\dots(27)_1 \\ \frac{\bar{L}_k \cot \alpha_j}{6 E_t J_t} \bar{h}_k (3 \bar{h}_j - \bar{h}_k) \quad (k \geq j) \dots\dots\dots(27)_2 \end{cases}$$

第 t 塔が B₁'-Type の場合には $h_t = 0$ であるから式 (26), (27) において

$$\bar{h}_j = h_j, \quad \bar{L}_j = L_j \text{ etc.}$$

となる。

(4) B₃-Type

この形式では弾性方程式は $(m-l+1)$ 本の式 (3) に式 (17) を加えて、

$$\left\{ \begin{aligned} F_j V_j + \sum_{i=1}^n Y_{ji} V_i + \sum_{k=l}^m H_{jk} V_k - \sum_{p=1}^s \zeta_{jp} \bar{X}_p \\ + H_{tt} \bar{X}_t = \delta_{j0} \quad (j=l, \dots, m) \dots\dots\dots(28)_1 \\ \sum_{i=1}^n Z_{ti} V_i - \sum_{k=l}^m K_{tk} V_k - \sum_{p=1}^s \psi_{tp} \bar{X}_p \\ + K_{tt} \bar{X}_t = \theta_{t0} \dots\dots\dots(28)_2 \end{aligned} \right.$$

ここに、

$$H_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{6 E_t J_t} [h_j^2 (3 h_k - h_j) - h_t^2 (3 h_k - h_t)] \\ \times \cot \alpha_j \cot \alpha_k \quad (k \leq j) \dots\dots\dots(29)_1 \\ \frac{1}{6 E_t J_t} [h_k^2 (3 h_j - h_k) - h_t^2 (3 h_k - h_t)] \\ \times \cot \alpha_j \cot \alpha_k \quad (k \geq j) \dots\dots\dots(29)_2 \end{cases}$$

$$H_{tt} = \frac{h_t \bar{L}_j}{E_t J_t} \dots\dots\dots(30)$$

$$K_{tk} = \frac{1}{2 E_t J_t} h_t (2 h_k - h_t) \cot \alpha_k \dots\dots\dots(31)$$

$$K_{tt} = \frac{h_t}{E_t J_t} \dots\dots\dots (32)$$

(5) A_2, A_4, B_2, B_4 -Type

ケーブルが塔上で滑動支持される A_2, A_4, B_2, B_4 -Type ではそれらが単独で用いられるか、またはそれぞれ A_1, A_3, B_1, B_3 -Type と併用される。したがってその弾性方程式は (1)~(4) で示した式を重ね合わせるだけで求められる。

いま、第 a, b ケーブルが1本のケーブルでできており滑動支持されているとすると、このケーブルに対する幾何学的条件式は式 (3) の代りに式 (4) を用いればよいが、これは式 (3) において $j=a, j=b$ の場合の2本の式を加えたものに等しい。また、式 (5) も成立するから X_a を含む項と X_b を含む項を加え合わせて不静定次数を下げればよい。ただし、弾性方程式を導く際に式 (20) で変数変換を行なっているためにそのまま式や項の和を取るわけにはいかないことに注意を要する。すなわち、第 b ケーブルに関する式の両辺に $\sin \alpha_b / \sin \alpha_a$ を乗じたものを第 a ケーブルの式に加える。つぎに、 $V_b = (\sin \alpha_b / \sin \alpha_a) V_a$ とおいて、この項を V_a の項に加えれば所要の弾性方程式が求められる。

第 t 塔に滑動支持のケーブルが存在する場合にはその弾性方程式の一般式はつぎのようになる。

$$F_j^* V_j + \sum_{i=1}^n Y_{ji}^* V_i - \sum_{p=1}^s \zeta_{jp}^* \bar{X}_p - \Delta \bar{L}_j \cdot \cot^* \alpha_j = \delta_{j0}^* \quad (j=l, \dots, m: j \neq b) \dots\dots\dots (33)_1$$

