骨組構造に関する有限要素法の計算法的側面

COMPUTATIONAL ASPECTS OF FINITE ELEMENT METHOD
FOR A FRAME STRUCTURE

上 原 七 司*

By Shichishi Uehara

1. は し が き

有限要素法は一般には変分法に基礎づけられている。一般に連続体が有限の要素に分割され、それぞれの要素のなかで displacement field または stress field, あるいはその両者が仮定されて、変分法が適用される。その結果は節点における一般変位あるいは一般応力に関する連立方程式となり、これを解いて近似解がえられる。実際の適用においては, compatible model, equilibrium model, hybrid method, mixed method などが提出され応用されている¹⁾。

これらの方法は特に連続体に関連して研究されている。連続体では微分方程式を直接的に扱うことは、一般にはほとんど不可能であろう。

この論文では、変断面の部材からなる骨組構造の問題（静力学的問題、振動の問題、座屈の問題など）を解くことを念頭において、変分法の原理を直接的には適用せず、微分方程式を扱って有限要素法の手法を取り入れることを試みる。それで最初に述べた一般的な立場を仮に（Ⅰ）の立場と呼び、ここで試みる立場を（Ⅱ）の立場ということにする。

この試みの目的は次の点にある。

(i) 部材の物理定数と変形関数とのあいだの関係を知ること。

(ii) 変位、応力、固有振動数などの計算結果の近似性を評価する簡単な関係式が欲しいこと。

(iii) 静力学でいわれていた変形法は方法上の誤差（ここでは discretization error）を含まない形式になっているが、この方式との関係を見ること、このことは(ii)に役立つ。

(Ⅱ) の立場では微分方程式のままで近似解を扱う次の定理が²⁾土台とされる。これを仮に（Ⅱ）の定理とい

う。

「微分方程式：

$$\frac{dy}{dx} - A(x)y = g(y, \epsilon)$$

の解は、十分小さい ϵ に対して、 $\epsilon=0$ の解に近似している³⁾。どの程度小さければよいかは、方程式の型に依存する。本論では曲げ変形の問題を扱う。

2. 曲 げ 変 形

長さ l のエレメントをとり、曲げ剛性 EI と単位長あたり重量 $w(m=w/g)$ は連続的に分布しているものとする。長さの方向に x 軸、たわみの方向に v 軸をとり、 x 軸から v 軸への回転を θ とする。 $x=0$ を 1 端、 $x=l$ を 2 端と呼び、この点の値はサフィックスをつけて表示する。 EI および m は x の滑らかな関数と仮定されているわけである。

v 方向の分布力密度を $h=h(x)$ とおき、曲げモーメントを M 、せん断力を Q とすれば、

$$M = -EI \frac{d^2v}{dx^2}, \quad Q = \frac{dM}{dx},$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = -h \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

となる。

式 (2.1) の第 3 式を積分し、両端における M の値で表わすと、次の形で M を表わすことができる：

$$M = g(x) + \frac{M_1(l-x) + M_2x}{l},$$

$$g(x) \equiv \frac{l-x}{l} \int_0^x zh dz + \frac{x}{l} \int_x^l (l-z) h dz. \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

式 (2.2) の M を式 (2.1) の第 1 式に代入して積分し、両端における θ の値を求出す：

$$\theta_1 = \frac{v_2 - v_1}{l} + \int_0^l \frac{(l-x)^2}{EI^2} dx \cdot M_1$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^l \frac{(l-x)x}{EI l^2} dx \cdot M_2 + \mathfrak{A}, \\
\theta_2 &= \frac{v_2 - v_1}{l} - \int_0^l \frac{(l-x)x}{EI l^2} dx \cdot M_1 \\
& - \int_0^l \frac{x^2}{EI l^2} dx \cdot M_2 - \mathfrak{B}, \\
\mathfrak{A} &\equiv \int_0^l \frac{l-x}{EI} g(x) dx, \\
\mathfrak{B} &\equiv \int_0^l \frac{x}{EI} g(x) dx. \dots\dots\dots (2.3)
\end{aligned}$$

他方、式 (2.2) を微分してせん断力の両端における値を求めると、次の形で表わされる：

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{M_2 - M_1}{l} + \mathfrak{C}, \quad Q_2 = \frac{M_2 - M_1}{l} + \mathfrak{D}, \\
\mathfrak{C} &\equiv \int_0^l \frac{l-x}{l} h(x) dx, \\
\mathfrak{D} &\equiv - \int_0^l \frac{x}{l} h(x) dx. \dots\dots\dots (2.4)
\end{aligned}$$

式 (2.3) および式 (2.4) から、 M_1, M_2, Q_1, Q_2 を、 $v_1, v_2, \theta_1, \theta_2$ および $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ の関数として表わしたものが、静力学の変形法である。 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ はいわゆる荷重項である。いくつかの断面定数を定義すると、

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int_0^l \frac{(l-x)^2}{EI l^2} dx, \quad \beta = \int_0^l \frac{x(l-x)}{EI l^2} dx, \\
r &= \int_0^l \frac{x^2}{EI l^2} dx, \\
\bar{\alpha} &= \frac{r}{d}, \quad \bar{\beta} = -\frac{\beta}{d}, \quad \bar{r} = \frac{\alpha}{d}, \quad d \equiv \alpha r - \beta^2 \\
&\dots\dots\dots (2.5)
\end{aligned}$$

次の関係式がえられる：

$$\begin{aligned}
M_1 &= \bar{\alpha} \theta_1 - \bar{\beta} \theta_2 - \frac{\bar{\alpha} - \bar{\beta}}{l} (v_2 - v_1) - \bar{\alpha} \mathfrak{A} - \bar{\beta} \mathfrak{B}, \\
M_2 &= \bar{\beta} \theta_1 - \bar{r} \theta_2 - \frac{\bar{\beta} - \bar{r}}{l} (v_2 - v_1) - \bar{\beta} \mathfrak{A} - \bar{r} \mathfrak{B}, \\
Q_1 &= \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{l} \theta_1 - \frac{\bar{\alpha} - \bar{\beta}}{l} \theta_2 + \frac{\bar{\alpha} - 2\bar{\beta} + \bar{r}}{l^2} (v_2 - v_1) \\
& - \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{l} \mathfrak{A} - \frac{\bar{r} - \bar{\beta}}{l} \mathfrak{B} + \mathfrak{C}, \\
Q_2 &= \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{l} \theta_1 - \frac{\bar{r} - \bar{\beta}}{l} \theta_2 + \frac{\bar{\alpha} - 2\bar{\beta} + \bar{r}}{l^2} (v_2 - v_1) \\
& - \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{l} \mathfrak{A} - \frac{\bar{r} - \bar{\beta}}{l} \mathfrak{B} + \mathfrak{D}. \dots\dots\dots (2.6)
\end{aligned}$$

