有限要素マトリックスの定式過程に関する一考察

A STUDY ON FORMULATIONS OF FINITE ELEMENT MATRICES

吉 田 裕*

By Yutaka Yoshida

1. 序 論

平板曲げの問題は、それ自体が構造系の中で重要な位置を占めていると同時に、殻構造の解析への基礎となる問題であるために、構造力学における中心的研究課題の一つとして位置づけられている。

したがって、有限要素法が具体化された初期の段階から、この解法を平板曲げの解析に適用することが行なわれ、数多くの成果があげられてきた。しかし、平板曲げの問題においては、面外の変位を対象とするという意味での三次元の変位曲面を扱うために種々の困難が内在する。そのために、有限要素マトリックスの定式過程に関して各方向から研究がなされ、有限要素法の基礎理論的發展は平板曲げの問題を対象としてなされてきたといっても過言ではない。

その中で、Reissnerの変分原理に基づいて L.R. Herrmann によって誘導された有限要素マトリックス¹⁾²⁾は、変位と応力を混合した要素であるが、定式過程の卓拔さと、要素の自由度に比べて解析精度が高いことのために高く評価されている。

有限要素マトリックスの誘導過程の相違は、有限要素法を Ritz 法の一般形としてとらえ、変分原理を通して明確に説明することができるが、その際の重要な議論は、変位や応力の要素間における連続性の問題である。

上記 Herrmann の要素¹⁾の特徴は、変位分布の仮定に基づいた平板曲げの有限要素マトリックスの定式過程においてもっとも問題となってきた、要素周辺における要素間の法線方向のたわみの勾配の連続の要求を、これに対応する曲げモーメントの連続を保証することによって置き換えた点にあるということができる。

本報告の目的の第1は、変分原理に基づいた理論的差異にもかかわらず、上記 Herrmann の要素とまったく

同一の要素が一般の応力仮定や変位仮定からも誘導しうることを示すことにある。

このような事実から、一般の Rayleigh-Ritz 法の場合のように、仮定された変位や応力の分布型が構造全体において高次の領域まで連続で、また仮定された分布型それ自体において無限の自由度をとりうるように設定する場合、すなわち、仮定した変位または応力分布型に真の分布型を内包する場合と、有限要素解析において一般にとられているように、要素内で仮定された変位や応力分布型は有限の自由度に固定し、対象を構成する要素の数を増加することによって対象全体の自由度を高め、実際の系に近づけようとする場合との基本的な相違が明確にされる。すなわち、有限要素法の特長として明記しなければならないのは、有限要素法においては要素内の領域において仮定された変位または応力分布型では対応できない高次の分布型を必要とする作用荷重分布に対しては、対象全体としての系の自由度がいかに高められても、要素内の変位分布型または応力分布型自体が真の分布型となることができず、あくまでも、要素周辺における要素間の高次の不連続量によって表わされる等価な平衡関係が真の分布型を評価しうるように近づくことによって収束が保証されるということである。

一般の有限要素解析における、要素間の変位や応力の連続性に関する議論を上記の見地から再考し、いわゆる節点変位や節点力の物理的意義を明確にすることにより有限要素解析の新たな可能性を考えることができる。

まず、有限要素法による平板曲げの解析の現況を概括し、そこに内在する問題点を明確にし、Herrmann の要素の位置づけを行なってみたい。

その後、この Herrmann の平板曲げ要素¹⁾を著者なりに整理し直し、定式過程をより具体化し、内容を明確にすると同時に、この Herrmann の要素とまったく同一の要素が一般の応力仮定や変位仮定からも誘導しうることを示してみたいと思う。

* 正会員 工博 東京大学助教授 生産技術研究所

また, そのような事実に基づいて有限要素マトリックスの定式過程に関する二, 三の考察を行なってみたい。

2. 有限要素法による平板曲げの解析

有効な平板曲げの有限要素を開発しようとするとき問題となるのは, 要素の周辺において適合条件を満足するような要素の変形の型を設定することである。もし, 変位形を2次元の完全な形の多項式で表現することができれば, 座標変換にも矛盾を生ずることがなく, またその領域内のいかなる直線上の変位形も仮定した変位形と同じ次数の多項式で表現され, ある特定の変形型を強調するという矛盾が生じないという意味で, 変位形を完全な形の多項式で表わすことが望ましい。しかし, 完全な形の多項式の項数と実用上の要求から要素に設定される一般化変位の数, すなわち要素の自由度の数とが一致する場合はごくまれで, 変位形を多項式で近似しようとするれば, 多くの場合不完全な多項式を用いざるをえなくなる。

実用的視点からは三角形要素の3つの頂点に設けたそれぞれの節点において, たわみ(w)と直交する2方向のたわみの勾配($\partial w/\partial x, \partial w/\partial y$)を節点変位として設定した9自由度の要素が有効である。したがって, このような9自由度の三角形要素を種々の不完全な多項式で与えた変位関数をもとにして誘導することが行なわれた。その結果, 12の自由度を有する矩形要素³⁾が比較的良好な結果を与えるのに対して, このような三角形要素は, 設定された変位関数の内容によって著しい違いが生ずること, また要素の大きさを小さくしても, かならずしも正解に収束するとは限らないものも存在することがわかった⁴⁾。

その原因は, 仮定した変位形が要素の縁に沿っての適合条件を満足しないためであると説明される。したがって, 辺を共有する隣接する2つの要素間で境界辺の法線方向のたわみの勾配の連続性が保証されるような変位関数の与え方について種々の工夫がなされた。たとえば, 境界辺上で法線方向のたわみの勾配が直線的に変化するものと仮定すれば, その境界辺の両端で与えられる法線方向の勾配に関する2つの条件によって辺上のすべての点の法線方向の勾配が一義的に決定されるから, その境界辺を共有する2つの要素に関して, その辺の法線方向のたわみの勾配の連続性が確保される。しかし, このような場合には, 節点におけるねじれ($\partial^2 w/\partial x \partial y$)の値は一般に一義的に決めることができなくなる⁵⁾。

また, 法線方向の勾配の連続性を保証するという立場から, 辺上にも節点を設けた自由度の高い要素を用いることが考えられる。このような要素として, たとえば,

三角形要素の各頂点で3つ($w, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y$), 各辺の中央で3つ($w, \partial w/\partial n, \partial^2 w/\partial n \partial s$)ずつの変位成分を有する節点変位を設定した18自由度の要素が考えられている⁶⁾。しかし, この場合にも要素の隅の節点において, たわみの2次微係数の意味が不明確になるという特異性は残されることになる。