さらに上式とは独立に

$$V_b = (\sin \alpha_b / \sin \alpha_a) V_a \dots\dots\dots (33)_2$$

が成立する。式 (33)₁ において $\Delta \bar{L}_j$ は塔の形式に応じた式を用いる。また、各記号の意味は式 (21) のほかに次式のごとくである。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n Y_{ji}^* &= \sum_{i=1}^n Y_{ji} \quad (j \neq b) \\ F_j^* &= \begin{cases} f_j / \sin^2 \alpha_j & (j \neq a) \\ (f_a + f_b) / \sin^2 \alpha_a & (j = a) \end{cases} \\ \cot^* \alpha_j &= \begin{cases} \cot \alpha_j & (j \neq a) \\ (\cos \alpha_a + \cos \alpha_b) / \sin \alpha_a & (j = a) \end{cases} \\ Y_{ji}^* &= \begin{cases} Y_{ji} & (j, i \neq a) \\ Y_{ai} + Y_{bi} (\sin \alpha_b / \sin \alpha_a) & (j = a, i \neq a) \\ Y_{ja} + Y_{jb} (\sin \alpha_b / \sin \alpha_a) & (j \neq a, i = a) \\ Y_{aa} + (Y_{ab} + Y_{ba}) (\sin \alpha_b / \sin \alpha_a) + Y_{bb} (\sin \alpha_b / \sin \alpha_a)^2 & (j = i = a) \end{cases} \\ \zeta_{jp}^* &= \begin{cases} \zeta_{jp} & (j \neq a) \\ \zeta_{ap} + \zeta_{bp} (\sin \alpha_b / \sin \alpha_a) & (j = a) \end{cases} \\ \delta_{j0}^* &= \begin{cases} \delta_{j0} & (j \neq a) \\ \delta_{a0} + \delta_{b0} (\sin \alpha_b / \sin \alpha_a) & (j = a) \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

また、滑動支持されたケーブルが他の塔に含まれてい

るならば、いま着目している第 t 塔の弾性方程式は V_a の項に V_b の項を $(\sin \alpha_b / \sin \alpha_a)$ 倍したものを加えればよい。

以上の各形式においてケーブルが地中に固定された場合には、そのケーブル定着点のたわみ影響値を零とし、また他の塔の形式に無関係に主桁の水平変位 ΔL_p (または ΔL_t) を含む項を削除すればよい。

5. 断面力と変形量

不静定量 $V_i, \bar{X}_t$ が求まったならば、斜張橋の塔と主桁の任意断面 j, k の断面力と変形量は次式で求められる。

$$1) \text{ 塔の軸力: } N_j = - \sum_{k=1}^j V_k \dots\dots\dots (35)$$

$$2) \text{ 塔のせん断力: } Q_j = \sum_{k=1}^j V_k \cot \alpha_k \dots\dots\dots (36)$$

3) 塔の曲げモーメント:

$$M_j = \sum_{k=1}^j (h_k - h_j) V_k \cot \alpha_k \dots\dots\dots (37)_1$$

ただし、B-Type で $h_j < h_t$ のときは次式による。

$$B_1, B_2\text{-Type: } M_j = -h_j \sum_{k=1}^m V_k \cot \alpha_k \dots\dots\dots (37)_2$$

$$B_3, B_4\text{-Type: } M_j = \sum_{k=1}^m (h_k - h_j) V_k \cot \alpha_k + \bar{X}_t \dots\dots\dots (37)_3$$

4) 塔頂の水平変位

$$A_1, A_2\text{-Type: } \Delta L_t = h_t \beta_t \dots\dots\dots (38)_1$$

$$A_3, A_4\text{-Type: } \Delta L_t = - \frac{1}{6 E_t J_t} \sum_{k=1}^m h_k^2 \times (3 h_t - h_k) V_k \cot \alpha_k \dots\dots\dots (38)_2$$

$$B_1, B_2\text{-Type: } \Delta L_t = h_t \theta_t - \frac{1}{6 E_t J_t} \sum_{k=1}^m (3 \bar{h}_k^2 \bar{h}_t - \bar{h}_k^3 + 2 h_t^3) V_k \cot \alpha_k \dots\dots\dots (38)_3$$

$$B_3, B_4\text{-Type: } \Delta L_t = - \frac{1}{6 E_t J_t} \left[\sum_{k=1}^m h_k^2 (3 h - h_k) V_k \cot \alpha_k + 3 h_t (2 h_t - h_t) \bar{X}_t \right] \dots\dots\dots (38)_4$$