式 (2.6) の荷重項に関する部分以外は、いわゆる剛性行列の要素を表わしている。以下、荷重項の性質を調べる。このために、次の関数 $r(x), s(x), R(x), S(x)$ および定数 ρ, σ を定義する：

$$\begin{aligned}
r(x) &= \int_0^x \frac{l-z}{EI} dz, \quad R(x) = \int_0^x r(z) dz, \\
s(x) &= \int_0^x \frac{z}{EI} dz, \quad S(x) = \int_0^x s(z) dz, \\
\rho &\equiv r(l) = \alpha + \beta, \quad \sigma \equiv s(l) = \beta + r. \dots\dots\dots (2.7)
\end{aligned}$$

式 (2.5) および式 (2.7) より、次の関係式が確かめられる：

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{l} R(l), \quad r = \sigma - \frac{1}{l} S(l), \\
\beta &= \frac{1}{l} S(l) = \rho - \frac{1}{l} R(l). \dots\dots\dots (2.8)
\end{aligned}$$

式 (2.5), (2.7), (2.8) を用いて、式 (2.6) の荷重項を変形し、整理すると、

$$\begin{aligned}
-\bar{\alpha} \mathfrak{A} - \bar{\beta} \mathfrak{B} &= - \int_0^l \phi_2(x) h(x) dx, \\
-\bar{\beta} \mathfrak{A} - \bar{r} \mathfrak{B} &= \int_0^l \phi_4(x) h(x) dx, \\
\mathfrak{C} - \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{l} \mathfrak{A} - \frac{\bar{r} - \bar{\beta}}{l} \mathfrak{B} &= \int_0^l \phi_1(x) h(x) dx, \\
\mathfrak{D} - \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{l} \mathfrak{A} - \frac{\bar{r} - \bar{\beta}}{l} \mathfrak{B} &= - \int_0^l \phi_3(x) h(x) dx. \\
&\dots\dots\dots (2.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &\equiv 1 - \frac{1}{d} (\sigma R - \rho S), \\
\phi_2(x) &\equiv x - \frac{1}{d} (r R - \beta S), \\
\phi_3(x) &\equiv \frac{1}{d} (\sigma R - \rho S), \\
\phi_4(x) &\equiv -\frac{1}{d} (\beta R - \alpha S) \dots\dots\dots (2.10)
\end{aligned}$$

の形で表現されることがわかる。この $\phi_i(x)$ という関数は一般には簡単な多項式等にはならないが、数値的には容易に求めることができる。

式 (2.9) によって、式 (2.6) を書き直すと、次の行列の関係で表わされる：

$$\mathbf{f} = -\mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{c}. \dots\dots\dots (2.11)$$

この式で、 $\mathbf{f}$ と $\mathbf{c}$ は

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ -M_1 \\ -Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}, \quad c_i = (\phi_i h) \equiv \int_0^l \phi_i h dx \\
\dots\dots\dots (2.12)$$

を表わし、 $\mathbf{B} = (b_{ij})$ は剛性行列を示す：

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{\bar{\alpha} - 2\bar{\beta} + \bar{r}}{l^2}, \quad b_{12} = -\frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{l}, \quad b_{13} = -b_{11}, \\
b_{14} &= \frac{\bar{r} - \bar{\beta}}{l}, \quad b_{22} = \bar{\alpha}, \quad b_{23} = -b_{12}, \quad b_{24} = -\bar{\beta}, \\
b_{33} &= b_{11}, \quad b_{34} = -b_{14}, \quad b_{44} = \bar{r}, \quad b_{ij} = b_{ji}. \\
&\dots\dots\dots (2.13)
\end{aligned}$$

次に、 ϕ_i と ϕ_i' の性質をみる。式 (2.7) の定義と式 (2.8) の関係から、 $\phi_i(x)$ について次の性質が明らかである：

$$\begin{aligned}
\phi_1(0) &= 1, \quad \phi_1(l) = 0, \quad \phi_2(0) = \phi_2(l) = 0, \\
\phi_3(0) &= 0, \quad \phi_3(l) = 1, \quad \phi_4(0) = \phi_4(l) = 0. \\
&\dots\dots\dots (2.14)
\end{aligned}$$

また、 $\Phi_i(x)$ の微係数：

$$\begin{aligned}\Phi_1'(x) &= -\frac{1}{4l}(\sigma r - \rho s), \\ \Phi_2'(x) &= 1 - \frac{1}{4}(\tau r - \beta s), \\ \Phi_3'(x) &= \frac{1}{4l}(\sigma r - \rho s) = -\Phi_1'(x), \\ \Phi_4'(x) &= -\frac{1}{4}(\beta r - \alpha s) \dots\dots\dots(2.15)\end{aligned}$$

に対して、次の性質も明らかである：

$$\begin{aligned}\Phi_1'(0) &= \Phi_1'(l) = 0, \quad \Phi_2'(0) = 1, \quad \Phi_2(l) = 0, \\ \Phi_3'(0) &= \Phi_3'(l) = 0, \quad \Phi_4'(0) = 0, \quad \Phi_4'(l) = 1 \\ &\dots\dots\dots(2.16)\end{aligned}$$

式 (2.14) および式 (2.16) によって、 Φ_i がいわゆる変形関数の 1 組を与えることがわかる。一定断面のエレメントにおいては、 Φ_i は解析的に積分できて次の関係式をとる：

$$\begin{aligned}\Phi_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \\ \Phi_2(\xi) &= l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \\ \Phi_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ \Phi_4(\xi) &= l(-\xi^2 + \xi^3), \quad \xi = \frac{x}{l} \dots\dots\dots(2.17)\end{aligned}$$

さらに、 Φ_i の定義によって、 Φ_i が

$$\frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2 \Phi_i}{dx^2} = 0 \dots\dots\dots(2.18)$$

の解であることが知られる。他方、求めるべき正確な変位 $v(x)$ は式 (2.1)、すなわち、

$$-\frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2 v}{dx^2} = h \dots\dots\dots(2.19)$$

の解である。

いま一般に式 (2.19) を解きたいものとして、式 (2.18) の解で式 (2.14) および式 (2.16) の境界条件が満たされる Φ_i を求めたとする。このとき定数変化法にしたがって式 (2.19) の v は次の形で表わされる：

$$\begin{aligned}v &= \Phi_1 v_1 + \Phi_2 \theta_1 + \Phi_3 v_2 + \Phi_4 \theta_2 + \sum_{i=1}^4 u_i(x) \Phi_i \\ &\dots\dots\dots(2.20)\end{aligned}$$