もう一つの方法として, たわみの2次微係数を含めた節点変位を設定することが考えられる。このような要素として, たとえば変位関数を完全な5次の多項式で与え, 三角形要素の各頂点に6つ($w, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y, \partial^2 w/\partial x^2, \partial^2 w/\partial x \partial y, \partial^2 w/\partial y^2$)の変位成分を持つ節点変位を設定し, 各辺の中央に辺の法線方向の勾配($\partial w/\partial n$)を成分とする節点変位を設定した21自由度の要素が誘導されている⁷⁾。この場合には, 節点において3つのたわみの2次微係数のすべてが連続することになるが, 境界をはさんで板厚が不連続なものを対象とするときには, 実際には曲げモーメントが連続でなければならないので, 理論的に3つの2次微係数のすべてが連続することはなく, したがって, このような自由度の高い要素にも問題点が残ることになる。

要素の変位関数は, 本来節点変位 u_i の補間関数 $\phi_i(x, y)$ の線形結合として

$$w(x, y) = \sum u_i \phi_i(x, y) \dots\dots\dots (1)$$

のように与えられるものである。したがって, 変位関数を多項式で与えた場合には, 多項式の係数ベクトル q を節点変位ベクトル u の関数として表現し, 式(1)の形の変位関数に変換する必要がある。その意味で, 個々の要素に固有な座標系による変位関数の表現が効果的になり, また, 境界辺上の法線方向のたわみの勾配の適合条件を満足する変位関数を求めるという意味でも, 面積座標などによる補間関数の研究が進められた⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾。

有限要素の撓性マトリックスに基づいた解析は, エネルギーの相補関係から必然的に考えられることであり, 早くからその一般理論が展開され¹¹⁾¹²⁾, 板の曲げの問題への適用もなされている¹³⁾¹⁴⁾¹⁵⁾。また, 板の曲げの問題と平面応力問題との間の力学的, 幾何学的な相似性に基づいた研究も行なわれている¹⁶⁾¹⁷⁾¹⁸⁾。

しかし, 応力系に基づいた解析においては, 幾何学的視点が明確に表われないために, 変位系に基づいた解析ほど広く一般的になっていない。

したがって, 応力仮定から出発する場合においても, 要素内で応力分布を仮定し, 要素周辺の変位を節点変位の関数として与えて, 要素の剛性マトリックスを誘導しようとする立場が効果的である。この方法は, 応力分布を代数方程式で仮定した平面応力問題に対して最初に与えられた¹⁹⁾。この方法の平板曲げの問題への適用は, 最初に矩形要素に対してなされ²⁰⁾, 次に矩形および直角三

角形要素に対して具体化された²¹⁾。また、この方法による任意の多角形要素の誘導も行なわれている²²⁾。

これに対して、要素内で変位分布を仮定し、要素の境界に沿って、平衡条件を満たす力を仮定して誘導することも行なわれている²³⁾。

このような状況の中で、Reissnerの変分原理に基づいて誘導された、変位と応力を混合した有限要素マトリックス¹⁾²⁾は、定式過程の卓抜さと、要素の自由度に比べて解析精度が高いことのために高く評価されている。

有限要素マトリックスの定式化の際に問題となるのは、個々の要素内の変位分布または応力分布が、その要素に属する節点において代表される有限個の節点変位または節点力によって支配される、要素内で連続な関数として仮定されるとき、要素周辺における要素間の変位または応力の連続性をいかにして保証するかということである。連続体の変位や応力分布は、作用荷重の任意性に対応して本来無限の自由度を有するものであり、これを有限の自由度の系として理想化する限りにおいては、変位と応力の両者の要素間の連続性を、作用荷重条件などにかかわらず常に、完全に満たすということは不可能である。

したがって、要素周辺における要素間の変位と応力の連続の要求のうち、いずれか一方を緩和することになり、変位分布または応力分布のとり方および要素周辺の連続性に対する要求の違いの組み合わせによって、種々の異なった有限要素マトリックスが誘導されることになる。

このような有限要素マトリックスの誘導過程の相違は、有限要素法を Ritz 法の一般形としてとらえることにより、変分原理を通して明確に説明されている^{12) 24) 25) 26) 27)}。

ここで、上記 Herrmann の平板曲げ要素¹⁾を著者なりに整理し直し、定式過程をより具体化し、内容を明確にする。

3. Herrmann の平板曲げ要素

平板曲げの問題に対して、Reissner のエネルギー関数 Π_R は次のように与えられる。すなわち、

$$\begin{aligned}\Pi_R = & \int_A [-M^{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} - B(M^{\alpha\beta}) - \bar{p}w] dA \\ & + \int_{S_1} (\bar{M}_n w_{,n} + \bar{M}_{ns} w_{,s} - \bar{Q}_n w) dS \\ & + \int_{S_2} [M_n(w_{,n} - \bar{w}_{,n}) + M_{ns}(w_{,s} - \bar{w}_{,s}) \\ & - Q_n(w - \bar{w})] dS \dots\dots\dots (2)\end{aligned}$$

ここに、

$$M^{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} = M_x w_{,xx} + M_y w_{,yy} + 2 M_{xy} w_{,xy} \dots (3)$$

であり、 $B(M^{\alpha\beta})$ は相補エネルギー密度で

$$\begin{aligned}B(M^{\alpha\beta}) = & \frac{6}{Eh^3} [M_x^2 + M_y^2 - 2\nu M_x M_y \\ & + 2(1+\nu) M_{xy}^2] \dots\dots\dots (4)\end{aligned}$$

である。また、 $w_{,n} = \partial w / \partial n$, $w_{,s} = \partial w / \partial s$, $\dots\dots$ であり、 S_1 は境界周辺 S のうち力学的境界条件が与えられている部分、 S_2 は幾何学的境界条件が与えられている部分である。また、 $\bar{M}_n$, $\bar{M}_{ns}$, $\bar{Q}_n$ は与えられた境界力であり、 $\bar{w}_{,n}$, $\bar{w}_{,s}$, $\bar{w}$ は与えられた幾何学的境界条件である。

式(2)に与えた関数を有限要素解析に適用するにあたって、変位 w と要素周辺の法線方向の勾配 $w_{,n}$ を各要素間において連続させることを考えるならば、式(2)の対象全体の面積にわたる積分は個々の要素の積分の総和と等しくなり、式(2)を直接有限要素解析に適用することが可能である。

しかし、要素間において、変位 w と曲げモーメント M_n を連続させることを考えるならば、法線方向の勾配 $w_{,n}$ の不連続を許すことになり、各要素の積分の総和としての関数 Π_R は次のように書くことができる。すなわち、

$$\begin{aligned}\Pi_R = & \sum_m \left\{ \int_{A_m} [-M^{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} - B(M^{\alpha\beta}) - \bar{p}w] dA \right. \\ & + \oint_{S_m} M_n w_{,n} dS + \int_{S_{1m}} [(\bar{M}_n - M_n) w_{,n} \\ & + \bar{M}_{ns} w_{,s} - \bar{Q}_n w] dS \\ & + \int_{S_{2m}} [-M_n \bar{w}_{,n} + M_{ns} (w_{,s} - \bar{w}_{,s}) \\ & \left. - Q_n (w - \bar{w})] dS \right\} \dots\dots\dots (5)\end{aligned}$$

