道路網における容量制約を考慮した確率最大化 配分法とその解法

PROBABILITY MAXIMIZATION MODEL FOR TRAFFIC ASSIGNMENT WITH CAPACITY RESTRAINT AND ITS ANALYTICAL METHODS

松 井 寛^{*}
By Hiroshi Matsui

1. ま え が き

自動車道路網をいかに走行するかを推定しようとするいわゆる交通量配分の問題は、古くから研究され、現在までに多くの交通量配分モデルが提案されている。ところで、交通量配分の問題は、運転者の経路選択挙動にみられる複雑さに加えて、一般に道路網を対象とした場合、扱う変数の数が非常に膨大となるなどの計算技術上の問題もあって、計算の簡略化を重視するあまり、ともすれば配分理論としての論理性や数学的な厳密さに欠けるモデルが少なくない。しかしながら、最近のように交通量配分の目的が単に道路網における交通流の記述にとどまらず、道路網の変化あるいは交通規制の実施に伴う交通流の変化の予測にまで適用されるようになると、単に現実の交通流との適合性のみを重視するだけでは不十分で、そこにはやはり現実にもみられる配分現象に対して論理的な説明がなされていなければならないと考える。

ところで、著者がすでに提案している確率最大化配分法と名付けた新しい配分理論は、運転者の経路選択にみられる多様性を前提に、最も確からしい配分パターンを求めるもので、厳密な論理性に裏付けされたモデルの一つであるということができる。この配分モデルは道路網上の配分現象を数学的に記述することを目的としたものであるが、特にこの配分モデルにおいて交通容量制約を導入した場合は、問題が非線形計画法の問題となり、一般に求解が困難となる。

そこで本文では、特に容量制約を考慮した場合の確率最大化配分法を取り上げ、その具体的な解法についていくつかの提案を行い、その実用化に対し検討を加えることにした。

2. 確率最大化配分法の概要¹⁾

道路網において、ある目的地に向かう車がどの経路を選択するかを、車 1 台 1 台について考えてみれば、きわめて多様性に富んでいるということができる。これは運転者の経路選択に影響を及ぼす要因がきわめて広範囲にわたっており、さらに、運転者が何本かの経路の中から走行経路を選択するとき、通常はそれらの経路を正確に比較評価するに十分な情報を、運転者自身持ち合わせていないためであると考えられる。ところが、このような人間行動の複雑さにもかかわらず、個々の車の行動の集合体として道路網上の交通流を眺めてみると、一般には時間的ないし距離的に最短な経路を選ぶ確率が最も高くなり、ついで次適経路がそれに続くというような、ある種の統計的規則性を認めることができるであろう。

道路網上の交通流をこのような観点から眺めてみると、道路網上で運転者の経路選択を確率的現象としてとらえることに十分妥当性があると考えられる。確率最大化配分法においては、道路網上の交通量配分パターンが確率的な立場から論じられ、その結果与えられた道路条件および交通条件のもとで、最も起こりやすい配分パターンというものが導き出される。

すなわち、いま対象とする道路網上に r 個の OD ペアを考え、それぞれに OD 交通量を与えておく。また各 OD に対しあらかじめたかだか s 本までの配分対象経路を指定しておく。ただし、ここであらかじめ経路を指定したが、これはこの配分理論において本質的な問題ではない。後述するように、配分経路を指定せず、考えられるすべての経路を対象として取り上げることも同様に可能である。また、経路の評価値としてここでは所要時間を取り上げることにする。

さて、いま r 種の OD 交通量がこの道路網上の経路に配分されるわけであるが、このときこれらの交通量によ

^{*} 正会員 工修 名古屋工業大学講師 土木工学科

る総走行時間がある任意の値をとるような配分パターンに注目してみる。いまこの配分状態を車1台1台区別して見たとき、区別できる配分状態の数は、全体の交通量が多いときは非常にたくさん存在する。このように車1台1台区別して見た状態を微視的状态とよぶのであるが、いま車1台1台区別しないである任意の配分状態を考えたときの、その配分状態に対応する微視的状态の数を数えてみよう。このときこれらの微視的状态がすべて等確率で生起すると仮定すれば、微視的状态の数が最も多くなる配分状態が最も起こりやすいといえることができる。

以上の考え方に基づく確率最大化配分理論の定式化については、すでに発表した著者の論文²⁾の中で詳しく論じられているので、本文ではその結果だけを示すと、この配分理論による解は、次式を最小化することによって与えられることになる。

$$r \sum_i \sum_k y_i^k t_i^k - \left(- \sum_i \sum_k y_i^k \log y_i^k \right) \cdots \cdots (1)$$

ここに y_i^k は $i(i=1, 2, \dots, r)$ なる OD 交通量 X_i のうち、経路 $k(k=1, 2, \dots, s)$ を通る交通量、 t_i^k は i という OD ペア間の経路 k 上の走行時間、また r は経験的に与えられる定数で $0 \leq r < \infty$ の値をとる。 y_i^k については次式で与えられる制約条件がある。

$$\sum_k y_i^k = X_i \cdots \cdots (2)$$

したがって、問題は条件式(2)のもとで、式(1)を最小化すればよいことになり、これは数学的にはラグランジュの未定乗数法によって解ける。いま、 t_i^k が交通量に依存せず、各経路ごとに一定値を取ると仮定すれば、求める解は、

$$y_i^k = \frac{\exp(-r t_i^k)}{\sum_k \exp(-r t_i^k)} X_i \cdots \cdots (3)$$

で表わされることになる。上式から明らかなように、この配分モデルにおいては、OD 間のすべての指定経路に0でないOD交通量が配分される。この点において確率最大化配分法は、経路選択の一義性を前提とした、いわゆる決定論的立場に立つ最短経路配分や等時間原則配分と本質的に異なっている。