式 (2.20) の u_i は次の関係式を満たす 4 つの関数として与えられている：

$$\begin{aligned}\sum \Phi_i u_i' &= 0, \quad \sum \Phi_i' u_i' = 0, \quad \sum \Phi_i'' u_i' = 0, \\ \sum \Phi_i''' u_i' &= \frac{h}{EI}, \\ u_1(0) &= u_2(0) = u_3(l) = u_4(l) = 0. \dots\dots\dots(2.21)\end{aligned}$$

式 (2.20) および式 (2.21) によって、

$$\begin{aligned}\int_0^l \Phi_i h dx &= \int_0^l \Phi_i \cdot \frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2 v}{dx^2} \\ &= -Q_2 \delta_{i3} + Q_1 \delta_{i1} + M_2 \delta_{i4} - M_1 \delta_{i2} \\ &\quad + \int_0^l EI \frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \Phi_i'' dx \quad (i=1 \sim 4)\end{aligned}$$

の右辺第 5 項を変形し整理すると、式 (2.11) および式 (2.12) と全く同一の形で表わされる：

$$f = -Bv + c$$

ここで、 b_{ij} は

$$b_{ij} = (\Phi_i'' EI \Phi_j'') \dots\dots\dots(2.22)$$

であるが、これは内容上、式 (2.13) と一致すべきものである。

以上の考察から次の結論がえられる。 h が与えられた関数ならば式 (2.1) あるいは式 (2.19) の解は式 (2.11) を解けば求められる。この際には方法上の誤差は含まれない。式 (2.11) の行列の要素は式 (2.18) の解から計算される。式 (2.18) の解は一般に式 (2.10) で与えられるが、特に一定断面の場合には式 (2.17) で与えられる。ここに述べたことは静力学でいわれていた変形法と同一の内容のものである。

h が与えられた関数のほかに v または v' 等を含む場合には別の問題が起こる。このような問題の基本として、曲げ振動（ここでは固有振動）を考察する。

3. 曲 げ 振 動

振動計算においてモード解析の方法をとるとすれば、各モードは式 (2.1) で、

$$h(x) = p^2 m(x) v(x) \dots\dots\dots(3.1)$$

とおいた解となる。ここで p は固有円振動数を表わす。式 (3.1) を式 (2.11) に代入した関係式は未知の関数 $v(x)$ を含むのでこのままでは解けず、一般には何らかの近似法が必要となる。

いま (II) の立場から有限要素法を適用することを考えてみる。式 (2.19) の解で式 (2.14) および式 (2.16) の境界条件を満たす関数を $F_i(x)$ とすれば、式 (2.19) の正しい解（方法上の誤差を含まない解）は、

$$v(x) = F_1 v_1 + F_2 \theta_1 + F_3 v_2 + F_4 \theta_2 \dots\dots\dots(3.2)$$

の形で表わされる。ところが、(II) の定理によれば、

$$\bar{\phi} \equiv \frac{p^2 m l^4}{EI} \dots\dots\dots(3.3)$$

の値が小さいとき（どの程度小さければよいかは後でみる）には、式 (2.19) の解は $h=0$ とおいたときの解で近似される。すなわち、

$$v(x) \approx \Phi_1 v_1 + \Phi_2 \theta_1 + \Phi_3 v_2 + \Phi_4 \theta_2 \dots\dots\dots(3.4)$$

式 (3.4) を式 (3.1) の右辺におき、式 (2.11) より次の関係式がえられる：

$$f = -Bu + p^2 Cv \dots\dots\dots(3.5)$$

式 (3.5) の C は質量行列を表わす：

$$C = (m_{ij}), \quad m_{ij} = (\Phi_i m \Phi_j) \dots\dots\dots(3.6)$$

式 (3.5) より固有方程式がたてられ、 p^2 および v が求められる。残る問題は式 (3.2) と式 (3.4) との近似

の度合いである。微分方程式の解は一般には係数を定めるパラメーターに連続的に依存するので、一定断面のエレメントを考えれば傾向を知ることができる。

EI および m が定数であるとき、式 (2.19) の解 $v(x)$:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = p^2 m v$$

は解析的に解けて、 $F_i(x)$ は次の形で表わされる:

$$F_1(\xi) = \frac{1}{2f_{10}} \{ (\cot \phi + \coth \phi) (\sinh \phi \xi - \sinh \phi \xi) + (f_{10} + 1) \cos \phi \xi + (f_{10} - 1) \cosh \phi \xi \},$$

$$F_2(\xi) = \frac{l}{2f_{10} \cdot \phi} \{ (f_{10} - 1) \sin \phi \xi + (f_{10} + 1) \sinh \phi \xi + (\coth \phi - \cot \phi) (\cos \phi \xi - \cosh \phi \xi) \},$$

$$F_3(\xi) = F_1(1 - \xi), \quad F_4(\xi) = -F_2(1 - \xi),$$

$$\phi = \sqrt[4]{\frac{m}{EI}} \cdot \sqrt{p} \cdot l, \quad \xi = \frac{x}{l},$$

$$f_{10} = \operatorname{cosech} \phi \operatorname{cosec} \phi - \coth \phi \cot \phi. \quad \dots (3.7)$$

“厳密な”変形関数 (3.7) は ϕ をパラメーターとしており、若干個の ϕ について ξ の関数として表示すると図-1 のとおりである。これに対して“近似的な”変形関数 (2.17) (一定断面であるので) は、このグラフにおいて $\phi=0$ ($\phi=0.1$ の曲線にほとんど一致する) の曲線にあたる。このグラフから F_i と ϕ_i との差は、 $\phi=0$ 付近ではほとんど 0 に等しいが、 ϕ が増大するにつれ

図-1 等断面の場合の変形関数 (解析的な解)

$$\phi = \sqrt[4]{\frac{m}{EI}} \cdot l \cdot \sqrt{p}$$

—式 (3.7) の $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)/l$

て増大する。 ϕ が 1 を越えると差異が著しくなる。

以上は 1 エレメントについての誤差であり、実際にはエレメントがいくつか結合することによって生じる誤差も方法上の誤差にはいる。この誤差はエレメントの結合の状況やモードの現われ方にも関係して、前もって推定することは困難であろうが、いくつかの試算によれば、個々のエレメントについて

$$\phi = \sqrt[4]{\frac{m}{EI}} \cdot \sqrt{p} \cdot l \approx 1.0$$

が近似性の大きな基準とされる。

したがって、すでに述べたように、一般に変断面のエレメントについても、

$$\bar{\phi} = \frac{m}{EI} \cdot p^2 l^4 \approx 1.0 \quad \dots (3.8)$$

をおおよその基準とすることができる。すなわち、 l を定めておけば、式 (3.8) を満足する p までがほぼ良好な固有値とみなされ、また、ある大きさの p まで必要ときには式 (3.8) を満足するように l を小さくしておかなければならない。