ここに、 S_{1m} は要素 m の周辺のうち S_1 に含まれる部分、また、 S_{2m} は S_2 に含まれる部分であり、 S_m は要素 m の全周である。

式(5)における $M^{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta}$ の項は部分積分によって、次のように変換することができる。すなわち、

$$\begin{aligned}& \int_{A_m} M^{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} dA \\ & = \int_{A_m} (M_x w_{,xx} + M_y w_{,yy} + 2 M_{xy} w_{,xy}) dA \\ & = \oint_{S_m} (M_n w_{,n} + M_{ns} w_{,s}) dS \\ & \quad - \int_{A_m} M_{,\beta}^{\alpha\beta} w_{,\alpha} dA \dots\dots\dots (6)\end{aligned}$$

したがって、式(5)は次のように書き改められる。すなわち、

$$\begin{aligned}\Pi_R = & \sum_m \left\{ \int_{A_m} [M_{,\beta}^{\alpha\beta} w_{,\alpha} - B(M^{\alpha\beta}) - \bar{p}w] dA \right. \\ & \left. - \oint_{S_m} M_{ns} w_{,s} dS \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{s_{1m}} [(\bar{M}_n - M_n)w_{,n} - \bar{V}_n w] dS \\
 & - \int_{s_{1m}} [M_n \bar{w}_{,n} + V_n (w - \bar{w})] dS \} \\
 & \dots\dots\dots (7)
 \end{aligned}$$

ここに,

$$V_n = Q_n + M_{ns,s}$$

である。

いま、与えられた境界条件としての曲げモーメント $\bar{M}_n$ および変位 $\bar{w}$ を満足するように、応力分布および変位分布を仮定するものとすれば、式(7)は

$$\begin{aligned}
 \Pi_R = & \sum_m \left\{ \int_{A_m} [M_{,\beta}^{\alpha\beta} w_{,\alpha} - B(M^{\alpha\beta}) - \bar{p}w] dA \right. \\
 & - \oint_{s_m} M_{ns} w_{,s} dS - \int_{s_{1m}} \bar{V}_n w dS \\
 & \left. - \int_{s_{1m}} M_n \bar{w}_{,n} dS \right\} \dots\dots\dots (8)
 \end{aligned}$$

のようになる。

Herrmann は、要素間で変位 w と曲げモーメント M_n が連続するという条件を満たすもっとも簡単な変位および応力分布として、要素内で変位が x, y の線形関数であることおよび要素内でモーメント M_x, M_y, M_{xy} が一定であると仮定して、式(8)により有限要素マトリックスの定式化を行なった。変位が要素内で線形であれば変位分布を三角形要素の3つの頂点に設けた節点の変位 $w_i (i=1, 2, 3)$ の関数として表現することができ、要素間の変位の連続性が保証される。また、要素内で一定と仮定した M_x, M_y, M_{xy} を三角形要素の各辺上の曲げモーメント $M_{ni} (i=1, 2, 3)$ の関数として表現することにより、要素間の曲げモーメント M_n の連続性が保証される。

ここで、式(8)に基づいた有限要素マトリックスの定式化を行なう。いま、薄い板の曲げの弾性理論に基づけば、曲率とモーメントの関係は次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} = -\frac{12}{Eh^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

式(9)を

$$\epsilon = -N\sigma \dots\dots\dots (9)'$$

のように書く。また、要素の辺上における曲げモーメント $M_{ni} (i=1, 2, 3)$ は、要素内で一定と仮定したモーメント σ の関数として

$$\begin{Bmatrix} M_{n1} \\ M_{n2} \\ M_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^2 & s_1^2 & 2s_1c_1 \\ c_2^2 & s_2^2 & 2s_2c_2 \\ c_3^2 & s_3^2 & 2s_3c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

のように表わされる (Fig. 1)。ここに、

$$c_i = \cos \alpha_i, \quad s_i = \sin \alpha_i, \quad i=1, 2, 3$$

であり、 α_i は各辺の法線の x 軸よりの角度である (Fig.

Fig. 1 Moment and Shear Notation

Fig. 2 Angle Notation

2)。式(10)を

$$\sigma_n = E\sigma \dots\dots\dots (10)'$$

と書く。同様に、要素の辺上におけるねじりモーメント $M_{nxi} (i=1, 2, 3)$ は、 σ の関数として次のように与えられる。

$$\begin{Bmatrix} M_{ns1} \\ M_{ns2} \\ M_{ns3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1c_1 & s_1c_1 & c_1^2 - s_1^2 \\ -s_2c_2 & s_2c_2 & c_2^2 - s_2^2 \\ -s_3c_3 & s_3c_3 & c_3^2 - s_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots (11)$$

式(11)を

$$\sigma_{ns} = C\sigma \dots\dots\dots (11)'$$

と書く。

ここで、式(8)をマトリックス表示するために、式(8)の各項を考察する。要素内でモーメントを一定と仮定しているために、式(8)における $M_{,\beta}^{\alpha\beta} w_{,\alpha}$ の項は存在しない。また、

$$\begin{aligned}
 \int_{A_m} B(M^{\alpha\beta}) dA &= \frac{1}{2} \int_{A_m} \sigma^T N \sigma dA \\
 &= \frac{A_m}{2} \sigma_n^T (E^{-1})^T N E^{-1} \sigma_n \\
 &\dots\dots\dots (12)
 \end{aligned}$$

$$\int_{A_m} \bar{p} w dA = w^T \bar{p} \dots\dots\dots (13)$$

$$\bar{p}^T = \left\{ \frac{\bar{p} A_m}{3} \quad \frac{\bar{p} A_m}{3} \quad \frac{\bar{p} A_m}{3} \right\} \dots\dots\dots (13')$$

ここに、 $w^T = \{w_1 w_2 w_3\}$ で、 $w_i (i=1, 2, 3)$ は要素の3つの頂点に設けた節点の変位である (Fig. 3)。また、 A_m は三角形要素 m の面積である。次に、要素内

Fig. 3 Nodal Point System and Nodal Parameters

で線形分布と仮定した変位の，三角形要素の3つの辺における，辺に沿った方向の勾配 $w_{,si}$ は

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} w_{,s1} \\ w_{,s2} \\ w_{,s3} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & c_1 \\ 0 & -s_2 & c_2 \\ 0 & -s_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1/a_1 & 1/a_1 & 0 \\ 0 & -1/a_2 & 1/a_2 \\ 1/a_3 & 0 & -1/a_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad \dots(14) \end{aligned}$$

と与えられるから，

$$\oint_{s_m} w_{,s} M_{ns} dS = \sum_{ij=1}^3 \int_0^{a_{ij}} \frac{w_j - w_i}{a_{ij}} M_{nsij} dS = w^T F \sigma_{ns} = w^T F C E^{-1} \sigma_n \quad \dots(15)$$