ところで、確率最大化配分法においては、定数 r が重要な役割を果たしている。すなわち、式(1)から明らかなように、 $r=0$ のとき目的関数の第1項が消え、第2項(これをトリップ配分エントロピーとよぶ)だけを最大化(前の符号が負のため)することになり、このときOD交通量は各経路に均等に配分され、総走行時間は最大値をとる。一方、 $r \rightarrow \infty$ のときは、第1項が第2項に比べて支配的となり、結局総走行時間を最小化する輸送計画的配分と一致する。すなわち、定数 r は対象とする交通量の総走行時間のサイズを決定する役割を果たし

ており、特に $r \rightarrow \infty$ のときは、総走行時間が最小値をとり、このときの配分パターンとしては総走行時間最小化配分しか起こりえないということである。なお、実際の配分問題に用いる r の値は、対象とする道路網において配分交通量の実績値が与えられておれば、その実績値との適合度が最大となるように最小二乗法によって決めるか、あるいは道路網上での総走行時間(または1台あたりの平均走行時間)の実績値が与えられる場合は、配分計算による走行時間が実績の走行時間の値に一致するような r を選べばよいであろう。

3. 走行時間関数を導入したとき

より実際に近い交通量配分を行おうとすれば、たとえば交通混雑による走行時間の増大(または走行速度の低下)の影響、あるいは道路容量に関する制約条件の導入が必要となる。ところで、交通量配分問題に容量制約の概念を導入する具体的方法として、本文では交通混雑による走行時間の増大の影響を、交通量—走行時間曲線(以下、走行時間関数とよぶ)の導入によって考慮する方法と、直接各道路区間の容量制限を不等式条件の形で与える方法の2つを考えてみることにした。前者の方法は、現実の交通現象にみられる交通量の増加による走行時間の増大の影響を、直接配分手法の中に組み入れたものであるから、現実の交通現象に近い配分を可能ならしめるといえ、したがって、リアルタイム的な交通現象を対象とした交通量配分に適した方法であるといえる。

さて、いま道路網の各道路区間(以下リンクとよぶ)ごとに走行時間関数を設定する。すなわち、対象とする道路網が l 本のリンクから構成されているとして、そのうちリンク $h(h=1, 2, \dots, l)$ 上の走行時間を、そのリンク上の交通量の関数として、一般に次のように表わしておく。

$$T_h(\sum_i \sum_k h \delta_i^k y_i^k) \cdots \cdots (4)$$

ここに $h \delta_i^k$ は i なる OD をもつ経路 k が、リンク h を含むとき1、含まないとき0の値をとる定数である。このとき当該道路網全体での総走行時間は、各リンクの「交通量×走行時間」の和として

$$\sum_i \sum_k \sum_h h \delta_i^k y_i^k T_h(\sum_i \sum_k h \delta_i^k y_i^k) \cdots \cdots (5)$$

のように表わせる。

よって、走行時間関数を導入したときの確率最大化配分法は、

$$r \sum_i \sum_k \sum_h h \delta_i^k y_i^k T_h(\sum_i \sum_k h \delta_i^k y_i^k) + \sum_i \sum_k y_i^k \log y_i^k \cdots \cdots (6)$$

を先に示したOD交通量に関する制約条件式(2)のもと

で最小化する問題として定式化される。この場合も先の場合と同様にラグランジュの未定乗数法によって解かれ、結局解として、

$$y_i^k = \frac{\exp\{-r \sum_h \delta_i^k (T_h + \sum_i \sum_k \delta_i^k y_i^k T_h')\}}{\sum_k \exp\{-r \sum_h \delta_i^k (T_h + \sum_i \sum_k \delta_i^k y_i^k T_h')\}} X_i \dots\dots\dots (7)$$

を得る。ただし、上式において、 T_h' は走行時間関数 T_h のリンク交通量に関する1階導関数である。しかしながら、走行時間関数を導入した確率最大化配分法においては、求める解 y_i^k を陽表的に求めることが困難となる。そこでリンク交通量を

$$\sum_i \delta_i^k y_i^k = Q_h \dots\dots\dots (8)$$

とおいたとき

$$F_h(Q_h) = T_h + Q_h T_h' = \frac{d}{dQ_h} \{Q_h T_h\} \dots\dots\dots (9)$$

で表わされる仮想的な走行時間関数 $F_h(h=1, 2, \dots, l)$ を導入すれば、先の式(7)は

$$y_i^k = \frac{\exp(-r \sum_h \delta_i^k F_h)}{\sum_k \exp(-r \sum_h \delta_i^k F_h)} X_i \dots\dots\dots (10)$$