次に (I) の立場から有限要素法を適用することを考える。この場合、一定断面であると変断面であるのかかわらず式 (2.17) の変形関数 ϕ_i がとられるのが普通である²⁾。求める関数 $v(x)$ を ϕ_i で近似させて、エネルギー原理を用いつりあいの式をたてる。この式の諸要素を個々のエレメントについてみると、式 (3.5) の右辺:

$$-Bv + p^2 Cv \quad \dots (3.9)$$

の形をしている。つりあいの式は式 (3.9) をよせ集めた和が 0 になるという形式になっている。

式 (3.9) を応力 f の式とみなせば、形式上は (II) の立場の関係式 (3.5) と全く同一になる。ただし、このなかに入っている ϕ_i が異なっている。(II) の立場では、変形関数は式 (2.14) および式 (2.16) の境界条件をみたせばある程度自由であるが、変形関数の選択やエレメントの大きさの判断と結果の近似性とを結びつける簡略な基準がないように思われる。

また、(I) の立場では応力は変形が求められたのちに、これを微分して求めることが多いが、この結果は式 (3.9) より出した値 (エレメントの端点の応力) といくらかく違っている。式 (3.9) より求めた値は (II) の方法の結果と近い値で連続的となり、(II) の方法の結果を smoothing した形になっている (次節の数値例参照)。数値例に入るまえに、応用上必要である振動系の縮小について検討する。

4. 振動系の縮小

いくつかのエレメントが結合した系における独立変数を v 、剛性行列を B 、質量行列を C と表わし、 $\lambda = p^2$ を円振動数とする。系を二つの部分に分け、対応する変数を v_1, v_2 とし、 B, C も相応に分割する。すなわち、

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.1)$$

なる関係がある。 B と C は対称行列である。全体の系の固有方程式は

$$Bv = \lambda Cv \dots\dots\dots (4.2)$$

で表わされる。

いま、この全体系から v_1 の部分を省略して近似的な縮小系をつくる操作と、その近似の度合を考える。

Ramden と Stoker はエネルギー原理から出発して、縮小系をつくるルーチンを与えている⁴⁾が、ここでは直接に式 (4.2) より出発して縮小が可能である条件をみる。まず、式 (4.2) を二つの部分に分けて表わす：

$$B_{11}v_1 + B_{12}v_2 = \lambda(C_{11}v_1 + C_{12}v_2), \\ B_{21}v_1 + B_{22}v_2 = \lambda(C_{21}v_1 + C_{22}v_2) \dots\dots\dots (4.3)$$

式 (4.3) の第1式より v_1 を求め：

$$v_1 = (1 - \lambda B_{11}^{-1}C_{11})^{-1}(\lambda B_{11}^{-1}C_{12} - B_{11}^{-1}B_{12})v_2$$

この逆行列の部分が展開できるとしてみる：

$$v_1 = (-B_{11}^{-1}B_{12} + \lambda B_{11}^{-1}C_{12} - \lambda B_{11}^{-1}C_{11}B_{11}^{-1}B_{12} \dots) v_2 \dots\dots\dots (4.4)$$

式 (4.3) の第1式において v_1 の部分だけをとりその固有値を μ とすると、

$$B_{11}v_1 = \mu C_{11}v_1 \text{ または } B_{11}^{-1}C_{11}v_1 = \frac{1}{\mu}u_1 \dots\dots\dots (4.5)$$

であるが、 μ^{-1} の最大値 $\max \mu^{-1}$ に対して、

$$\lambda \max \mu^{-1} = \frac{\lambda}{\min \mu} \ll 1.0 \dots\dots\dots (4.6)$$

ならば、式 (4.4) の展開が可能であり、かつ、最初の3項のみをとり、残りを省略しても、よい近似がえられる。このとき、

$$v_1 = -B_{11}^{-1}B_{12}v_2 + \lambda B_{11}^{-1}(C_{12} - C_{11}B_{11}^{-1}B_{12})v_2 \dots\dots\dots (4.7)$$

を式 (4.3) の第2式に代入して、縮小系の固有方程式がえられる：

$$B_{22}^*v_2 = \lambda C_{22}^*v_2, \\ B_{22}^* = B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}, \\ C_{22}^* = C_{22} + B_{21}B_{11}^{-1}C_{11}B_{11}^{-1}B_{12} - B_{21}B_{11}^{-1}C_{12} - C_{21}B_{11}^{-1}B_{12} \dots\dots (4.8)$$

式 (4.8) の結果は 前掲論文⁴⁾の結果と同じ形式であるが、式 (4.7) の v_1 の関係式では右辺第2項がある点だけ異なっている。後の数値例でみるように、この項は

あまり大きい効果を与えない。

数 値 例

テーパのついたカンチレバーの横振動を考える。 x 軸を長手の方向にとって、断面二次モーメントと単位長あたり質量は、

$$I(x) = I(0) \left(\frac{l_0 + x}{l_0} \right)^2 \\ m(x) = m(0) \frac{l_0 + x}{l_0}, \quad 0 \leq x \leq l$$

の形で表わされ、 $x=0$ が自由端、 $x=l$ が固定端に対応するものとする。これらの量に次の数値を与える：

$$EI(0) = 3.0 \times 10^5 \text{ t} \cdot \text{m}^2, \quad m(0) = 2.0 \text{ t} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^2, \\ l_0 = 50.0 \text{ m}, \quad l = 20.0 \text{ m}.$$

最初に各節点に v および θ の2変数をとる場合をみ

表—1 周期 (横振動) ...
2 エレメント系
 $\phi = \frac{m \lambda (dx)^4}{EI}$

次数	A	B	
	$\lambda(T \text{ sec})$	$\lambda(T \text{ sec})$	ϕ
1	18.73 (1.452)	18.75 (1.451)	1.3
2	603.5 (0.256)	608.1 (0.255)	41
3	6266 (0.079)	6539 (0.078)	440

て、次に系の縮小を考える。まず2等分して2エレメント系

(4変数)で計算する。表—1にA, Bの2通りの結果(周期)を示してある。Aは(I)の立場から式 (2.17) の変形

関数を適用する方法

であり、Bは(II)の立場から (2.10) の変形関数を適用する方法である。Bでは無名数：

$$\phi = \frac{\lambda m}{EI} (dx)^4 \dots\dots\dots (4.9)$$

の大きさによって、解の近似の度合いが判断されるので、この値を並記してある。ただし、 ϕ は定数でないので最も大きい値 ($x=0$ の位置) を示している。

表—1によると (I) の方法と (II) の方法との固有値の差はたかだか数 % である。(II) の方法からすれば3次の固有値は精度がおとり ($\phi=440$)、分割数をませばかなり変動するものであることが推定できる。