ここに、 θ_t は式 (8) による。

$$5) \text{ 主桁の軸力: } N_k = - \sum_{i=1}^k V_i \cot \alpha_i - \sum_{i=1}^k Q_i - H_p \dots\dots\dots (39)$$

ここに、主桁の着目断面 k とケーブル番号 i とは主桁の端から順次とするものとする。第 k 点が主桁のピン支承 p または主桁と塔との結合点 t を越えるときには、支承の水平反力 H_p または塔のせん断力 Q_t を順次加えるものとする。仮定により主桁のピン支承は B-Type の塔を有する斜張橋では存在しないが、B-Type の塔を有しない斜張橋ではピン支承に作用する水平反力は外的なつりあいより右向きを正として次式により求められる。

$$H_p = \sum_{i=1}^r Q_i \dots \dots \dots (40)$$

ただし、 r は A' , B' -Type の塔を除いた残りの塔の数を表わす。

- 6) 主桁のせん断力・曲げモーメント・たわみ・たわみ角

$$S_k = S_{k0} - \sum_{i=1}^n (S_{ki} + e_i \bar{S}_{ki} \cot \alpha_i) V_i + \sum_{p=1}^s \bar{S}_{kp} \bar{X}_p \dots \dots \dots (41)$$

ここに

S_{k0} : 外力荷重による基本主桁の第 k 点の断面力または変形量

S_{ki} : 単位集中荷重 $P_i=1$ による基本主桁の第 k 点の断面力または変形量

$\bar{S}_{ki}$: 単位曲げモーメント $M_i=1$ による基本主桁の第 k 点の断面力または変形量

6. 数値計算例

(1) 計算例

理論式の合理性を確認するためと、各形式の斜張橋の構造特性を調べるために、図-6 に示すような3径間連続桁を基本系とする対称な3形式の斜張橋について数値計算を行なった。

連続桁はスパン比 1.0 : 2.5 : 1.0 なる等断面ばりとする。ケーブルの数は8本で主桁を等間隔で支持し、その張り方は放射状にした RADIAL-Type とした。塔でのケーブルの支持方法は固定支持と滑動支持を種々組み合わせて、計9種類の斜張橋に番号を付けた(表-3)。

図-6 計算例

表-3 Case No.

Cable Number		Cable Support on Tower		
1, 2		Fixed	Fixed	Sliding
3, 4		Fixed	Sliding	Fixed
Basic System	A ₁ , A ₂ -Type	11(A ₁₋₁)	12(A ₁₋₂)	13(A ₂₋₁)
	A ₃ , A ₄ -Type	21(A ₃₋₃)	22(A ₃₋₄)	23(A ₄₋₃)
	B _{1'} , B _{2'} -Type	31(B _{1'-1})	32(B _{1'-2})	33(B _{2'-1})

Case No. の10位の数字は基本形式の種類を表わし、1位の数字は、1が上下のケーブルが固定支持、2は上が固定、下が滑動支持されたことを示し、3は2の逆を表わす。

与えた断面諸元は各場合とも共通で、すべて無次元化した。この無次元量は塔におけるケーブルの取付位置の高さに関する量と、塔およびケーブルの撓性を表わす量で、既設の斜張橋の平均的な値を用いた^{4), 5)}。なお、主桁の重心軸に対するケーブル取付位置の偏心はないものとした。

$$h/l_0 = 0.1, E_0 I_0 / E_t J_t = 10 \quad (t=1, 2)$$

$$E_0 I_0 / l_0^2 E_j A_j = 1 \times 10^{-4} \quad (j=1, 2, \dots, 8)$$

ここに、 l_0 , $E_0 I_0$ は基準長さおよび基準剛度で、いまの場合は主桁の全長および曲げ剛性を選んだ。

塔・ケーブル・主桁断面の番号 t, j , k または i (荷重・載荷点番号) と軸力を求めるための主桁の区間番号 m をローマ数字で表わす(図-7)。

図-7 部材番号

(2) 計算式

図-6 の計算例 (a), (b), (c) に対する弾性方程式は、式 (22), (24), (26) を具体的に示せばつぎのようになる。

A₁₋₁ (Case No. 11) :

$$\begin{cases} F_j V_j + \sum_{k=1}^8 Y_{jk} V_k - L_j \beta_i = \delta_{j0} \quad (j=1, 2, 3, 4) \dots (42)_1 \\ F_j V_j + \sum_{k=1}^8 Y_{jk} V_k - L_j \beta_i = \delta_{j0} \quad (j=5, 6, 7, 8) \dots (42)_2 \\ \sum_{k=1}^4 L_k V_k = 0 \dots \dots \dots (42)_3 \\ \sum_{k=5}^8 L_k V_k = 0 \dots \dots \dots (42)_4 \end{cases}$$