となるので、上式を用い、次のような反復計算によって、走行時間を逐次修正しながら y_i^k を求める方法を提案する。

手順 1) r を仮定し、さらに式(9)で与えられる仮想的な走行時間関数 F_h において、リンク交通量が0のときの値(これを $F_h^{(1)}$ とおく)を用いて、式(10)より配分交通量 y_i^k を計算する。

手順 2) 各リンクごとに、所定のかりの走行時間関数によって新たなかりのリンク走行時間 $F_h^{*(1)}$ を求める。

手順 3) 2回目の反復計算に用いるかりのリンク走行時間 $F_h^{(2)}$ を次の修正式

$$F_h^{(2)} = \frac{m F_h^{(1)} + F_h^{*(1)}}{m+1} \dots\dots\dots (11)$$

によって求める。ただし、上式の m はこの収束計算を安定させるために導入される定数で、問題により適当に選ばれる。なお、 m の与え方については、後述の計算例の中であらためて検討する。

手順 4) 手順 1)に戻り、 $F_h^{(1)}$ の代わりに $F_h^{(2)}$ を用いて計算が繰返される。一般に n 回目($n=2, 3, \dots$)の反復計算に用いるかりのリンク走行時間 $F_h^{(n)}$ は、

$$F_h^{(n)} = \frac{m F_h^{(n-1)} + F_h^{*(n-1)}}{m+1} \dots\dots\dots (12)$$

によって与えられ、この反復計算は $F_h^{(n)}$ と $F_h^{(n+1)}$ が一致するまで続けられる。

手順 5) 最終的に得られたかりのリンク走行時間を用いて、配分交通量が求められる。また、そのときの真のリンク走行時間 T_h は、式(9)の関係から逆算すれば

図一1 配分対象道路網 (数字はリンクおよびノード番号)

よい。

以上のように走行時間関数を導入した確率最大化配分法は、リンクの走行時間を逐次修正することによって、解が求められるが、このとき解の存在とその唯一性が保証されていない。ところで、いま $0 \leq y_i^k \leq X_i$ ($i=1, 2, \dots, r, k=1, 2, \dots, s$) の範囲において、走行時間関数 T_h が微分可能で、かつその1階導関数、2階導関数がいずれも非負のとき、すなわち、走行時間関数 T_h が単調増加でかつ広義の凸関数ならば、先の目的関数(6)の2階導関数は非負となり、よって、目的関数が広義の凸関数となることが証明できる。よって、上述の条件を満足する走行時間関数を用いる限りにおいて、解がただ一つ存在することが保証される。

計算例

計算例として図一1に示すような道路網を対象とした配分問題を解いてみよう。道路網上のOD交通量は表一1のように与えられており、また、各ODごとに2本の経路を指定しておく。すなわち、 $s=2$ である。これらの経路をパス行列によって表わすと、次のとおりである。

第1経路		リンク								
経路		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	k_1^1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
	k_2^1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
	k_3^1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
	k_4^1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	k_5^1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	k_6^1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
	k_7^1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	k_8^1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	k_9^1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
k_{10}^1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	

.....(13)

表一1 配分対象 OD 交通量

(台/時)

①	②	③	④	⑤	⑥	
*	*	1700	400	700	1100	①
	*	*	800	1500	1300	②
		*	1200	*	1400	③
			*	*	900	④
				*	*	⑤
					*	⑥

表一2 非線形走行時間関数の係数

リンク番号	a_h	b_h	c_h
1	0.43×10^{-9}	1.03×10^{-3}	6.0
2	0.22	0.51	3.0
3	0.36	0.86	5.0
4	0.32	0.77	4.5
5	0.29	0.68	4.0
6	0.13	0.31	1.8
7	0.19	0.46	2.7
8	0.36	0.86	5.0
9	0.43	1.03	6.0

図一2 非線形走行時間関数を用いた確率最大化配分
-リンク交通量計算値

表一3 非線形走行時間関数を用いた確率最大化配分
 $r=0.5$ 配分交通量計算値

OD	第 1 経路		第 2 経路	
	配分交通量	経路走行時間	配分交通量	経路走行時間
① -- ③	1244台/時	18.32分	456台/時	21.06分
① -- ④	286	27.08	114	28.09
① -- ⑤	617	19.15	83	21.88
① -- ⑥	970	13.85	130	16.59
② -- ④	599	23.44	201	25.16
② -- ⑤	672	17.23	828	17.35
② -- ⑥	1300	11.94	0	20.87
③ -- ④	849	9.77	351	11.61
③ -- ⑥	1309	7.20	91	8.98
④ -- ⑥	785	13.22	115	16.97

第2経路

リンク

経路

$$\begin{bmatrix} k_1^2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ k_2^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_3^2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_4^2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_5^2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_6^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ k_7^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_8^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_9^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ k_{10}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここに、パス行列とは、 $i(i=1, 2, \dots, 10)$ なる OD をもつ経路 $k(k=1, 2)$ がリンク $h(h=1, 2, \dots, 9)$ を含むとき 1、含まないとき 0 の値をとる要素 k_{hi}^k からなる行列である。

次に走行時間関数としては、次式で与えられる関数形を考えてみる。

$$T_h = a_h(Q_h)^3 + b_h Q_h + c_h \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、

T_h : リンク $h(h=1, 2, \dots, 9)$ の走行時間(分)