表—2 は5エレ

メントで計算した結果である。精度の点からみると、3次までが信頼度が高くそれ以上はまだかなり動揺しているものと推定できる。

次に応力の応答量をみる。ここに応答とは、底端の単位加速度に対していう。

表—2 周期 (横振動) ...
5 エレメント系
 $\phi = \frac{m \lambda (dx)^4}{EI}$

次数	A	B	
	$\lambda(T \text{ sec})$	$\lambda(T \text{ sec})$	ϕ
1	18.66 (1.452)	18.72 (1.452)	0.03
2	597.6 (0.257)	598.1 (0.257)	1.0
3	4 434 (0.094)	4 438 (0.094)	7.6
4	17 000 (0.048)	17 030 (0.048)	29
5	46 610 (0.029)	46 590 (0.029)	80

図-2 曲げモーメントおよびせん断力の応答

- (1) $M, Q \cdots A$ のケース, $M^*, Q^* \cdots B$ のケース
(2) 実線は2エレメント, 点線は5エレメント

図-2 に曲げモーメント M およびせん断力 Q のダイヤグラムが示されている。実線は2エレメント系の1次振動の応答, 点線は5エレメント系の1次振動の応答である。ただし, 曲げモーメント M については実線と点線がほとんど一致しているので, 点線が表示されていない。

(*) をつけたカーブは(II)の方法の値で連続的であるが, (I)の方法では節点でいくらか不連続を生じる。しかし, 式(3.9)のところで述べた関係式をとれば, (II)の方法によるカーブにほとんど一致することが知られる。(*) をつけたカーブは(*) をつけないカーブを smoothing した結果とみなすこともできる。節点における不連続量は λ の小さい領域(低次の範囲)では小さい。また, 曲げモーメントについては特に小さい。これは回転慣性の作用の小さいことを示す。

次に振動系の縮小の問題に移る。うえに述べたことから, θ 成分を省略することを考える。5エレメント系において, 最初に θ を5つ, ついで v を5つ並べて, それぞれを v_1 および v_2 とし, 対応して剛性行列と質量行列も並べかえておく。

表-3 縮小系の固有値
.....5エレメント系
 $\bar{\lambda}$ は縮小系の固有値

次数	B	
	λ	$\bar{\lambda}$
1	18.72	18.72
2	598.1	598.9
3	4 438	4 486
4	17 030	17 700
5	46 590	47 730

式(4.5)を解いてみると,

$$\min \mu = 84710$$

であることがわかる。式(4.8)にしたがって, 縮小された系の算出を行なうと, 表-3の結果がえられる。これは5元で最大の λ について,

$$\frac{\max \lambda}{\min \mu} = 0.56$$

となっており, 縮小可能の条件が満たされている。もとの系と縮小系の固有値については, 1・2次では1%以内, 3次は1%程度, 4・5次は数%程度の開きである。両者の開きは表-2の ϕ に対応していることがわかる。

このことは応答値についてもいえる。表-4に2つの系の応力の対照が示されているが, 1・2次では1~2%の開き, 3次ではやや開きが增大している。

表-4 応答値(横振動).....5エレメント系

M, Q もとの系の応力

$\bar{M}, \bar{Q}$ 縮小系の応力

$\bar{M}', \bar{Q}'$ 縮小系で式(4.7)の右辺第2項を省略する

$\frac{x}{l}$	1 次 モ ー ド					
	M	$\bar{M}$	$\bar{M}'$	Q	$\bar{Q}$	$\bar{Q}'$
0.2	-449.4	-450.7	-436.9	215.6	216.1	194.8
0.4	-1 645	-1 650	-1 666	372.0	373.1	385.5
0.6	-3 342	-3 351	-3 358	466.5	467.9	470.2
0.8	-5 304	-5 318	-5 325	506.5	507.9	511.9
1.0	-7 349	-7 368	-7 370	512.9	514.3	515.3

$\frac{x}{l}$	2 次 モ ー ド					
	M	$\bar{M}$	$\bar{M}'$	Q	$\bar{Q}$	$\bar{Q}'$
0.2	6 378	6 517	6 660	-2 485	-2 542	-2 333
0.4	14 570	14 890	15 400	-1 061	-1 086	-1 453
0.6	12 180	12 450	12 380	2 346	2 397	2 416
0.8	-3 015	-3 076	-3 397	4 925	5 035	5 171
1.0	-24 370	-24 910	-25 060	5 488	5 611	5 721

$\frac{x}{l}$	3 次 モ ー ド					
	M	$\bar{M}$	$\bar{M}'$	Q	$\bar{Q}$	$\bar{Q}'$
0.2	-19 210	-20 780	-22 360	4 846	5 297	4 904
0.4	-15 210	-16 350	-16 060	-7 042	-7 601	-6 793
0.6	18 140	19 400	22 650	-5 941	-6 413	-8 154
0.8	12 600	13 570	12 520	8 880	9 560	9 554
1.0	-38 190	-41 080	-42 230	14 180	15 290	16 140

以上の考察によって, 近似の度合は ϕ の大きさによって判断できることがわかる。そのほかのいくつかの試算(6.の例も参照)によると, 最も信頼の高いのは $\phi \approx 1.0$ 程度までである。

表-4には式(4.7)で右辺第2項を省略した場合の応答値も示されている。1次ではこの効果は数%以内であるが, 2次・3次になるとやや増加して, ところどころ10%を越えている。このような点では, 両側の応力がくい違って不連続がおこっている。両側の値を平均してみれば, 数%程度の誤差である。それで, この点を許容すれば式(4.7)で第2項は省略してよいことになる。

5. 縦 振 動

ここでは縦振動そのものを調べるのではなく, 次節に進む予備として2階微分方程式の型の変形関数をみでおく必要がある。その具体的な例として, 縦振動の型を考察する。

軸方向の変位を $u=u(x)$ とし、断面積 A が x の関数であるとすれば、縦振動のモードを定める関係式は

$$\frac{dN}{dx} = -p^2 mu, \quad N = EA \frac{du}{dx} \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

となる。ここで N は軸方向の応力を表わす。

この問題の変形関数は

$$\frac{d}{dx} EA \frac{du}{dx} = 0 \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

の解から決定される。エレメントの両端における変位を u_1, u_2 とし、応力を N_1, N_2 と表わす。変形関数 $\Psi_1(x), \Psi_2(x)$ に対する境界条件は、

$$\Psi_1(0)=1, \Psi_2(0)=0, \Psi_1(l)=0, \Psi_2(l)=1$$

である。

関数 $t(x)$ と定数 τ :

$$t(x) = \int_0^x \frac{dx}{EA}, \quad \tau = t(l)$$

を定義すると、 Ψ_i は次の形で表わされる :

$$\Psi_1(x) = 1 - \frac{t}{\tau}, \quad \Psi_2(x) = \frac{t}{\tau} \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

