垂直板による波の反射率・透過率およびエネルギー損失

REFLECTION AND, TRANSMISSION COEFFICIENT, AND
ENERGY LOSS OF SURFACE WAVE BY A VERTICAL BARRIER日野 幹雄*・山崎 丈夫**
By Mikio Hino and Takeo Yamazaki

1. ま え が き

不連続な境界による進行波の変形の問題に関しては、古くは Lamb が扱っている。また、Bartholomeusz は Havelock の wave-maker 理論を使い同様の結果を得ているが、それらは長波に限られている。Dean, Ursell は無限水深中に置かれた垂直板の効果を厳密に解いており、Newman, Takano は wave-maker 理論から得られる積分方程式の数値解を求めている。ほかの解法としては、変分法を使って Miles が底面のステップを、Mei & Black は矩形障害物のある場合の解を求め、Evans, John は Riemann-Hilbert 問題として解いている。また、Wiegel らはエネルギー分布より反射率・透過率を求めた。

本研究では、厳密解を求めるのが困難である有限水深中の垂直板の波におよぼす影響に関して、wave-maker 理論より得られる積分方程式を直接数値的に解き、反射率、透過率を求めた。しかし、実際の場合は板の近くでなんらかの形でエネルギー損失が生じ、そのためポテンシャル理論から求めた透過率は実験値より大きい値を示す。その大きさを見積る手段として、エネルギー損失と抗力の関係から説明を行なった。

2. 速度ポテンシャルによる計算

完全流体の微小振幅波に対して、図-1 のように、一定水深 h の中に高さ $h-H$ の板が置かれた場合の進行波の変形を二次元問題として考える。簡単のため、速度ポテンシャル $\phi(x, y, t) = \phi(x, y) \cdot e^{i\omega t}$ として、時間の要素をぬいた ϕ について考えると、 ϕ はラプラスの方程式 (1) を満足する。

図-1

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

境界条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} y = -h & \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ x = 0, \quad -h \leq y \leq -H & \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ y = 0 & \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} - \sigma \phi = 0 \quad \sigma = \frac{\omega^2}{g} \end{aligned}$$

いま、 $x \geq 0, x \leq 0$ の ϕ をそれぞれ ϕ_+, ϕ_- とする。以上の条件を満たす (1) の解は次のように書くことができる。

$$\phi_+ = \phi_I e^{-ikx} f_1(y) + \sum_{n=2}^{\infty} B_n e^{-q_n x} f_n(y) \quad \dots\dots (2)$$

$$\phi_- = \phi_I (e^{-ikx} + r e^{ikx}) f_1(y) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n e^{q_n x} f_n(y) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$f_1(y) = \sqrt{2} (h + \sigma^{-1} \sinh^2 kh)^{-1/2} \cosh k(y+h)$$

$$f_n(y) = \sqrt{2} (h - \sigma^{-1} \sin^2 q_n h)^{-1/2} \cos q_n(y+h)$$

$$kh \tanh kh = \sigma h$$

$$q_n h \tan q_n h = -\sigma h$$

ただし、 $\phi_I, \phi_T, b_n, B_n, r$ は複素定数であり、 $f_1(y), f_n(y)$ は、 $-h \leq y \leq 0$ で正規化直交関数系をなしている。

式 (2), (3) は、それぞれ $x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$ で第2項が消え、進行波である透過波、入射波、反射波だけが残る。

いま、反射率を $|R| = |r|$ 、透過率を $|T| = |\phi_T / \phi_I|$ で定義する。

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科
** 学生会員 東京工業大学大学院修士課程

$x=0$ での水平方向の流速を $U(y)$ とし、速度の連続条件

$$U(y) = \frac{\partial \phi_+}{\partial x_{x=0}} = \frac{\partial \phi_-}{\partial x_{x=0}}$$

に式 (2), (3) を代入すると,

$$U(y) = -ik \phi_I(1-r)f_1(y) + \sum_{n=2}^{\infty} q_n b_n f_n(y) \quad \dots\dots\dots (4a)$$

$$= -ik \phi_T f_1(y) - \sum_{n=2}^{\infty} q_n B_n f_n(y) \quad \dots\dots\dots (4b)$$

$f_1(y), f_n(y)$ が正規化直交系であるので、式 (4a), (4b) に $f_1(y)$ あるいは $f_n(y)$ を掛け $(-h, 0)$ の区間で積分すれば、境界条件より $-h \leq y \leq -H$ で $U(y) = 0$ であることを考慮して、それぞれの複素定数は次のように書ける。

$$-ik \phi_I(1-r) = -ik \phi_T = \int_{-H}^0 U(\eta) f_1(\eta) d\eta \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$q_n b_n = -q_n B_n = \int_{-H}^0 U(\eta) f_n(\eta) d\eta \quad \dots\dots\dots (6)$$