Q_h : リンク h の交通量(台/時)

a_h, b_h, c_h : リンクの道路条件(延長, 幅員など)によって決まる定数

式(15)で与えられる曲線は、リンク交通量の増加とともに、走行時間が急激に増加するように設定された非

線形な曲線であり、この計算例では各リンクごとに係数 a_h, b_h, c_h を表一2のように仮定しておく。一方、 r はあらかじめ経験的に与えられるものであるが、この計算例においては $r=0.5$ と仮定する。以上の前提のもとで確率最大化配分法によって計算したリンク交通量および配分交通量をそれぞれ図一2および表一3に示す。

さて、走行時間関数を導入したときの解法において問題となるのは、逐次近似計算の中で用いられる定数 m の与え方である。すなわち、リンク交通量の増加とともに走行時間が比較的緩やかに増大するような走行時間関数を用いた場合は、 $m=1$ で十分収束し解が得られるが、リンク交通量の増加とともに走行時間が急激に増大するような非線形な走行時間関数を用いたとき、この反復計算が振動して収束しないことがある。しかし、このようなときは m の値をある程度大きくとって、走行時間の修正を徐々に行うようにすれば、計算は安定し解が得られる。ただし、反復回数は増加する。ただ、 m の与え方は、問題とする OD 交通量や道路網パターン、および r の値や仮定した走行時間関数などに影響されるので、いまのところ問題ごとに試行錯誤的に決定せざるをえない。ただ、この計算例において、 m の値と反復回数および計算時間の関係をみたところ、表一4に示すような結果が得られた。この結果によれば、反復回数の多い場合は1回当りの計算時間が比較的短く、一方、反復回数が少ない場合は逆に1回当りの計算時間が長くなる傾向がみられる。したがって、全体の計算時間としてみればそれほど大きな差がないようである。よって、問題は m の値をある値以下に小さくしたとき、反復計算が収束せず振動を繰返す恐れのある点である。したがって、これ

表一4 m と反復回数、計算時間との関係

m	反復回数(回)	CPU 計算時間(秒)	1回当りの計算時間(秒/回)
13	収束せず*	—	—
15	97	9.00	0.093
17	109	8.99	0.082
19	122	9.57	0.078
21	134	9.60	0.072

* 正確には反復回数が300回を越えるものをいう。

表一5 線形走行時間関数の係数

リンク番号	a_h	b_h
1	0.0030	6.0
2	0.0015	3.0
3	0.0025	5.0
4	0.00225	4.5
5	0.0020	4.0
6	0.0009	1.8
7	0.00135	2.7
8	0.0025	5.0
9	0.0030	6.0

を防ぐには、ある程度 m の値を大きくとって計算するほかない。ただし、計算プ

ログラムをくふうすることによって、反復計算の途中で m の値を変えることにより、収束計算を加速し計算時間を短縮することは可能である。

次に、式 (15) で与えられる非線形走行時間関数の代わりに、

$$T_h = a_h Q_h + b_h \dots\dots\dots (16)$$

で表わされる線形走行時間関数（ただし、 a_h, b_h の値は表一5 に示すとおりである）を用いたときの配分交通量計算結果を表一6 に示す。表一6 の結果で注目されることは、 $r=10$ のときの配分結果がほぼ総走行時間最小化配分パターンに近くなっていることである。すなわち、ほとんどの OD ペアで交通量が最短経路にのみ配分され、②—④、②—⑤および③—④の3つのODペアだけ2本の経路に交通量が配分されている。しかも、この3つのOD間では、第1経路と第2経路の走行時間が、 $r=0.5$ の場合に比べて非常に接近してきており、近似的に等時間原則配分パターンを示しているといえる。このように総走行時間最小化配分と等時間原則配分とは、総交通量がある程度多くなってくるとほぼ一致してくることは、すでに理論的に証明されている³⁾。

表一6 線形走行時間関数を用いた確率最大化配分交通量計算値

OD	$r=0.5$				$r=10.0$			
	第 1 経 路		第 2 経 路		第 1 経 路		第 2 経 路	
	配分交通量	経路走行時間	配分交通量	経路走行時間	配分交通量	経路走行時間	配分交通量	経路走行時間
① — ③	1454台/時	16.62分	246台/時	19.64分	1700台/時	17.02分	0台/時	19.40分
① — ④	311	26.16	89	27.77	400	25.71	0	28.48
① — ⑤	652	17.20	48	20.81	700	17.01	0	20.47
① — ⑥	1024	12.70	76	16.31	1100	12.60	0	16.06
② — ④	636	22.27	164	24.27	721	22.93	79	23.62
② — ⑤	741	15.31	759	15.48	824	14.92	676	15.21
② — ⑥	1295	10.81	5	18.06	1300	10.51	0	18.27
③ — ④	949	11.15	251	13.33	1101	11.47	99	12.44
③ — ⑥	1178	6.94	222	8.86	1400	6.80	0	8.16
④ — ⑥	858	13.46	42	18.09	900	13.11	0	18.27

制約条件

$$\sum_i \sum_h \delta_i^k y_i^k \leq c_h \dots\dots\dots (17)$$

および

$$\sum_k y_i^k = X_i \dots\dots\dots (18)$$

のもとで

$$\tau \sum_i \sum_k y_i^k t_i^k + \sum_i \sum_k y_i^k \log y_i^k \dots\dots\dots (19)$$