特に一定断面ならば、

$$\Psi_1(\xi) = 1 - \xi, \quad \Psi_2(\xi) = \xi, \quad \xi = \frac{x}{l} \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

となる。

うえの変形関数に対する剛性行列の要素 b_{ij} は、

$$b_{11} = \frac{1}{\tau}, \quad b_{12} = -b_{11}, \quad b_{22} = b_{11}$$

である。このとき、式 (5.1) の解は次の関係式の解で表わされる :

$$N_1 = \frac{1}{\tau} (u_2 - u_1) + p^2 \int_0^l mu \Psi_1 dx, \\ -N_2 = \frac{1}{\tau} (u_1 - u_2) + p^2 \int_0^l mu \Psi_2 dx. \quad \dots\dots (5.5)$$

有限要素法の手法に従って、右辺の u について、

$$u \approx \Psi_1(x)u_1 + \Psi_2(x)u_2 \quad \dots\dots\dots (5.6)$$

と近似できれば式 (5.5) は解くことができる。

式 (5.6) の近似が可能である条件をみるために、一定断面の場合の“厳密な”変形関数 $F_1(\xi), F_2(\xi)$:

図-3 等断面の場合の変形関数 (解析的な解)

$$F_1(\xi) = \frac{\sin \phi(1-\xi)}{\sin \phi}, \quad F_2(\xi) = F_1(1-\xi),$$

$$\phi = \sqrt{\frac{m}{EA}} \cdot p \cdot l \quad \dots\dots\dots (5.7)$$

のグラフをみてみよう (図-3)。式 (5.4) はこのグラフで $\phi \approx 0$ の極限にあたるが、 $\phi=0.1$ 程度ではほとんど両者の差異はなく、 $\phi=1.0$ ではいくらか差異をみせる。

したがって、式 (5.6) の成り立つ条件は

$$\phi = \frac{m}{EA} p^2 l^2 \approx 1.0$$

の範囲であるが、4階の型の場合と比べて、条件をきつく (ϕ を小さくする) とった方がよい近似を与えるようである。

6. Timoshenko beam の固有振動

Timoshenko beam は次の形の固有振動方程式を有する :

$$\frac{d}{dx} \kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) = -m p^2 v, \\ \frac{d}{dx} EI \frac{d\theta}{dx} + \kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) = -m r^2 p^2 \theta. \quad \dots\dots\dots (6.1)$$

この式で κ は断面形状に関する定数であり、 r は断面の回転半径を示す。 r^2 は I/A に等しく、また、材質の密度を ρ とすれば、 $m = \rho A$ となる。

一般に断面が x とともに変化する場合に、式 (6.1) を解くことを考える。式 (6.1) を次の形式 :

$$\frac{d}{dx} \kappa GA \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} \kappa GA \theta - m p^2 v, \\ \frac{d}{dx} EI \frac{d\theta}{dx} = -\kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) - m r^2 p^2 \theta. \quad \dots\dots\dots (6.2)$$

に表わしてみると、式 (6.2) の左辺は2階の微分方程式になるので、 v および θ のそれぞれについて式 (5.3) または式 (5.4) の型の変形関数の適用が考慮される。しかし、この型の変形関数の適用は良い近似を与えないことが多い。P. Tong はこの問題の困難な点を説明している³⁾。

(II) の立場から考えると、式 (6.2) に2階の型の変形関数が適用できるのは、 Δx をエレメントの長さとして、

$$\frac{\kappa GA}{\kappa GA}, \quad \frac{m p^2 (\Delta x)^2}{\kappa GA}, \quad \frac{\kappa GA (\Delta x)^2}{EI}, \\ \frac{m r^2 p^2 (\Delta x)^2}{EI} \quad \dots\dots\dots (6.3)$$

のそれぞれの値が 1.0 程度以下でなければならない。たとえば式 (6.3) の第3の量をとると、

$$\frac{\kappa GA(\Delta x)^2}{EI} = \frac{\kappa G}{E} \left(\frac{\Delta x}{r} \right)^2$$

であるので、 r の小さいビームは分割を非常に細かくしなければならない。また、第1の量はつねに1.0より小さくできない。このような数量的関係があるので、式(6.1)に v および θ のそれぞれについての2階の型の変形関数を適用することは、能率的でない。

それゆえ、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) &= 0, \\ \frac{d}{dx} EI \frac{d\theta}{dx} + \kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) &= 0 \dots \dots (6.4) \end{aligned}$$

の形の方程式より、変形関数を導いてみる。この変形関数の適用は、

$$\frac{m p^2 (\Delta x)^2}{\kappa GA} \approx 1.0, \quad \frac{m r^2 p^2 (\Delta x)^2}{EI} \approx 1.0 \dots (6.5)$$

の範囲でよい近似を与えるであろう。 $\kappa G < E$ であれば、式(6.5)のうちで前者が大きいので、この変形関数の適用の範囲は ϕ ：

$$\phi = \frac{m p^2 (\Delta x)^2}{\kappa GA} \approx 1.0 \dots \dots \dots (6.6)$$

で与えられる。

曲げモーメント M およびせん断力 Q の関係式：

$$M = -EI \frac{d\theta}{dx}, \quad Q = \kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) \dots \dots (6.7)$$

を用いて式(6.4)を積分する演算は2.と同様であるので省略して結果のみ説明する。記号も2.~3.と同様にとり、 $x=0$ を1端とし、 $x=l$ を2端としたエレメントを考えている。

関数 $s_{1\theta}(x)$, $s_{2\theta}(x)$, $t_{\theta}(x)$, $t_{1\theta}(x)$, $t_{2\theta}(x)$, $t_v(x)$ と定数 $\sigma_{1\theta}$, $\sigma_{2\theta}$, τ_{θ} , $\tau_{1\theta}$, $\tau_{2\theta}$, τ_v を定義する：

$$\begin{aligned} s_{1\theta} &= \int_0^x \frac{z}{EI} dz, \quad s_{2\theta} = \int_0^x s_{1\theta}(z) dz, \\ \sigma_{1\theta} &= s_{1\theta}(l), \quad \sigma_{2\theta} = s_{2\theta}(l), \\ t_{\theta} &= \int_0^x \frac{dz}{EI}, \quad t_{1\theta} = \int_0^x t_{\theta}(z) dz, \\ \tau_{\theta} &= t_{\theta}(l), \quad \tau_{1\theta} = t_{1\theta}(l), \\ t_{2\theta} &= \int_0^x t_{1\theta}(z) dz, \quad \tau_{2\theta} = t_{2\theta}(l), \\ t_v &= \int_0^x \frac{dz}{\kappa GA}, \quad \tau_v = t_v(l). \dots \dots \dots (6.8) \end{aligned}$$