また、速度ポテンシャルの連続条件

$$\phi_{+x=0} = \phi_{-x=0}$$

に式 (2), (3) を代入すると,

$$\phi_I(1+r)f_1(y) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n f_n(y) = \phi_T f_1(y) + \sum_{n=2}^{\infty} B_n f_n(y) \quad \dots\dots\dots (7)$$

となり、式 (5), (6) を式 (7) に代入して整理すると、次の式が得られる。

$$\phi_I f_1(y) = \int_{-H}^0 U(\eta) G(\eta, y) d\eta \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、

$$G(\eta, y) = \frac{i}{k} f_1(y) f_1(\eta) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{q_n} f_n(y) f_n(\eta)$$

式 (8) は、第1種 Fredholm の積分方程式で、1. で述べたように種々の方法で求めているが、それらは大変複雑であり、また厳密解がただ一つ存在するとは限らないので、右辺を Gauss-Moors の方法 (たとえば日高考次 (1941)) で数値積分し、連立方程式に直して解いたが、その方法で求まった $U(y)$ の一例を図-2 に示す。ただし、横軸は、 $\phi_I \cdot \sqrt{2} (h + \sigma^{-1} \sinh^2 kh)^{-1/2} = 1$ と置いたときの $U(y)$ の実数部分で、その大きさの物理的意味はあまりない。

$U(y)$ が求まると式 (5) より反射率と透過率がわかるので、 σh に対する $|R|, |T|$ を図-3 に示す。破線は、Mei & Black が、水底に長さ l の矩形障害物があり、 $l \rightarrow 0$ とした場合の、変分法を用いて計算した値である。

実験との比較は 図-4.1~図-4.3 に示した。

図-2

図-3 反射率と透過率

3. エネルギー逸散と抵抗係数

入射波に対するエネルギーの逸散率 P は、

$$P = 1 - |T|^2 - |R|^2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。

ポテンシャル理論では $P=0$ であるが、板の上端が特異点となり、 $U(y)$ が無限大になるので、実際の場合ははく離が生じ、当然のことながら $P>0$ である。このことは、図-4 で数値解にくらべ $|R|$ の実験値はほぼ一致するが、 $|T|$ の実験値は下まわるということからも明らかであろう。

図-4.1

図-4.2

この大きさの見積りとして、次のように考えた。

1周期当たりのエネルギー逸散量を ϵ とすると、 ϵ は次のように考えてよいであろう。

$$\epsilon = \int_0^T F(t) u(t) dt \quad (10)$$

ここで、 $u(t)$ は流速、 $F(t)$ は板に働く力であるが、

図-4.3

それぞれ次のように仮定する。

$$u(t) = u_0 \sin \omega t$$

$$F(t) = \frac{1}{2} C_D \rho A u(t) |u(t)| + \rho C_M V \frac{\partial u(t)}{\partial t} \quad (11)$$

ここに、 C_D : 抗力係数

C_M : 質量係数

A : 基準面積

V : 基準体積

ρ : 水の密度

そうすると式 (10) は次のようになる。

$$\epsilon = \frac{2 T C_D \rho A u_0^3}{3 \pi} \quad (12)$$

いま、 $A (= h - H)$ を板の高さ、 u_0 を板が無いと仮定したときの、入射波による板上端の位置での流速の最大値

$$\frac{\pi H_I}{T} \frac{\cosh k(h-H)}{\sinh kh}$$

とすると、式 (12) は次のようになる。

$$\epsilon = \frac{2 \pi^2 H_I^3 (h-H) \rho C_D \cosh^3 k(h-H)}{3 T^2 \sinh^3 kh} \quad (13)$$

あるいは、無次元化して

$$\frac{\epsilon}{E} = C_D \frac{\cosh^3 k(h-H)}{\sinh^3 kh} \quad (14)$$

と表わされる。ここに、 H_I は入射波の波高

$$E = \frac{2 \pi^2 H_I^3 (h-H) \rho}{3 T^2}$$

図-5.1

図-5.2

また実験より、 ϵ は式 (9) の P に入射波のエネルギーと周期をかけると求め、 E で割ると式 (14) に相当する、 C_D をパラメーターとしたエネルギー逸散の無次元表示が得られる (図-5.1~図-5.3)。