を最小化せよ。

ここに、 $\delta_i^k, y_i^k, X_i, t_i^k$ は前に定義したとおりであり、また、 c_h はリンク $h(h=1, 2, \dots, l)$ の交通容量である。すなわち、式 (17) は各リンクにおける容量制限を示す不等式条件を与える。

上記のように容量制限不等式を用いた確率最大化配分法は、等式および不等式条件付きの最小化問題として定式化され、しかも目的関数 (19) が非線形となるため、いわゆる非線形計画法の問題となることがわかる。現在非線形計画法に関する解法がいろいろ開発されているが、ここでは制約条件付きの最適化問題を制約条件なしの最適化問題に変換して解く、いわゆるペナルティ関数法の一種の SUMT 法を適用し、この非線形な配分問題の実用的求解法を検討してみる。特に確率最大化配分法はその目的関数自身が凸関数であることが証明でき、したがって解の存在とその唯一性が保証されるので、非線形計画法を適用するにはまことに好都合な条件を備えているといえる。

SUMT を交通量配分の問題に適用した例はすでにくつか存在するが^{4), 5), 6)}、SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) とは⁷⁾、制約条件付最小化問題を制約条件なしの最小化問題として解く方法で、これを上に定式化した容量制限不等式付きの確率最大化配分法に適用すれば、目的関数式 (19) は次のような関数形に変換される。

$$f(y, r_M) \equiv \tau \sum_i \sum_k y_i^k t_i^k + \sum_i \sum_k y_i^k \log y_i^k + (r_M)^{-1/2} \left(\sum_i \sum_k y_i^k - X_i \right)^2$$

4. 容量制限不等式を導入したとき

次に、容量制約を考慮するための方法として、直接道路網の各区間における容量制限を不等式条件として導入する場合について考えてみよう。この方法によれば、あらかじめ与えられた道路容量以上に交通量が配分されることはないが、この方法では容量一杯になるまでは、容量制約が交通の流れに全く影響をもたないことになり、交通量の増加とともに徐々にかつ連続的に容量制約の影響がみられる現実の交通現象を考えれば、いくらか非現実的であるといえる。

容量制限不等式を用いた確率最大化配分法は次のように定式化される。

$$+r_M \sum_h 1/(c_h - \sum_i \sum_k h \sigma_i^k y_i^k) \dots\dots\dots (20)$$

この変換を SUMT 変換とよび、元の制約条件付きの最小化問題の解を、制約条件のない最小化問題、すなわち、式 (20) の解の $r_M \rightarrow 0$ の極限値として求めるのが SUMT の基本的な考え方である。ここに $r_0 > r_1 > r_2 > \dots > r_M > r_{M+1} \dots > 0$ である。

SUMT 変換の意味するところは次のとおりである。すなわち、OD 交通量に関する等式条件が満足されず $\sum_k y_i^k - X_i \neq 0$ の場合は、 $r_M \rightarrow 0$ に対して $f(y, r_M)$ が無限大となり、目的に反することになるので、このようなことは実際には起こらず、安定した最小化の手続きが実行できるときは、 $r_M \rightarrow 0$ に対して等式条件がしだいに満足される。一方、容量制限に関する不等式条件についてみれば、解が制約集合の境界に近づくとき、やはり $f(y, r_M)$ が無限大となり、目的に反することになる。しかし、この場合においても、境界を侵すことなしに $f(y, r_M)$ の最小化が実行される。その結果 r_M の値が 0 に近づくにしたがって、 $f(y, r_M)$ の解が式 (19) の最小値に収束することが期待できるのである。したがって、上記の性質を満足する関数形であれば一般には何でもよいのであって、SUMT 変換は式 (20) に限定して考える必要はない。

さて、問題は解の収束性であるが、SUMT の収束定理によれば、目的関数、等式条件式、不等式条件式のいずれもが連続的に 2 回微分可能であり、かつ凸関数であることなどの条件のもとで、 $r_M \rightarrow 0$ のとき $f(y, r_M)$ の解が真の目的関数式 (19) の最小値の解に近づくことが証明されるので、よって解が唯一存在し、かつ収束計算によっていくらでもその解に接近できることが保証されることになる。

なお、SUMT 変換された新しい目的関数式 (20) において、不等式条件については、反復計算の各段階で得られたリンク交通量が、容量制限不等式を越えそうなリンクについてだけ考慮すればよく、その危険性の全くないリンクについては、その容量制限不等式条件を省くことが可能で、その分だけ計算量を軽減できる。また、式 (20) において、等式条件にかかる摂動パラメーター r_M と不等式条件にかかる摂動パラメーター r_M は同一としたが、これは必ずしもその必要はなく、問題のスケールによって、異なる摂動パラメーターを用いても差しつかえない。実際異なる摂動パラメーターを用いたほうが計算量が少なくなることさえある。