A₃₋₃ (Case No. 21) :

$$\begin{cases} F_j V_j + \sum_{k=1}^4 (Y_{jk} + H_{jk}) V_k + \sum_{k=5}^8 Y_{jk} V_k = \delta_{ji} \quad (j=1, 2, 3, 4) \dots (43)_1 \\ F_j V_j + \sum_{k=1}^4 Y_{jk} V_k + \sum_{k=5}^8 (Y_{jk} + H_{jk}) V_k = \delta_{ji} \quad (j=5, 6, 7, 8) \dots (43)_2 \end{cases}$$

ここに

$$H_{jk} = \frac{h L_j L_k}{3 E_t J_t} \dots \dots \dots (44)$$

B_{1'-1} (Case No. 31) :

$$\begin{aligned} F_j V_j + \sum_{k=1}^4 (Y_{jk} + L_j Z_{10,k} + L_k \zeta_{j,10} + L_j L_k \psi_{10,10} \\ + H_{jk}) V_k + \sum_{k=5}^8 (Y_{jk} + L_j Z_{10,k} + L_k \zeta_{j,30} \\ + L_j L_k \psi_{10,30}) V_k = \delta_{ji} + L_j \theta_{10,i} \end{aligned}$$

$$(j=1,2,3,4) \dots \dots \dots (45)_1$$

$$\begin{aligned} F_j V_j + \sum_{k=1}^4 (Y_{jk} + L_j Z_{30,k} + L_k \zeta_{j,10} + L_j L_k \psi_{30,10}) V_k \\ + \sum_{k=5}^8 (Y_{jk} + L_j Z_{30,k} + L_k \zeta_{j,30} + L_j L_k \psi_{30,30} \\ + H_{jk}) V_k = \delta_{i0} + L_j \theta_{30,i} \quad (j=5,6,7,8) \\ \dots \dots \dots (45)_2 \end{aligned}$$

ただし, H_{jk} は式 (44) による。

ケーブルを滑动支持にした形式に対しては, A_{1-2} -Type を例にとって示せば, 式 (33) から次式のように表わせる。

A_{1-2} (Case No. 12) :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 = \pi$$

を考慮すれば, 第1塔に関して

$$\begin{cases} F_j V_j + \sum_{k=1,2,5,6} Y_{jk} V_k + \sum_{k=3,7} (Y_{jk} + Y_{j,k+1}) V_k \\ - L_j \beta_1 = \delta_{ji} \quad (j=1,2) \\ \sum_{j=3}^4 [F_j V_j + \sum_{k=1,2,5,6} Y_{jk} V_k + \sum_{k=3,7} (Y_{jk} \\ + Y_{j,k+1}) V_k] = \sum_{j=3}^4 \delta_{0i} \\ V_1 = V_2, \quad V_3 = V_4 \end{cases}$$

が成立する。

また, 第2塔に関しても同様な式が成立することから, 結局, 弾性方程式は次式のように表わせる。

$$\begin{cases} F_j V_j + \sum_{k=1,3,5,7} (Y_{jk} + Y_{j,k+1}) V_k - L_j \beta_1 = \delta_{ji} \\ \quad (j=1,2) \dots \dots \dots (46)_1 \\ F_j V_j + \sum_{k=1,3,5,7} (Y_{jk} + Y_{j,k+1}) V_k - L_j \beta_2 = \delta_{ji} \\ \quad (j=5,6) \dots \dots \dots (46)_2 \\ \sum_{n=j}^{j+1} [F_n V_n + \sum_{k=1,3,5,7} (Y_{n,k} + Y_{n,k+1}) V_k] = \sum_{n=j}^{j+1} \delta_{ni} \\ \quad (j=3,7) \dots \dots \dots (46)_3 \end{cases}$$