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \dots(15')$$

となる。ここに， (x_i, y_i) $i=1, 2, 3$ は三角形要素の3つの頂点の座標， a_i は要素の辺 i の長さである。また

$$\begin{aligned} \int_{s_m} \bar{V}_n w dS &= \sum_{ij=1}^3 \int_0^{a_{ij}} \left\{ \left(1 - \frac{s}{a_{ij}} \right) w_i \right. \\ &\quad \left. + \frac{s}{a_{ij}} w_j \right\} \bar{V}_{nij} dS \\ &= w^T L \bar{V}_n \quad \dots(16) \end{aligned}$$

$$L = \begin{bmatrix} a_1/2 & 0 & a_3/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & 0 \\ 0 & a_2/2 & a_3/2 \end{bmatrix} \quad \dots(16')$$

ここに， $\bar{V}_n^T = \{\bar{V}_{n1} \bar{V}_{n2} \bar{V}_{n3}\}$ であり

$$\begin{aligned} \int_{s_m} \bar{w}_n M_{ns} dS &= \bar{w}_n^T M \sigma_n \quad \dots(17) \\ M &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \quad \dots(17') \end{aligned}$$

ここに， $\bar{w}_n^T = \{\bar{w}_{n1} \bar{w}_{n2} \bar{w}_{n3}\}$ である。

したがって，式(8)は要素 m に関して次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} -\Pi_{rm} &= \frac{A_m}{2} \sigma_n^T (E^{-1})^T N E^{-1} \sigma_n + w^T \bar{p} \\ &\quad + w^T F C E^{-1} \sigma_n + w^T L \bar{V}_n + \bar{w}_n^T M \sigma_n \quad \dots(18) \end{aligned}$$

式(18)の停留条件

$$\begin{aligned} -\delta \Pi_{rm} &= \delta \sigma_n^T [A_m (E^{-1})^T N E^{-1} \sigma_n \\ &\quad + (E^{-1})^T C^T F^T w + M \bar{w}_n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \delta w^T (F C E^{-1} \sigma_n + L \bar{V}_n + \bar{p}) \\ &= \{ \delta w^T \delta \sigma_n^T \} \\ &\quad \left(\begin{bmatrix} O & F C E^{-1} \\ (E^{-1})^T C^T F^T & A_m (E^{-1})^T N E^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \sigma_n \end{Bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{Bmatrix} L \bar{V}_n + \bar{p} \\ M \bar{w}_n \end{Bmatrix} \right) = 0 \quad \dots(19) \end{aligned}$$

より，次の形の有限要素マトリックス

$$\begin{bmatrix} O & H \\ H^T & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \sigma_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} L \bar{V}_n + \bar{p} \\ M \bar{w}_n \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots(20)$$

をうることができる。ここに，

$$H = F C E^{-1} \quad \dots(21)$$

$$G = A_m (E^{-1})^T N E^{-1} \quad \dots(22)$$

である。また， O は3行3列の零マトリックスである。

式(20)が Herrmann の与えた平板曲げの有限要素マトリックスであるが，これと同一の要素が一般の応力分布仮定や変位分布仮定からも誘導することができることを以下に示す。

4. 応力分布仮定からの誘導

ここで扱う方法は，要素内で応力分布形を仮定し，要素周辺で変位分布を仮定することによって，要素の剛性マトリックスを誘導しようとするものである。まず，この方法の定式過程を概括する。

要素内の応力 σ の分布を，次式のように与える。

$$\sigma = \phi \beta \quad \dots(23)$$

ここに， ϕ は座標の関数であり， β は未知係数のベクトルである。また，式(23)は応力 σ が平衡条件を満たすように決められる。要素内のひずみ ϵ は，弾性定数のマトリックス N によって，

$$\epsilon = N \sigma \quad \dots(24)$$

のように表わされる。要素の境界辺上の変位 u_B を，節点変位 u の関数として

$$u_B = L_s u \quad \dots(25)$$

と表わす。境界辺上の変位 u_B に対応する境界辺上の力 f_B は，要素内で仮定した応力分布によって表わすことができるから，応力分布の係数ベクトル β によって

$$f_B = R \beta \quad \dots(26)$$

と表わすことができる。

個々の要素の節点力とそれに対応する節点変位との関係を求めるという意味において，個々の要素に関する相補エネルギー関数を考える。すなわち，要素 m の相補エネルギー関数 Π_{cm} は

$$\Pi_{cm} = \frac{1}{2} \int_{A_m} \sigma^T N \sigma dA - f^T u \quad \dots(27)$$

である。ここに， f は節点変位 u に対応する節点力である。いま，式(27)における $f^T u$ は，仮想仕事の定義より

$$f^T u = \oint f_B^T u_B dS \dots\dots\dots (28)$$

であり、式 (28) に式 (25) および (26) を代入して

$$f^T u = \beta^T \oint R^T L_s dS \dots\dots\dots (29)$$

したがって、式 (27) に式 (23) および (29) を代入して

$$\Pi_{cm} = \frac{1}{2} \beta^T \int_{A_m} \phi^T N \phi dA \beta - \beta^T \oint R^T L_s dS \dots\dots\dots (30)$$

をうる。式 (30) の停留条件から

$$H_c \beta = T_c u \dots\dots\dots (31)$$

をうる。ここに、

$$H_c = \int_{A_m} \phi^T N \phi dA \dots\dots\dots (32)$$

$$T_c = \oint R^T L_s dS \dots\dots\dots (33)$$

である。式 (31) を式 (29) に代入して

$$f = T_c^T H_c^{-1} T_c u \dots\dots\dots (34)$$

をうる。したがって、要素の剛性マトリックス k は

$$k = T_c^T H_c^{-1} T_c \dots\dots\dots (35)$$

と与えられる。

ここで、三角形要素の各頂点と各辺の中央に節点を設け、各頂点に設けた節点においてはたわみ w を、また各辺の中央に設けた節点においては、その辺の法線方向のたわみの勾配 $w_{,n}$ を節点変位として設定し、三角形要素内でモーメント M_x, M_y, M_{xy} が一定であるという応力分布仮定に基づいて、平板曲げの有限要素マトリックスを定式化する。

三角形要素の各辺上における曲げモーメント σ_n およびねじりモーメント σ_{ns} は、式 (10) および式 (11) に示されたように、要素内のモーメント σ の関数として、

$$\sigma_n = E \sigma \dots\dots\dots (36)$$

$$\sigma_{ns} = C \sigma = C E^{-1} \sigma_n \dots\dots\dots (37)$$

と与えられる。いま、要素の各辺の中央に設けた節点における、曲げモーメント M_n に対応する変位 $w_{,n}$ の符号を、Herrmann の要素と対応して、 M_n の正の向きと逆向きに正として設定する (Fig. 4)。

Fig. 4 Sign Convention

また、要素辺上の変位 $w_{,n}$ は節点変位によって一義的に決まるように、辺上で一定であると仮定すれば、 σ_n が一定であるから、式 (28) の周辺積分のうち σ_n に相当する部分は

$$-\oint \sigma_n^T w_{,n} dS = -\sigma_n^T \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} w_n = -\sigma_n^T M w_n \dots\dots\dots (38)$$