この定数のあいだには次の関係が成りたっている：

$$\sigma_{1\theta} = l \tau_{\theta} - \tau_{1\theta}, \quad \sigma_{2\theta} = l \tau_{1\theta} - 2 \tau_{2\theta}. \dots \dots \dots (6.9)$$

次に関数 $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ を定義する：

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{1}{d} (-\tau_{\theta} + t_{\theta}), \quad P_1(x) = \frac{1}{d} (-\tau_{1\theta} + t_{1\theta}), \\ P_2(x) &= \frac{1}{d} \{-\tau_{1\theta} + t_{1\theta} + (l-x)t_{\theta}\}, \\ P_3(x) &= \frac{1}{d} \{-2\tau_{2\theta} + 2t_{2\theta} + (l-x)t_{1\theta} - \tau_v + t_v\}, \end{aligned}$$

$$\Delta \equiv \sigma_{1\theta} \tau_{1\theta} - \tau_{\theta} (\sigma_{2\theta} - \tau_v). \dots \dots \dots (6.10)$$

以上の定義によって、 v および θ に対する変形関数として $\Psi_i(x)$ および $\Phi_i(x)$ ($i=1\sim 4$) が導かれる：

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \tau_{1\theta} P_1 - \tau_{\theta} P_3, \\ \Psi_2 &= (\sigma_{2\theta} - \tau_v) P_1 - \sigma_{1\theta} P_3 - (l-x), \\ \Psi_3 &= 1 - \Psi_1, \\ \Psi_4 &= (2\tau_{2\theta} + \tau_v) P_1 - \tau_{1\theta} P_3, \\ \Phi_1 &= \tau_{1\theta} P_0 - \tau_{\theta} P_2, \\ \Phi_2 &= (\sigma_{2\theta} - \tau_v) P_0 - \sigma_{1\theta} P_2, \\ \Phi_3 &= -\Phi_1, \\ \Phi_4 &= (2\tau_{2\theta} + \tau_v) P_0 - \tau_{1\theta} P_2 + 1. \dots \dots \dots (6.11) \end{aligned}$$

式(6.11)が変形関数として必要な境界条件を満たすことは確かめることができる。

この変形関数を用いて、一般に、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) &= -q_v, \\ \frac{d}{dx} EI \frac{d\theta}{dx} + \kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) &= -q_{\theta} \end{aligned}$$

の解は、次の応力-変形関係の解に帰着される：

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= -\mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{c}, \\ \mathbf{B} &= (b_{ij}), \quad b_{ij} = b_{ji}, \quad \mathbf{c} = (c_i) \\ b_{11} &= \frac{\tau_{\theta}}{d}, \quad b_{12} = \frac{\sigma_{1\theta}}{d}, \quad b_{13} = -b_{11}, \quad b_{14} = \frac{\tau_{1\theta}}{d}, \\ b_{22} &= \frac{1}{d} (-\sigma_{2\theta} + \tau_v + \sigma_{1\theta} l), \quad b_{23} = -b_{12}, \\ b_{24} &= \frac{1}{d} (\sigma_{2\theta} - \tau_v), \quad b_{33} = b_{11}, \quad b_{34} = -b_{14}, \\ b_{44} &= \frac{1}{d} (-\sigma_{2\theta} + \tau_v + \tau_{1\theta} l), \\ c_i &= \int_0^l \Psi_i q_v dx + \int_0^l \Phi_i q_{\theta} dx, \quad i, j = 1 \sim 4. \dots (6.12) \end{aligned}$$

式(6.12)の解 $\mathbf{v}$ を用いて、 $\mathbf{v}$ と θ は次の式で近似される：

$$\begin{aligned} v &= \Psi_1 v_1 + \Psi_2 \theta_1 + \Psi_3 v_2 + \Psi_4 \theta_2, \\ \theta &= \Phi_1 v_1 + \Phi_2 \theta_1 + \Phi_3 v_2 + \Phi_4 \theta_2. \dots \dots \dots (6.13) \end{aligned}$$

もし、 q_v と q_{θ} が与えられた関数ならば式(6.12)の解は方法上の誤差を含まない正確な解である。これは静力学でいわれていた変形法の公式に一致すべきものである。

一定断面の場合には剛性行列および変形関数は次のとおりになる：

$$\begin{aligned} \delta &\equiv \frac{12 EI}{\kappa GA l^2} \quad \text{とおいて,} \\ b_{11} &= \frac{12 EI}{l^3} \frac{1}{1+\delta}, \quad b_{12} = \frac{6 EI}{l^2} \frac{1}{1+\delta}, \quad b_{14} = b_{12}, \\ b_{22} &= \frac{4 EI}{l} \frac{1+\frac{\delta}{4}}{1+\delta}, \quad b_{24} = \frac{2 EI}{l} \frac{1-\frac{\delta}{2}}{1+\delta}, \quad b_{44} = b_{22}, \\ \Psi_1(\xi) &= \frac{1-\xi}{1+\delta} (1+\xi-2\xi^2+\delta), \end{aligned}$$

$$\Psi_2(\xi) = \frac{l\xi(1-\xi)}{1+\delta} \left(1 - \xi + \frac{\delta}{2}\right),$$
$$\Psi_3(\xi) = \Psi_1(1-\xi), \Psi_4(\xi) = -\Psi_2(1-\xi),$$
$$\Phi_1(\xi) = -\frac{6\xi(1-\xi)}{(1+\delta)l}, \Phi_2(\xi) = \frac{1-\xi}{1+\delta}(1-3\xi+\delta),$$
$$\Phi_3(\xi) = -\Phi_1(1-\xi), \Phi_4(\xi) = \Phi_2(1-\xi) \dots (6.14)$$

数 値 例

J.H. Gaines と E. Volterra は Rayleigh-Ritz の方法によって、double cone 形の Timoshenko beam の固有振動について研究している³⁾ ので、この例を借用する。 $x=0$ で直径 d_1 をもち、 $x=l$ で直径 $d_0(>d_1)$ をもつ円錐台形のビームを直径 d_0 の面で2つ接合してある double cone で、両端が自由な固有振動を考える。対称性によって半分だけをみればよいが、この際の境界条件は、

$$x=0 \text{ で, } M=Q=0,$$
$$x=l \text{ で, } Q=\theta=0. \dots\dots\dots (6.15)$$

となる。

$x=l$ における断面積および断面二次モーメントを A_0, I_0 とすれば、一般に $A(x), I(x)$ は、

$$A(x) = A_0 \left\{ \frac{d_1}{d_0} + \left(1 - \frac{d_1}{d_0}\right) \frac{x}{l} \right\}^2$$
$$I(x) = I_0 \left\{ \frac{d_1}{d_0} + \left(1 - \frac{d_1}{d_0}\right) \frac{x}{l} \right\}^4$$