さらに上式とは独立に

$$V_j = V_{j+1} \quad (j=1,3,5,7) \dots \dots \dots (47)$$

が成立する。

(3) 計算結果

鉛直集中荷重による影響値と満載等分布荷重による値を, つぎの諸量について計算し, その結果の一部を図で示す。

a) 断面力

- ① ケーブル張力の鉛直成分 V_{ji}
- ② ケーブル張力 X_{ji}
- ③ 塔の軸力 N_{ti}
- ④ 塔脚部の曲げモーメント M_{ti}
- ⑤ 主桁の軸力 N_{mi}
- ⑥ 主桁の曲げモーメント M_{ki}

b) 変形量

- ⑦ 主桁のたわみ δ_{ki}

(4) 結果の考察

- ① ケーブル張力の鉛直成分影響線 V_{ji} (図-8)

図-8 ケーブル張力の鉛直成分の影響線

図-9 ケーブル張力の影響線

図-10 塔の軸力影響線

図-11 塔脚部の曲げモーメント影響線

図-12 主桁の軸力影響線

第1塔に属する4本のケーブルについて, Case No. 11, 12 の値を示したが, Case 13 の影響値は Case 12 の線に全く一致してしまう。また, 他の形式 $A_{3,4}$ -Type, $B'_{1,2}$ -Type についてもケーブルの支持形式が同じ場合には, それぞれ Case 11, 12, 13 に一致する。Case 11 では, 主桁の右半分に荷重が載荷された場合には第1, 2 ケーブルと第3, 4 ケーブルの値はそれぞれほぼ同じ値

を示しているが、左半分では各ケーブルの間には差がでてくる。とくに第3, 4ケーブルの影響線は全く異なった形をしていて、当然のことながら主桁上のケーブル定着点付近に荷重が載荷した場合にその最大値が生じており、第2ケーブルについても同じことがいえる。しかし第1ケーブルではその定着点 ($k=0$) からかなり離れた第2ケーブルの定着点 ($k=18$) に荷重がきたとき、その最大値が生じる。これは第2ケーブルに生じた張力が塔上で第1ケーブルに伝達されるためと思われる。Case

図一13 主桁の曲げモーメント影響線 (Case No. 11)

図一14 主桁の曲げモーメント影響線 (Case No. 12)

図一15 主桁のたわみ影響線 (Case No. 11)

図一16 主桁のたわみ影響線 (Case No. 12)

12 では第3, 4ケーブルを1本のケーブルにして塔上で滑動支持したのに、第1, 2ケーブルまで1本のケーブルにしたかのように、それぞれの影響線は完全に一致してしまった。また、各ケーブルの値は Case 11 の値をそれぞれ平均した値に近くなっている。

② ケーブル張力の影響線 X_{ji} (図一9)

上の①で V_{ji} について述べたことはすべてケーブル張力についてもいえる。ただ、図一8と比較してみると、ケーブル張力の鉛直成分の最大値は第3, 4ケーブルで卓越しているが、図一9のケーブル張力ではその最大値は各ケーブルともほとんど同じになっている。最小値、すなわち圧縮力は第1ケーブルで最も大きい値が生じていることから、このケーブルが塔のアンカーの役目を果たしていることがわかる。

③ 塔の軸力影響線 N_{ti} (図一10)

塔に生じる軸力は着目している塔に属する全ケーブル張力の鉛直成分の和になることから、やはり①で述べたとおり Case 13 の場合は Case 12 の値に等しく、ケーブルの支持形式が同じならば塔の軸力も同じになる。また、図からわかるとおり、ケーブルの支持形式を変えてもケーブルに生ずる張力の鉛直成分の和は、各 Case ともほとんど同じになる。

④ 塔脚部の曲げモーメント影響線 (図一11)