SUMT の計算は、具体的には次の手順によって行われる。

手順 1) 容量制限に関する不等式条件式 (17) を満足する初期値 $y^{(0)}$ を選ぶ。このとき等式条件式 (18) につ

いては考慮する必要がないので、初期値の選定は容易に行えるであろう。

手順 2) 最初の摂動パラメーター r_0 を選び、 $f(y, r_0)$ を最小にする $y(r_0)$ を求める。 $f(y, r_0)$ の最小化手法としては、後述の Fletcher-Powell 法を採用することにする。さて、 r_0 の選び方であるが、一般には目的関数の値に比べて条件式の項が過大となったり、あるいは逆に過小とならないよう適当に見当をつけて初期値を選べばよいが、 r_0 があまり大きすぎると、制約条件の項が不当に大きくなって、解が可能域の中に入ってしまう、計算回数が増え、一方あまり小さすぎると、解が可能境界付近にあって、求解が困難となることがある。いずれにしても、 r_0 の適当な選択法は問題のスケールリングに係属している。

手順 3) $0 < r_1 < r_0$ なる r_1 を定め、 $y(r_0)$ から始めて $f(y, r_1)$ を最小にする $y(r_1)$ を求める。

手順 4) 以上の計算を繰返す。なお、 $r_M (M=0, 1, 2, \dots)$ の減少には、一般に定率減少、すなわち $r_{M+1} = r_M/c$ ($c > 1$) が用いられる。

さて、 $f(y, r_M)$ の最小化の方法であるが、これは制約条件なしの最小化問題となるから、一般には傾斜法が適用できる。たとえば、1 階導関数を用いた最大傾斜法、2 階導関数を用いた Newton-Raphson 法などがあるが本文では共役方向を用いた傾斜法の 1 つである Fletcher-Powell 法⁹⁾を用いることにする。Fletcher-Powell 法は常に収束することが証明されており、これを先の SUMT 法と組み合わせて用いれば、いま問題としている容量制限不等式のある確率最大化法の解法として強力な武器となるであろう。

計 算 例

計算例として、先に示した走行時間関数を導入したときの計算例を、ここで再び取り上げることにする。計算の前提となる OD 交通量、指定経路は前と全く同様である。ただし、今回の場合は走行時間を一定とし、その値は式 (15) でリンク交通量を 0 と置いたときの走行時間を採用する。その代わり各リンクに容量制限が課せられ、リンク容量をすべて 3000 台/時と仮定する。次に配分交通量 y の初期値であるが、これは不等式条件を満足する点を選ぶ必要がある。このとき、等式条件については考慮する必要がないので、初期値としてある程度小さめの値を取っておけば、おのずと不等式条件を満足することになる。ここではすべての y_i^k の初期値として 100 を仮定する。次に摂動パラメーターの初期値 r_0 の値としては、問題のスケールから判断し $r_0=10^4$ を仮定し、また r_M の減少ステップとして、 $r_{M+1}=r_M/10$ なる定率減少を採用した。

以上の準備のもとで、 $r=0.5$ と与えられた場合の配

分計算を行ってみた。その結果配分交通量については表一7に、またリンク交通量については表一8に示すような解を得た。この計算においては、収束判定のための基準を相対誤差 0.5% 以下と仮定したが、この計算例では $r_5=0.1$ の段階で解が収束しており、そのシーケンスの回数は 6 回である。また、この収束解では、2 本の経路への配分交通量の和が OD 交通量に一致しており、最終的には等式条件が満足されていることがわかる。また、表一8 に得られたリンク交通量は、いずれも 3 000 台/時の容量制限以下に抑えられていることもわかる。

ところで、この配分計算では、最初不等式条件をすべてのリンクで省略して計算を始めたが、反復計算の途中でリンク 4 と 6 においてリンク交通量が容量を越えたので、結果的にはこの 2 つのリンクについてのみ容量制限不等式が導入されている。

容量制限不等式を用いた確率最大化配分法の解法として、SUMT 法を援用したときの問題点として、摂動パラメーター r_M およびその減少ステップ幅をいかに合理的に与えるかという点があげられる。表一9 は摂動パラメーターの初期値 r_0 を変化させて計算したときの(他の条件は全く同じとして) 解が収束するまでの r_M の減少シーケンス回数 (N)、SUMT 変換された目的関数をよぶ延回数 (M)、および計算時間 (CPU time) を比較したものである。この表の結果によれば、 r_0 と計算回数および計算時間との間には、それほど目立った傾向がみられない。ただ先に述べたように、 r_0 をあまり小さくすると、等式条件が強いきいて最小化を実行することが困難となることがある。一方、 r_0 を大きくとり過ぎると、逆に不等式条件の項が不当に重くなって、解が可能域の中に入ってしまうため、計算回数が非常に増えてしまうことになる。いずれにしても、 r_0 の値は問題のスケールに関係しており、本来の目的関数の値に比べて、条件式の項が過大または過小にならないよう問題ごとに決定すべきであると判断される。また、 r_0 の決定には y_i^k の初期値にも関係してこよう。また、すでに述べたように、等式条件にかかる摂動パラメーターと不等式条件に

表一7 容量制限不等式を用いた確率最大化配分—配分交通量計算値
 $\gamma=0.5$ 摂動パラメーターの初期値 $r_0=10^4$ 減少ステップ=1/10
(単位: 台/時)