となる。式 (38) より節点変位 w_n に対応する等価な節点力が $-M \sigma_n$ と与えられることがわかる。また、要素内でモーメントが一定であるから、辺上の換算せん断力は零となり、ねじりモーメントの不連続から生ずる、三角形要素の各頂点における集聚力 $P_i (i=1, 2, 3)$ が

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{ns1} \\ M_{ns2} \\ M_{ns3} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (39)$$

と表わされる。式 (39) は式 (15) と対応する関係式であり、

$$P = -F \sigma_{ns} = -F C E^{-1} \sigma_n \dots\dots\dots (40)$$

と書くことができる。ここに、

$$P^T = \{P_1 P_2 P_3\}$$

である。したがって、要素の頂点に設けた節点における節点変位を w_i として $w^T = \{w_1 w_2 w_3\}$ と表わせば、式 (27) における $f^T u$ の項は

$$f^T u = P^T w - \sigma_n^T M w_n \dots\dots\dots (41)$$

となるから、要素 m の相補エネルギー関数 Π_{cm} は

$$\Pi_{cm} = \frac{1}{2} \int_{A_m} \sigma^T N \sigma dA - P^T w + \sigma_n^T M w_n \dots\dots\dots (42)$$

と表わされる。

式 (42) に式 (36) および (40) を代入して

$$\Pi_{cm} = \frac{A_m}{2} \sigma_n^T (E^{-1})^T N E^{-1} \sigma_n + \sigma_n^T (E^{-1})^T C^T F^T w + \sigma_n^T M w_n \dots\dots\dots (43)$$

を得る。また、式 (43) は式 (21) および (22) より

$$\Pi_{cm} = \frac{1}{2} \sigma_n^T G \sigma_n + \sigma_n^T \{H^T M\} u \dots\dots\dots (44)$$

と書くことができる。ここに、

$$u = \begin{Bmatrix} w \\ w_n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (45)$$

である。

したがって、式 (44) の停留条件より

$$G \sigma_n = -\{H^T M\} u \dots\dots\dots (46)$$

をうる。一方、式 (40) を式 (41) に代入すれば

$$f^T u = -\sigma_n^T \{H^T M\} u \dots\dots\dots (47)$$

と得られるから、式 (47) に式 (46) を代入して

$$f = \begin{Bmatrix} H \\ M \end{Bmatrix} G^{-1} \{H^T M\} u = k u \dots\dots\dots (48)$$

となり、要素の剛性マトリックス k が

$$k = \begin{bmatrix} H G^{-1} H^T & H G^{-1} M \\ M G^{-1} H^T & M G^{-1} M \end{bmatrix} \dots\dots\dots (49)$$

と得られる。

ここで注意しなければならないのは、誘導に先立って設定された節点変位 $w_{,n}$ が個々の要素に固有の座標系に関する変位であって、要素間で共通の座標系に関する変位ではないことである。したがって、式 (49) に与えられた剛性マトリックスによって、構造全体系の剛性マ

トリックスを構成しようとする場合には、新たに節点変位 w_n の符号に関する考慮が必要である。

いま、要素間で要素の辺上の曲げモーメント M_n が連続するという条件で、構造全体系の解析を進めることが可能である。すなわち、剛性マトリックスの誘導過程において考察したように、節点力 f の物理的意義は

$$f = \begin{Bmatrix} P \\ -M\sigma_n \end{Bmatrix}$$

である。したがって、式 (48) に与えられた関係式を具体的に表わせば

$$\begin{Bmatrix} P \\ -M\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ w_n \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (50)$$

と書くことができる。いま、式 (50) より得られる方程式

$$P = k_{11}w + k_{12}w_n \quad \dots\dots\dots (51)$$

$$-M\sigma_n = k_{21}w + k_{22}w_n \quad \dots\dots\dots (52)$$

を解いて、次の形の関係式に変換する。すなわち、

$$\begin{Bmatrix} P \\ M\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} - k_{12}k_{22}^{-1}k_{21} & -k_{12}k_{22}^{-1}M \\ -Mk_{22}^{-1}k_{21} & -Mk_{22}^{-1}M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \sigma_n \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (53)$$

式 (53) の各部分マトリックスに式 (49) の剛性マトリックスの成分を代入すれば

$$\begin{Bmatrix} P \\ M\sigma_n \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} O & H \\ H^T & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \sigma_n \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (54)$$

が得られる。式 (54) に得られた有限要素マトリックスは、式 (20) に与えられた有限要素マトリックスとまったく同一のものであることは一目瞭然である。

5. 変位分布仮定からの誘導

ここでは、Fig. 5 に示すように、三角形要素の各辺の中央に設けた節点において、辺の法線方向の勾配 $w_{,ni}$ ($i=1, 2, 3$) を、要素の各頂点に設けた節点において、鉛直変位 w_i ($i=1, 2, 3$) を節点変位として設定した平板曲げの有限要素マトリックスを誘導する。

いま、要素の変位関数を 2 次の多項式で、次のように与える。すなわち、

$$w(x, y) = \langle 1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ xy \rangle \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (55)$$

したがって、要素の曲率 ϵ は、式 (55) を微分すること

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & y_3^2 & x_3y_3 \\ 0 & c_1 & s_1 & c_1(x_1+x_2) & s_1(y_1+y_2) & \frac{1}{2}\{c_1(y_1+y_2)+s_1(x_1+x_2)\} \\ 0 & c_2 & s_2 & c_2(x_2+x_3) & s_2(y_2+y_3) & \frac{1}{2}\{c_2(y_2+y_3)+s_2(x_2+x_3)\} \\ 0 & c_3 & s_3 & c_3(x_3+x_1) & s_3(y_3+y_1) & \frac{1}{2}\{c_3(y_3+y_1)+s_3(x_3+x_1)\} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (60)$$

Fig. 5 Triangular Plate Element

によって

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} q \quad \dots\dots\dots (56)$$

$$= 2\{O \ I\} q \quad \dots\dots\dots (56)$$

のように得られる。ここに、 O は 3 行 3 列の零マトリックスであり、 I は 3 行 3 列の単位マトリックスである。また、要素内のモーメント σ と曲率 ϵ の関係は、次のように与えられる。

$$\sigma = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \epsilon \quad \dots\dots\dots (57)$$

ここに、 D は板の曲げ剛性で $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ である。

式 (57) を

$$\sigma = -D \epsilon \quad \dots\dots\dots (57)'$$

のように書く。

ここで、式 (55) に与えた変位関数の係数ベクトル q を、節点変位 u の関数として求めるために、まず、 u を q の関数として次のように表わす。

$$u = Aq \quad \dots\dots\dots (58)$$

いま、

$$w_{,ni} = c_i w_{,x} + s_i w_{,y} \\ = \langle 0 \ c_i \ s_i \ 2c_i x \ 2s_i y \ c_i y + s_i x \rangle q \quad \dots\dots\dots (59)$$