塔に作用する曲げモーメントの値は各 Case によりかなりの差がある。まず、 $A_{1,2}$ -Type ではケーブルの張り方が RADIAL-Type であるために塔には曲げモーメントは生じない。 $A_{3,4}$ -Type、 $B'_{1,2}$ -Type では塔頂に集中荷重群を受ける片持ばりと考えれば、塔に生ずる曲げモーメントの大きさは、ケーブル張力の水平成分の和に支配される。したがって、①、②で述べたとおりケーブルを滑動支持にすると、左右のケーブル張力はほぼ等しくなると、その水平成分の和は固定支持の場合にくらべて減少し、塔の曲げモーメントも減るはずであるが、 $B'_{1,2}$ -Type では逆の傾向を示している。この理由は、塔頂に集まる4本のケーブルのうち、左右のそれぞれ2本のケーブル張力の水平成分の和がほぼ等しいのでケーブル張力のわずかな相違によってそれらの代数和が大きく変わることによるためである。また、ケーブル張力の水平成分のわずかな差が $A_{3,4}$ -Type と $B'_{1,2}$ -Type とで向きが逆になり、塔に作用する曲げモーメントの向きも反対になる。すなわち、荷重が側径間に載った場合には、 $A_{3,4}$ -Type では第2ケーブルに生ずる圧縮力が第1ケーブルの圧縮力より大きくなるため塔は反時計回りの曲げモーメントを受ける。一方、 $B'_{1,2}$ -Type では第1ケーブルと第2ケーブルの圧縮力の水平成分の和が塔に時計回りの曲げモーメントを起こさせることになる。

⑤ 主桁の軸力影響線 N_{mi} (図一12)

主桁に作用する軸力の形式の違いによる影響は、ケー

ブル張力の場合と同じく全ケーブルが固定支持の場合と1本のケーブルを滑動支持にした場合のほかは図には現われない。したがって Case 11 と Case 12 の場合の影響線のみを示した。主桁に作用する軸力はケーブル張力の水平成分によるから、主桁の各区間の軸力の最大値は、4本のケーブル張力の和が最大になるときに起きる。これは荷重が第2ケーブルの定着点付近($k=18$)にきたときである。また、側径間に荷重が載荷されたときには第1ケーブルの大きな圧縮力により区間Ⅰにかなり大きな引張力が生じる。Case 12 では、ケーブル張力の場合と同じように Case 11 の値をほぼ平均したものになっている。 $A_{1,2}$ -Type, $A_{3,4}$ -Type では区間ⅡとⅢとの値は同じであるが、 $B'_{1,2}$ -Type ではわずかに異なる。その差はケーブル張力の水平成分の和に等しく、前述のようにごくわずかの値なので、図には現われない。

⑥ 主桁の曲げモーメント影響線 M_{ki} (図-13, 14)

Case 11 の場合の曲げモーメント影響線群を 図-13 に、Case 12 の場合を 図-14 に示した。まず、図-13 の第 3, 4 ケーブルの定着点 ($k=5, 14$) の影響線の最大値は、定着点近くの影響線のそれよりかなり小さく、ケーブルが連続桁に対して弾性支承の役目を果たしていることがわかる。しかし、図-14 では、ケーブル定着点の影響線の最大値は前者の約3倍、最小値は約2倍から4倍になっており、連続桁をケーブルで弾性支持した効果が減少している。これとは反対に、中央径間の中央点の影響線は両者の間ではよく似ており、その最大値は全く同じ値を示している。他の形式の影響線はケーブル張力の鉛直成分が変わらないことから、図-13, 14 で代用できる。また、 $B'_{1,2}$ -Type では塔の曲げモーメントが主桁に作用しているが、これは他の荷重による曲げモーメントにくらべ値が小さいので、その影響は図上には現われない。

⑦ 主桁のたわみ影響線 δ_{ki} (図-15, 16)

Case 11 と 12 のたわみ影響線を 図-15, 16 に示した。たわみに関しても前述の曲げモーメントの場合と全く同じことがいえる。

(5) 形式に関する構造特性

図を考察することにより、形式の異なった9形式の斜張橋の弾性挙動についてつぎのような特性がわかった。

① 塔の形式に関する特性

ケーブルの支持形式が同じであれば、塔の形式が異なっても斜張橋の断面力および変形量は塔に関するものを除けばほとんど同じ値を示した。弾性方程式の係数行列は塔の形式が異なると全く違った値になるが、その解、すなわちケーブル張力の鉛直成分はほぼ同じ値を示し、その差異は実用上問題にならない。したがって主桁の断面力および変形量には数パーセントの差しか現われなかった。これは、斜張橋の両端支点からかなり剛性の高い

図-17 主桁の最大・最小曲げモーメント

図-18 主桁の最大・最小たわみ

図-19 満載等分布荷重による主桁の曲げモーメント

図-20 満載等分布荷重による主桁のたわみ

ケーブルで塔を支持したため、両端のケーブル ($j=1, 6$) を主桁上で定着すれば塔の形式による違いはかなり現われてくると思われる。また、ケーブルの張り方が塔に関して左右対称であることも、大きな原因であると考えられる。