関数呼出し回数	—	37回	12回	16回	14回	10回	9回
r_k の減少ステップ	初期値	$r_0=10^4$	$r_1=10^3$	$r_2=10^2$	$r_3=10$	$r_4=1$	$r_5=10^{-1}$
OD		100	1012	1111	1213	1241	1247
① — ③	$\begin{cases} y_1^1 \\ y_1^2 \end{cases}$	100 100	668 583	485 485	459 459	452 452	453 453
① — ④	$\begin{cases} y_2^1 \\ y_2^2 \end{cases}$	100 100	157 221	185 209	198 200	204 195	203 197
① — ⑤	$\begin{cases} y_3^1 \\ y_3^2 \end{cases}$	100 100	493 187	508 186	510 188	511 188	511 188
① — ⑥	$\begin{cases} y_4^1 \\ y_4^2 \end{cases}$	100 100	796 287	800 294	803 295	804 296	804 296
② — ④	$\begin{cases} y_5^1 \\ y_5^2 \end{cases}$	100 100	617 162	582 212	582 216	576 223	579 221
② — ⑤	$\begin{cases} y_6^1 \\ y_6^2 \end{cases}$	100 100	537 944	648 846	692 806	702 798	701 799
② — ⑥	$\begin{cases} y_7^1 \\ y_7^2 \end{cases}$	100 100	1188 95	1180 115	1156 142	1132 168	1129 171
③ — ④	$\begin{cases} y_8^1 \\ y_8^2 \end{cases}$	100 100	830 353	837 358	839 359	840 359	840 360
③ — ⑥	$\begin{cases} y_9^1 \\ y_9^2 \end{cases}$	100 100	1190 194	1060 335	983 416	955 445	952 448
④ — ⑥	$\begin{cases} y_{10}^1 \\ y_{10}^2 \end{cases}$	100 100	460 421	599 295	655 244	682 218	683 217
容量チェック			リンク 6 4	リンク 4		リンク 6 リンク 6	リンク 6

かかる摂動パラメーターは、必ずしも同じである必要はなく、計算プログラムの中でくふうすることにより、問題に応じて摂動パラメーターの値を変えてもよい。

次に、摂動パラメーター r_M を定率減少させた場合の減少ステップ幅 c についてみると、表一10 は $c=2, 5, 10, 15$ としたときの計算回数と計算時間を比較したものである。この結果によれば、 c を大きくとれば r_M の減

表一9 r_k の初期値と計算回数・計算時間の関係

	$\gamma=0.5$			$\gamma=0.1$		
	$r_0=10^4$	$r_0=10^3$	$r_0=10^2$	$r_0=10^2$	$r_0=10^3$	$r_0=10^4$
N (回)	6	7	7	7	9	9
M (回)	98	118	100	132	151	170
CPU Time (sec)	48.74	54.33	49.24	55.30	63.80	67.35

$N: r_k$ のシーケンス回数 M : 関数呼出し回数

表一10 r_k の減少ステップ幅と計算回数・計算時間の関係

	$c=2$	$c=5$	$c=10$	$c=15$
N (回)	11	6	6	5
M (回)	104	80	88	81
M/N	9.5	13.3	14.7	16.2
CPU Time (sec)	45.74	37.41	40.25	39.54

$N: r_k$ のシーケンス回数 M : 関数呼出し回数

表一8 容量制限不等式を用いた確率最大化配分—リンク交通量計算値

$\gamma=0.5$ 摂動パラメーターの初期値 $r_0=10^4$ 減少ステップ $1/10$ (単位: 台/時)

r_k の減少ステップ	関数呼出し回数	リンク 1	リンク 2	リンク 3	リンク 4	リンク 5	リンク 6	リンク 7	リンク 8	リンク 9	容量チェック
$r_0=10^4$	37 回	2 114	1 702	2 361	2 889	2 374	2 190	1 492	1 132	2 088	{ リンク 6 リンク 4 リンク 4
$r_1=10^3$	12	2 076	1 800	2 520	2 862	2 052	2 673	1 540	1 354	1 922	
$r_2=10^2$	16	1 996	1 896	2 548	2 943	1 853	2 875	1 581	1 428	1 864	
$r_3=10$	14	1 978	1 920	2 540	2 978	1 799	2 955	1 602	1 469	1 829	
$r_4=1$	10	1 971	1 929	2 535	2 993	1 792	2 956	1 606	1 467	1 833	リンク 6
$r_5=10^{-1}$	9	1 971	1 929	2 535	2 993	1 794	2 953	1 606	1 466	1 834	リンク 6

少シーケンス回数 (N) は減少するが、1 回のシーケンス当りの関数呼び出し回数 (M/N) が増えるので、結局計算時間としてみればそれほど大きな差がみられない。したがって、この計算例だけでは断定することはもちろんできないが、求解のための労力は c の選定とあまり関係がないように思われる。

容量制限不等式を用いた確率最大化配分法の解法としては、上記の SUMT のほか、目的関数の線形近似によって、線形計画法として解く方法も考えられる。特に確率最大化配分法の場合目的関数が変数分離型で与えられているので、線形近似するには好都合である。しかも目的関数が各変数について凸関数であることが証明されているので、最小解が唯一存在することが保証される。しかしながら、線形近似による方法は、変数の数が増えるため、特に大規模な配分問題には適用が困難となる。