であるから、式 (55) および (59) に各節点の座標を代入して、式 (58) のマトリックス A は次のように表わされる。

したがって, q が u の関数として

$$q = Bu \quad \dots\dots\dots (61)$$

のように得られる。ここに

$$B = A^{-1} \quad \dots\dots\dots (62)$$

である。

いま, 要素 m に関するポテンシャルエネルギー関数 Π_{pm} は

$$\Pi_{pm} = \frac{1}{2} \int_{A_m} \epsilon^T D \epsilon dA - u^T f \quad \dots\dots\dots (63)$$

と表わされ, 式 (63) に式 (56) および式 (61) を代入して

$$\Pi_{pm} = \frac{4}{2} u^T B^T \int_{A_m} \left\{ \begin{matrix} O \\ O \\ I \end{matrix} \right\} D \{O \ I\} dABu - u^T f \quad \dots\dots\dots (64)$$

をうる。式 (64) の停留条件より

$$f = 4 A_m B^T \begin{bmatrix} O & O \\ O & D \end{bmatrix} Bu \quad \dots\dots\dots (65)$$

と与えられる。いま, マトリックス B を 3 行 3 列の 4 つの部分マトリックスに分割して, 次のように表わす。すなわち,

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (66)$$

とおけば, 式 (65) より要素の剛性マトリックス k は

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = 4 A_m \begin{bmatrix} B_{21}^T D B_{21} & B_{21}^T D B_{22} \\ B_{22}^T D B_{21} & B_{22}^T D B_{22} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (67)$$

と得られる。ここで, 式 (67) に得られた剛性マトリックスが, 式 (20) に与えられた Herrmann のモデルと等価であることを示す。

ここで扱っている要素に関しては, 要素の変位形を 2 次式で仮定した時点において, その反面に, 要素周辺上の曲げモーメント M_n が一定であることおよび M_n に対応する, 要素周辺の法線方向の勾配 $w_{,n}$ が一次分布していることが了解される。また, 式 (20) における節点力 σ_n と符号を対応させれば, 式 (65) の節点力 f の内容は

$$f = \begin{Bmatrix} P \\ -M \sigma_n \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (68)$$

であることが明らかである (Fig. 4)。したがって, 式 (65) を具体的に表わせば

$$\begin{Bmatrix} P \\ -M \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \sigma_n \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (69)$$

である。式 (69) を分解して, 式 (20) と対応するように書き直せば

$$\begin{Bmatrix} P \\ M w_n \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -k_{11} + k_{12} k_{22}^{-1} k_{21} & k_{12} k_{22}^{-1} M \\ M k_{22}^{-1} k_{21} & M k_{22}^{-1} M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \sigma_n \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (70)$$

となる。いま, 式 (67) に与えられた各部分マトリックス k_{ij} を式 (70) に代入して整理すれば, 式 (70) は

$$\begin{Bmatrix} P \\ M w_n \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} O & B_{21}^T (B_{22}^{-1})^T M \\ M B_{22}^{-1} B_{21} & \frac{1}{4 A_m} M B_{22}^{-1} D^{-1} (B_{22}^{-1})^T M \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} w \\ \sigma_n \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (71)$$

となる。また, マトリックス B は, 式 (62) に示されるように, 式 (60) に与えられたマトリックス A の逆マトリックスであるから, マトリックス A を 3 行 3 列の 4 つの部分マトリックスに分割して

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (72)$$

とすれば

$$B_{21} = [A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} - A_{22}]^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} \quad \dots\dots\dots (73)$$

$$B_{22} = -[A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} - A_{22}]^{-1} \quad \dots\dots\dots (74)$$

である。

いま, 式 (71) のマトリックスの内容が, 式 (20) のマトリックスの内容と同一であることを示すことは, 式 (20) の部分マトリックス H および G が, それぞれ式 (21) および (22) に与えられるように

$$H = F C E^{-1} \quad \dots\dots\dots (75)$$

$$G = A_m (E^{-1})^T N E^{-1} \quad \dots\dots\dots (76)$$

であることから, 式 (71) の内容と対応して

$$F C E^{-1} = B_{21}^T (B_{22}^{-1})^T M \quad \dots\dots\dots (77)$$

および

$$A_m (E^{-1})^T N E^{-1} = \frac{1}{4 A_m} M B_{22}^{-1} D^{-1} (B_{22}^{-1})^T M \quad \dots\dots\dots (78)$$

を示すことになる。また, 上の 2 つの式が成立することを示すことは,

$$N = D^{-1} \quad \dots\dots\dots (79)$$

であることを考慮し, 式 (77) および (78) に式 (73) および (74) を代入して,

$$F C E^{-1} = -(A_{11}^{-1})^T A_{21}^T M \quad \dots\dots\dots (80)$$

および

$$2 A_m E^{-1} = [A_{22}^T - A_{12}^T (A_{11}^{-1})^T A_{21}^T] M \quad \dots\dots\dots (81)$$

を示すことと等価である。

いま, 式 (14) より

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (A_{11}^{-1})^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} M \quad \dots\dots\dots (82)$$

が成立つことがわかる。式 (82) を式 (80) に代入すれば明らかなように, 式 (80) が成立つことを示すことは

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{bmatrix} -s_1c_1 & s_1c_1 & c_1^2-s_1^2 \\ -s_2c_2 & s_2c_2 & c_2^2-s_2^2 \\ -s_3c_3 & s_3c_3 & c_3^2-s_3^2 \end{bmatrix} \\ & = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} c_1^2 & s_1^2 & 2s_1c_1 \\ c_2^2 & s_2^2 & 2s_2c_2 \\ c_3^2 & s_3^2 & 2s_3c_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (83) \end{aligned}$$

を示すことになり、式 (83) が成立つことは、具体的な計算によって、ただちに示すことができる。

いま、式 (80) が成立つことが示されたので、式 (80) を式 (81) に代入して、式 (81) は

$$A_{22}^T ME + A_{12}^T FC = 2 A_m I \dots\dots\dots (84)$$

と変換することができる。式 (84) が成立つことは、具体的に計算を進めることによって示すことができる。

したがって、式 (71) のマトリックスの内容は、式 (20) のマトリックスの内容とまったく同じものであることがわかる。

6. 有限要素マトリックスの定式過程に関する二、三の考察

以上に、3つの異なった基本仮定から同一の有限要素が誘導されるという事実を示したのであるが、ここではこのような事実に基づいて有限要素マトリックスの定式過程における二、三の問題点について考察してみたい。