実験は長さ 20 m, 幅 0.4 m 両端に消波装置がある造波水路で行なわれた。波高計は抵抗線式波高計を用い、入射波、反射波および透過波は Healy の方法で解析し

図-5.3

た。水深は 30.0~41.7 cm, 波の周期は 2.05~0.76 秒, 入射波高 0.7~7.2 cm, 波形勾配 $1.7 \times 10^{-3} \sim 8.86 \times 10^{-2}$ の範囲で行ない、垂直板の高さは 15, 20, 25, 30 cm, 厚さ 6 mm の鉄製の板を使用した。

式 (11) は、杭などに働く波力を定める式で、 C_D には定常流中の値 $C_D = 2.01$, C_M には理論値 $C_M = 2.0$ を一般には使うが、この場合も H/h を与えたときのそれぞれの平均値は $C_D = 1.48 \sim 1.98$ となり、オーダーとしてはほぼ同じ値になる。

4. 考察および結び

2. で示した速度ポテンシャルの取扱い方は、計算方法は異なるが、いまでもいろいろなされてきた。しかし、それらは数学的な取扱いに重きが置かれ、実際の現象との比較はあまりなされていないので、ここで 3. のような考え方を示した次第である。

反射率と透過率の実験値を理論値と比較してみると、反射率はほぼ一致するが、透過率は小さい。このことは、実際には次のような現象が起きているためではないだろうか。沖から来たエネルギーの一部は反射し、残りは通過と逸散に別れる。逸散エネルギーは、板の付近ではなく離、渦の形成等によって生じ、その一部は粘性によって消滅し、残りは質量輸送の形でいずれかの側 (ほかの条件により異なるが大体は岸側) に流れ出る。しかし、岸側に蓄積されたエネルギーは、ある大きさに達するとエネルギー勾配のため沖側に流れ出るだろう。実際水素発生装置を使い板付近の流れを観察してみると、周期や波高で形は異なるが、写真-1 に示すように、そこ

(a) $t=0$ sec

(b) $t=0.25$ sec

(c) $t=0.62$ sec

(d) $t=0.83$ sec

(e) $t=0.92$ sec

(f) $t=1.33$ sec

(g) $t=1.67$ sec

(h) $t=1.83$ sec

$T=2.05$ sec, $H_I=0.65$ cm, $h=30$ cm, $H=10$ cm

で形成される渦は沖側と岸側では必ずしも対称でない。このような非定常流中の渦の発生をモデル化できると、さらに詳しくエネルギー損失を計算できるであろうが、ここではもっと巨視的に、抵抗係数を使って計算してみた。

最後に、今回の実験は東京工業大学学生 鶴飼恵三君の協力によって実施されたものであり、ここに謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Bartholomeusz, F.F. (1958) : The reflexion of long waves at a step, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 54, 106.
- 2) Dean, W.R. (1945) : On the reflexion of surface waves by a submerged plane barrier, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 41, 231.
- 3) Evans, D.V. (1970) : Diffraction of water waves by a submerged vertical plate, *J. Fluid Mech.* Vol. 40, 433.
- 4) Havelock, T.H. (1929) : Forced Surface-Waves on Water, *Phil. Mag.* 8, 569.
- 5) 日高孝次 (1941) : 積分方程式論, 河出書房
- 6) John, F. (1948) : Waves in the presence of an inclined barrier, *Comm. Pure Appl. Math.* 1, 149.
- 7) Lamb, H. (1932) : *Hydrodynamics* (6th ed.), § 176. Cambridge Univ. Press.
- 8) Mei, C.C. & Black, J.L. (1969) : Scattering of surface wave by rectangular obstacles in waters of finite depth, *J. Fluid Mech.* 38, 3
- 9) Miles, J.W. (1967) : Surface-wave scattering matrix for a shelf, *J. Fluid Mech.* 28, 4.
- 10) Newman, J.N. (1965) : Propagation of water waves over an infinite step, *J. Fluid Mech.* 23, 2
- 11) Takano, K. (1966) : Effet d'un obstacle de parallélépipède rectangle sur la propagation de la houle, *J. Oceanogr. Soc. Japan*, 22, 5.
- 12) Ursell, F. (1947) : The effect of a fixed vertical barrier on surface waves in deep water, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 43, 374.
- 13) Wiegel, R.L. (1960) : Transmission of waves past a rigid vertical thin barrier, *J.W.H. Div., Proc. ASCE*, 86, wwl. 2413. March.

(1970.12.2・受付)