5. リンクフローによる確率最大化配分法の定式化

前節まで取り扱われてきた確率最大化配分法は、いわゆるパスフローとして定式化されている。したがって、道路網上であらかじめ各 OD ごとに配分対象経路を何本か指定し、それぞれの経路に配分される交通量が変量として取り扱われる。このようにパスフローによる定式化によれば、OD 間の配分対象経路が限定できるため、扱う変数の数を少なくできる利点をもっているが、その反面配分計算に先立って各 OD 間に何本かの経路を指定するための経路探索という面倒な作業を必要とするし、さらに、指定する経路およびその本数によって、配分解が変化するという基本的な問題点を含んでいる。

ところで、パスフローによる確率最大化配分法においては、あらかじめ指定された経路に配分される交通量をもとに微視的状态というものが考えられたが、このときの経路に代わるものとして道路区間 (リンク) を取り、リンク上の車の分布状態をベースにした微視的状态というものを考えたとしても、配分理論自体としては本質的な違いはない。これはいわゆるリンクフローとしての確率最大化配分法ということであり、この場合は道路網に配分される各 OD 交通量がリンクごとに変量として取り扱われる。

表-11 容量制約の導入方法と計算時間

容量制約の導入方法	CPU 計算時間	備 考
走行時間関数を線形関数 導入したとき	6.50 秒	$m=3$
非線形関数	9.00	$m=15$
容量制限不等式を導入したとき	37.41	y_i^k の初期 = all 400 $r_0=10\,000$, 減少ステップ = 1/5
容量制約を考慮しないとき	0.64	

このとき問題は次のように定式化される。すなわち、いま道路網の各ノード (分岐点) に番号をつけ、リンクはその両端のノード番号によって表わすことにして、リンク i, j 上の走行時間を t_{ij} 、リンク ij の容量を c_{ij} 、 k なる OD のリンク ij に配分される交通量を y_{ij}^k 、 k なる OD の OD 交通量を X_k とする。このとき目的関数は、

$$r \sum_i \sum_j \sum_k t_{ij} y_{ij}^k + \sum_i \sum_j \sum_k y_{ij}^k \log y_{ij}^k \dots \dots (21)$$

となり、これを次の連続条件

$$\sum_j (y_{ij}^k - y_{ji}^k) = \begin{cases} X_k : i \text{ が交通発生ノードのとき} \\ -X_k : i \text{ が交通集中ノードのとき} \\ 0 : 0 \end{cases} \dots \dots (22)$$

容量制限条件

$$\sum_k y_{ij}^k \leq c_{ij} \dots \dots (23)$$

および非負条件

$$y_{ij}^k \geq 0 \dots \dots (24)$$

のもとで最小化する問題となる。

特に容量制限不等式の代わりに、リンク走行時間を走行時間関数で与えてもよい。いずれにしても問題は非線形計画法の問題となり、一般的解法としては、先に提案した SUMT 法と Fletcher-Powell 法がやはり有効であろう。

6. あとがき

本文で議論してきた容量制約のある確率最大化配分法は、あくまでも現実の交通量配分現象の正確な記述をめざしたものであるが、微視的状态というものに基礎を置いた最確配分パターンが、果たして現実実現しているのかどうかは全く別の問題であって、これはやはり実際の配分問題への適用を通して、その適合性を検討していかなければならず、この点に関しては今後の課題である。

ところで、本文では容量制約の考え方として、走行時間関数を導入する方法と容量制限不等式条件を導入する方法を提案したが、この両者を比較すれば、配分パターンの記述的モデルとしては前者のほうが現実的であり、また計算の労力からみても実用的であるといえる。表-11 は同一の配分問題に対して、走行時間関数を導入した場合と容量制限不等式条件を導入した場合の CPU 計算時間を比較したものである。

なお、交通量配分問題に共通した問題点として、走行時間関数の設定方法、交通容量の考え方、配分経路の指定、街路網を対象とするときのターンペナルティの与え方などがあげられ、これらの問題は本文で提案した確率最大化配分法の実用性と適合性に大きくかわりをもつきわめて重要な要素である。しかし、これら交通量配分

に付随した諸問題については本文では検討されておらず、したがって今後の研究課題としたい。

最後に、本論文の計算には名古屋大学大型計算機センターの FACOM 230-60 を使用したことを付記しておく。

参 考 文 献

- 1) 松井 寛：確率最大化による交通量配分理論，交通工学 Vol. 6, No. 5, pp. 3~11, 1971 年 9 月。
- 2) 前掲 1) に同じ
- 3) 井上博司：輸送計画的配分 および 等時間原則による配分に関する研究，土木学会第 25 回年次学術講演会講演概要集，第 4 部，pp. 113~114, 1970 年 11 月。
- 4) 森口繁一・伊理正夫・長谷 彰：多種流輸送問題の一つの逐次近似解法，1970 年度日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集 pp. 21~22, 1970 年 11 月。
- 5) 松井 寛：非線形な走行時間関数を用いた輸送計画的配分，第 10 回日本道路会議一般論文集，pp. 15~16, 1971 年 10 月。
- 6) 新手法による高速道路交通流の推計（第 2 章），日本 OR 学会報文シリーズ T-73-2, 1973。
- 7) Fiacco A.V. and McCormick G.P. : Nonlinear Programming-The Sequential Unconstrained Minimization Technique, Wiley, New York, 1968.
- 8) 志水清孝：システム制御と数値計画法，コロナ社，1971. (1973.12.1 受付)