節点変位 u とこれに対応する与えられた量としての節点力 f に関して、要素 m のポテンシャルエネルギー関数 Π_{pm} は

$$\Pi_{pm} = \frac{1}{2} u^T k u - u^T f \dots\dots\dots (85)$$

と与えられる。ここに k は要素の剛性マトリックスである。

また、要素の変位形 $w(x, y)$ は節点変位 u_i の補間関数、すなわち節点変位ベクトル u の成分のうち、 u_i に対応するその関数またはその関数の微分形が、 u_i の評価される節点において単位 の値をとり、 u_i 以外の成分に対応するその関数またはその関数の微分形の値は、それぞれの成分が評価される節点においてすべて零となるような、要素内でその値およびその微分の値が連続な関数 $\phi_i(x, y)$ の線形結合として

$$w(x, y) = \sum u_i \phi_i(x, y) \dots\dots\dots (86)$$

と表わされる。

もし、要素の変位形が要素間で連続するように与えられるならば、構造全体系としての仮想仕事の定義より、式 (85) のポテンシャルエネルギー $u^T f$ は

$$u^T f = \sum u_i f_i = \int_{A_m} p w dA \dots\dots\dots (87)$$

である。ここに、 p は実際に作用する外力である。したがって、式 (87) に式 (86) を代入して、節点力 f_i は

$$f_i = \int_{A_m} p \phi_i dA \dots\dots\dots (88)$$

と得られ、節点変位の補間関数 ϕ_i が作用荷重 p の重み関数として表われることがわかる。

いま、5. で扱った要素においては、要素の各頂点で鉛直変位 w_i 、各辺の中点で辺の法線方向の勾配 $w_{,ni}$ を考えているにすぎない。したがって、2次の多項式で与えた変位形に対して、要素間の変位の連続性は保証されない。しかも、節点変位 $w_{,ni}$ は個々の要素に個有の座標系に関する変位であって、要素間での共通の座標系に基づくものではない。

それゆえに、式 (63) の停留条件から式 (67) に求められた剛性マトリックスは、個々の要素の節点変位とそれに対応する節点力との関係を与えるにすぎない。したがって、式 (63) は個々の要素に関して閉じた形でのポテンシャルエネルギー関数であって、 $u^T f$ の項は要素内で閉じた形での仮想仕事の定義より

$$u^T f = \sum u_i f_i = \int_{A_m} p w dA + \oint u_B^T f_B dS \dots\dots (89)$$

である。ここに、 f_B は要素に作用する要素周辺の力で、構造全体系においては内力となるものであり、 u_B は要素周辺の f_B に対応する変位である。

いま、要素周辺の変位 u_B は、式 (86) に与えられた変位関数または変位関数の u_B の成分に対応する微分形の、要素周辺における値として、要素周辺に沿った座標系 s の関数として表わすことができる。変位関数が節点変位 u の関数として与えられるから、要素周辺の変位 u_B も、やはり節点変位 u の関数として与えられ、これを

$$u_{Bj} = \sum_i u_i \phi_{ij}(s) \dots\dots\dots (90)$$

と書けば、式 (89) は

$$\begin{aligned} u^T f &= \sum u_i f_i \\ &= \sum u_i \int_{A_m} p \phi_i dA + \sum_j \sum_i u_i \oint \phi_{ij} f_{Bj} dS \dots\dots\dots (91) \end{aligned}$$

となり、節点力 f_i の意義は

$$f_i = \int_{A_m} p \phi_i dA + \sum_j \oint \phi_{ij} f_{Bj} dS \dots\dots\dots (92)$$

として示される。

一般にとられているように、変位分布仮定に基づいて仮想仕事の原理から剛性マトリックスを誘導する場合には、要素内に仮定した変位形が要素間で連続な変位を与えるか否かによらず、その節点力の物理的意義は式 (92)

の形で示されるものであることは、その定式過程を考えれば明らかである。

いま、得られた剛性マトリックスを重ね合わせることで、構造全体系としての剛性マトリックスを構成することを考えるならば、これは式(92)の境界辺上の力の項、すなわち構造全体系としての要素辺上の内力の項、

$$\oint \phi_{iBj} f_{Bj} dS$$

が隣接する要素間で相殺されるという意味での要素間の平衡条件が満たされることによって可能になる。

同様のことが式(54)に得られた要素マトリックスから構造全体系のマトリックスを構成する際にもいうことができる。すなわち、節点変位 w が連続であり、要素辺上の節点で代表される曲げモーメント σ_n が要素間で連続するという条件で、式(54)に得られた有限要素マトリックスを単純に重ね合わせることで、構造全体系を支配するマトリックスを構成することができる。その際、重ね合わせた結果として、式(54)の左辺の Mw_n の項の和が構造全体系のマトリックスの左辺に残ることになる。しかし、この Mw_n の項は平均値の意味における要素辺上の辺の法線方向のたわみの勾配を代表する値であり、要素間でのたわみの勾配の連続性と w_n の符号の規約を考えれば明らかなように、構造の内部においては、その辺を共有する要素間で相殺される。したがって、最終的には構造全体系の実際の境界における Mw_n の値だけが残ることになり、これは境界条件として考慮されるところとなる。

このように、辺上における平均値の意味での平衡条件または適合条件が満たされ、節点での変位または力の連続性が満たされるかぎりにおいては、解が正しい解に収束するか否かは、要素内に仮定した変位形または応力分布形が要素間で連続であるかどうかの問題であるよりはむしろ、要素内に仮定した変位形または応力分布形が、比較すべき理論上の支配方程式で与えられる変位形または応力分布形を矛盾なく表現することができるかどうかによるものであるということが出来る。

すなわち、与えられた量としての境界辺上の力 f_{Bj} は、仮想仕事の方程式から対象の平衡方程式および境界条件式が誘導される過程を考えれば明らかなように、要素の変位形が仮定された時点において、仮定された変位形の関数として、したがって節点変位の関数として定義される量である。さきの例題に関して具体的にいえば、要素の変位形を2次式と仮定した時点において、せん断力が零、曲げおよびねじりモーメントが一定であり、したがって要素周辺上で曲げモーメント M_n が一定であることが反面において了解され、さらに変位形が2次式分

布であるから、 M_n に対応する要素周辺上の法線方向の勾配は辺上で一次分布である。したがって、式(63)に基づいて式(67)に誘導された剛性マトリックスが、応力分布仮定に基づいて式(49)に与えられた剛性マトリックスとまったく同等のものになることは必然である。

いま、要素の変位形を3次の多項式で仮定した場合を考えてみよう。この場合には、反面において曲げおよびねじりモーメントが線形分布であることを仮定したことになる。すなわち、変位形の関数として与えられ、要素辺上において一次分布するこれらの力量は、その辺をはさむ両端の節点におけるこれらの力量の値によって一義的に決まる。したがって、3次の多項式で仮定した変位形から得られる平板曲げ要素において、要素間で曲げおよびねじりモーメントの連続性を保証するように定式化することが可能であり、この場合にはこれらの力量の微分の不連続量によって表現される平衡関係に基づいて構造全体系の解析が進められることになる。