と表わされる。

求める固有値は A :

$$A^2 = \frac{\rho^2 A_0 I_0^2}{EI_0}$$

とし、 $E/\kappa G = \mu$ は 2.89 と仮定する。パラメーターとしては d_1/d_0 と l/d_0 の2つを取り、前者については 1.0 と 0.8、後者については 3.0, 5.0, 10.0 の場合を試算してみる。断面が円であるので $d_0=4r_0$ となっている。

最初に $d_1/d_0=1.0$ の場合をとる。このときは解析的な解が可能であるので、比較のためにこの A 値をみておこう(表一5)。次に式(6.11)の変形関数を用いて有限要素法で計算する。エレメントの数を2個

表一5 $d_1/d_0=1.0$ に対する固有値 A の真値
 $A^2 = \frac{\rho^2 A_0 I_0^2}{EI_0}$

l/d_0	モ ー ド		
	1	2	3
3	5.235	22.93	45.16
5	5.454	26.74	58.00
10	5.557	29.20	68.91
∞	5.593	30.23	74.64

および4個とした際の A の値が表一6に示されている。モードは3次までとってある。近似の度合を表わす量として ϕ を並記し、さらに解析的な値に対する誤差 $e\%$ も付してある。

モードが高くなるほど、また l/d_0 が小さくなるほど、誤差が大きくなる。4エレメント系で3次のモードまで

表一6 $d_1/d_0=1.0$ に対する固有値 A
 $A^2 = \frac{\rho^2 A_0 I_0^2}{EI_0}$

l/d_0		モ ー ド					
		1		2		3	
		エ レ メ ン ト 数					
		2	4	2	4	2	4
3	A	5.260	5.239	23.86	23.37	62.57	48.40
	ϕ	0.1	0.0	2.9	0.7	19.6	2.9
	e	0.6	0.1	4.5	2.2	39.5	7.9
5	A	5.468	5.455	27.36	27.03	76.26	60.78
	ϕ	0.1	0.0	1.4	0.3	10.5	1.7
	e	0.3	0.1	2.5	1.3	32.1	5.2
10	A	5.565	5.558	29.56	29.34	84.17	70.57
	ϕ	0.0	0.0	0.4	0.1	3.2	0.6
	e	0.2	0.0	1.3	0.5	22.3	2.6

$$e = (A - \text{真値}) \times 100 / \text{真値}$$

計算すると、 $l/d_0=5.0$ のときに 5.2% の誤差を生じるが、 $l/d_0=10.0$ となると 2.6% の誤差となって著しく小さくなる。 $l/d_0 \rightarrow \infty$ とみなされる通常のビームでは誤差は非常に小さいわけである。これに対して $l/d_0=3.0$ では4エレメント系で7.9%の誤差をもち、さらにエレメントを増すことも必要になる。誤差の大きさはおおよそ ϕ の大きさに見合っており、 $\phi \approx 1.0$ 程度であると誤差は5%程度以下である。

表一7 $d_1/d_0=0.8$ に対する固有値 A
 $A^2 = \frac{\rho^2 A_0 I_0^2}{EI_0}$

l/d_0		モ ー ド					
		1		2		3	
		エ レ メ ン ト 数					
		2	4	2	4	2	4
4	A	5.447	5.421	22.83	22.44	61.13	46.68
	ϕ	0.1	0.0	2.6	0.6	18.8	2.7
	e'	0.6	0.2	4.0	2.2	40.6	7.3
5	A	5.633	5.618	25.72	25.45	71.74	57.06
	ϕ	0.1	0.0	1.2	0.3	9.3	1.5
	e'	0.3	0.1	2.2	1.2	31.3	4.5
10	A	5.720	5.710	27.45	27.26	77.66	64.82
	ϕ	0.0	0.0	0.3	0.1	2.7	0.5
	e'	0.2	0.0	1.2	0.5	20.5	1.9

$$e' = (A - \text{上限値}) \times 100 / \text{上限値}^{(*)}$$

(*) 論文³⁾による

表一7は $d_1/d_0=0.8$ の場合について同様な演算を行った結果である。ここの誤差 $e'\%$ は Gaines and Volterra による上限値に対してとってある。同氏の計算法はビーム全体を1区間として7次までの多項式を14個試算する Rayleigh-Ritz 法である。この方法によってまず上限値を求め、ついで上限値を用いて下限値を評価している。同氏も指摘しているように、この下限値はまだ十分でなく、上限値が相対的に真値に近いと思わ

れるので、上述のように表では上限値をとって、本論の方法の結果と比較をすることにした。

表-7の全体的な傾向は表-6と非常によく似ており、ここでも ϕ の大きさによって近似の程度を評価することができる。

有限要素法では1つ1つのモードについて適切な変形関数を探すのではなく、1つの変形関数で数次のモードをカバーすることになるが、以上の考察より、ここで適用されている有限要素法の手法は良い近似を与えているといえよう。

7. む す び

骨組構造の構成成分としてのビームの固有振動を算出するのに、有限要素的な手法を用い、微分方程式の形のままで近似解を求める試算を行なった。この手法では変形関数は断面定数から定められ、方法上の誤差を含まない形での静力学的な変形法の関係式もこの変形関数で表現することができる。

また、計算結果の近似の度合いが比較的良好に評価できる。このことはエレメントの大きさの選定に役立つとともに、他の形の変形関数を探す一つの手がかりともなる。Timoshenko beamの解析例はそのような一つの例である。適切な変形関数が探せるかどうかは、この手法

では微分方程式の形式にかかっているもので、応用上に現われる他の型について研究することは今後の課題とした。

本論の研究について猪瀬寧雄博士（日建コンサルタンツ社長）から助言をいただいたこと、さらに、土木学会論文集編集委員会第1部門の査読委員の諸先生にご教示を受けたことを付記して、感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) Pian, T.H.H. and Tong, P. : Basis of Finite Element Methods for Solid Continua, Int. J. Num. Meth. Engng., 1.1 (1969).
- 2) Gallagher, R.H. and Lee, C.H. : Matrix Dynamic and Instability Analysis with non-uniform Elements, Int. J. Num. Meth. Engng., 2.2 (1970).
- 3) Tong, P. : New Displacement Hybrid Finite Element Models for Solid Continua, Int. J. Num. Meth. Engng., 1.2 (1970).
- 4) Ramden, J.N. and Stoker, J.R. : Mass Condensation : a Semi-automatic Method for Reducing the Size of Vibrating Problems, Int. J. Num. Meth. Engng., 4.1 (1969).
- 5) Gaines, J.H. and Volterra, E. : Upper and Lower Frequencies of Tapered Beams, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94, No. EM 2, Apr. 1968.
- 6) Bellman, R. : Methods of Nonlinear Analysis, Academic Press, 1970.

(1971.9.28・受付)