② ケーブルの支持形式に関する特性

図-8 で示したように、ケーブルを1本でも滑動支持にすると第3, 4 ケーブルの張力の鉛直成分の最大値は著しく減少する。

このような弾性挙動は、斜張橋を弾性支承を有する連続桁と見なした場合、弾性支承の反力係数が減少したことになる。それゆえに、ケーブルを滑動支持にすることは斜張橋の剛性を低下させ、主桁にはきわめて不利となる。このことは 図-15 と 図-16 を比較すれば明らかに、第3, 4 ケーブルの定着点付近に荷重を載荷した場合には載荷点のたわみは大きくなり、その沈下量

にはほぼ等しいだけの浮上りが他のスパン側に生ずる。すなわち、主桁がロッキングするような挙動を示し、この影響が主桁の曲げモーメントにも現われて、 $M_{s,i}, M_{14,i}$ の最大・最小の影響値は全ケーブルを固定支持した場合の約3倍にも達する(図-17)。このような主桁の曲げモーメントとたわみが増大する傾向は側径間と中央径間の支承側に現われ、中央径間の中央点では全く認められないことには注意する必要がある(図-18)。

塔に関しては一般的な傾向はつかみ難い。

③ 以上①,②で述べたことは集中荷重に対する傾向であったが、満載等分布荷重に対しては、ケーブル張力には塔の形式およびケーブルの支持形式の違いによる影響はほとんどなくなる。したがって他の計算値にもその影響はあまり現われない(図-19, 20)。

7. 結 語

鉛直荷重が作用する場合の任意な形状の斜張橋の構造解析を行なった。個々の塔に関する弾性方程式は形式により異なるが、弾性方程式を行列表示した場合に構造物全体の撓性行列は各塔のたわみ性行列を小行列として分解できるのでそのほうが解析上便利であると思われる。また、電子計算機を対象としたプログラムも一般的なものを作成しやすくなるが、このことについてはつぎの機会にゆずる。

数値計算では基本系である主桁と塔とを特定な寸法に限定し、またケーブルもその数と剛性を一定なものにしたが、前述の形式による比較はこれらの形状が変わっても大体同じ傾向を示すものと思われる。斜張橋の弾性的

性質を知るためには、以上の形式による比較とともに断面諸元の値をいろいろ変えて調べる必要があり、この研究結果は引続いて発表する予定である。

最後に本文をまとめるにあたって助力を得た当時卒業学生の大森邦雄君(現 横河橋梁 K K 勤務)ならびに大学院学生 井本賀章君に謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Bleich, F. and others : The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges, U.S. Government Printing Office, Washington, (1950)
- 2) 岡村 : Kani の方法による斜張橋の解法, 土木技術, 第14巻第12号, (昭和34年12月)
- 3) 山本・八谷 : 斜張橋の静的構造解析, 三菱重工技報, Vol. 3, No. 6 (1966)
- 4) 田原 他5名 : 摩耶大橋の設計および現地実験, 三菱重工技報, Vol. 4, No. 3 (1967)
- 毛利 他3名 : 摩耶大橋の設計と施工, 土木学会誌, Vol. 52, No. 4 (1967)
- 5) 日本道路公団 : 尾道大橋設計計算書 (1968)
- 6) 渡辺 他2名 : 斜張橋の構造特性について, 土木学会北海道支部論文集, 第24号 (昭和43年2月)
- 7) 長谷川・成岡 : 還元法による斜張橋の解析, 土木学会誌, Vol. 53, No. 5 (1968)
- 8) Homberg, H. : Einflusslinien von Schrägseilbrücken, Der Stahlbau, Heft 2, (1955)
- 9) Hess, H. : Die Severinsbrücke Köln, Der Stahlbau, Heft 8 (1960)
- 10) Protte, W. and Tross, W. : Simulation als Vorgehensweise bei der Berechnung von Schrägseilbrücken, Der Stahlbau, Heft 7, (1966)
- 11) Stafford Smith, B. : The single-plane cable-stayed girder bridge, Proc. Instn. civ. Engrs., Vol. 37, May, (1967)

(1968.7.12・受付)