このように、要素周辺上の力 f_{Bj} は個々の要素内に仮定した変位関数に対応して、節点変位の関数として定義されることを考えれば、たとえ要素間で変位の連続性が保証されても、要素周辺のポテンシャルエネルギー

$$\oint \phi_{iBj} f_{Bj} dS$$

が要素間で不連続になることは免れられない。すなわち、有限要素法の特長として明記しなければならないのは、要素内の変位形を有限の自由度のものと仮定するかぎりにおいては、仮定した変位形では対応できない高次の変位形を必要とする作用荷重条件に対しては、要素分割を細かくして対象全体の自由度がいかに高められても、要素内の変位形自体が真の分布型となることができず、あくまでも要素周辺における要素間の高次の変位の不連続量によって表わされる等価な平衡関係が真の分布型を評価しうるように近づくことによって収束が保証されるということである。

7. 結 論

以上に、Reissner の変分原理に基づいて、Herrmann によって誘導された平板曲げの有限要素マトリックスとまったく同一の要素が、一般の応力分布仮定や変位分布仮定からも誘導することができるという事実を示し、有限要素マトリックスの定式過程に関する考察を行なった。それぞれの誘導過程の対応において問題となるのは、要素内の変位分布や応力分布の仮定とそれに対応する要素周辺のエネルギーを代表する節点力または節点変位の意義であって、その内容によって、要素マトリックスの内容も当然変わってくる。

ここで扱ったように、変位分布を2次の多項式で仮定した場合には、反面に要素内のモーメント分布が一定であることが了解され、したがって仮定した系における要素周辺の力の分布およびそれに対応する変位の分布に対して節点力の意義が明確にまた単純な形に表現され、それぞれの要素マトリックスの内容を相対的にまた具体的に検討することが可能となった。

異なった基本仮定から同一の結果が得られるという事実そのものはむしろ当然の結果であって、ここで問題としたいのは、定式過程におけるこのような事実に基づいた種々の考察であり、有限要素マトリックスの特性を明確にとらえることにより、有限要素解析の新たな可能性を考えることができるということである。

参 考 文 献

- Herrmann, L.R. : Finite Element Bending Analysis for Plates; J. of Engg. Mech., Div. ASCE, **93**, EM 5, pp. 13-26 (1967).
- Herrmann, L.R. : A Bending Analysis for Plates; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, pp. 577-604 (1965).
- Melosh, R.J. : Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method; AIAA Jnl., **1**, 7, pp. 1631-1637 (1963).
- Clough, R.W. and J.L. Tocher : Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, pp. 515-546 (1965).
- Irons, B.M. and K.J. Draper : Inadequacy of Nodal Connections in a Stiffness Solution for Plate Bending; AIAA Jnl. **3**, 5, p. 961 (1965).
- Irons, B.M. : A Conforming Quatric Triangular Element for Plate Bending; Int. J. for Numerical Meth. in Eng., **1**, 1, pp. 29-45 (1969).
- Bell, K. : A Refined Triangular Plate Bending Finite Element; Int. J. for Numerical Meth. in Eng., **1**, 1, pp. 101-122 (1969).
- Bazeley, G.P., Y.K. Cheung, B.M. Irons and O.C. Zienkiewicz : Triangular Elements in Plate Bending-Conforming and Non-conforming Solutions; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics AFFDL-TR-66-80, pp. 547-576 (1965).
- Bogner, F.K., R.L. Fox and L.A. Schmit, Jr. : The Generation of Inter-element Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulae; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, pp. 397-444 (1965).
- Zienkiewicz, O.C., B.M. Irons, J. Ergatoudis, S. Ahmad and F.C. Scott : Iso-Prismatic and Associated Element Families for Two- and Three- Dimensional Analysis; in Finite Element Methods in Stress Analysis, (Ed. I. Holand and K. Bell), Chap. 13, TAPIR Trondheim 1969.
- Argyris, J.H. and S. Kelsey : Energy Theorems and Structural Analysis; Butterworths Scientific Publications 1960.
- Fraeijs de Veubeke, B. : Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method; in Stress Analysis, (Ed. O.C. Zienkiewicz and G.S. Holister), Chap. 9, Wiley, London, 1965.
- Fraeijs de Veubeke, B. and G. Sander : An Equilibrium Model for Plate Bending; Int. Jnl. Solids & Structs (G.B.), **4**, pp. 447-468 (1968).
- Sander, G. and B. Fraeijs de Veubeke : Upper and Lower Bounds to Structural Deformations by Dual Analysis in Finite Elements; AFFDL-TR-66-199 (1967).
- Anderheggen, E. : Finite Element Plate Bending Equilibrium Analysis; J. of Engg. Mech. Div. ASCE, **95**, EM 4, pp. 841-857 (1969).
- Morley, L.S.D. : The Triangular Equilibrium Element in the Solution of Plate Bending Problems; Aeronaut. Q., **19**, pp. 149-169 (1968).
- Fraeijs de Veubeke, B. : Bending and Stretching of Plates-Special Models for Upper and Lower Bounds; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, pp. 863-886 (1965).
- Fraeijs de Veubeke, B. and O.C. Zienkiewicz : Strain-Energy Bounds in Finite-Element Analysis by Slab Analogy; Jnl. Strain Analysis, **2**, 4, pp. 265-271 (1967).
- Pian, T.H.H. : Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions; AIAA Jnl., **2**, pp. 1333-1336 (1964).
- Pian, T.H.H. : Element Stiffness Matrices for Boundary Compatibility and for Prescribed Boundary Stresses; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, pp. 457-477 (1965).
- Severn, R.T. and P.R. Taylor : The Finite Element Method for Flexure of Slabs when Stress Distributions are Assumed; Proc. Instn Civ. Engrs. **34**, pp. 153-170 (1966).
- Allwood, R.J. and G.M.M. Cornes : A Polygonal Finite Element for Plate Bending Problems Using the Assumed Stress Approach; Int. J. for Numerical Meth. in Eng., **1**, pp. 135-149 (1969).
- Yamamoto, Y. : A Formulation of Matrix Displacement Method; Dept. of Aeronautics and Astronautics, M.I.T. 1966.
- Pian, T.H.H. and P. Tong : Basis of Finite Element Methods for Solid Continua; Int. J. for Numerical Meth. in Eng., **1**, 1, pp. 3-28 (1969).
- Pian, T.H.H. : Formulations of Finite Element Methods for Solid Continua; Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design (the Proc. of U.S.-Japan Seminar, Tokyo, 1969), University of Alabama Press 1970.
- Jones, R.E. : A Generalization of the Direct-Stiffness Method of Structural Analysis; AIAA Journal, **2**, 5, pp. 821-826 (1964).
- Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity; Pergamon Press, Oxford, 1968.
- Gallagher, R.H. : Analysis of Plate and Shell Structures; Proc. of the Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, School of Engineering Vanderbilt University, ASCE, pp. 155-205 (1969).
- 吉田 裕 : 有限要素法による平板曲げの解析, 生産研究, **22**, 1, pp. 28~33 (1970).

(1971.1.18・受付)