流域水の挙動に関する変分原理の物理的意義

PHYSICAL SIGNIFICANCES OF THE VARIATIONAL PRINCIPLE
FOR THE BEHAVIOR OF BASINWIDE WATER

高 木 不 折*

By Fusetsu Takagi

1. ま え が き

流出現象は、流域内部におけるすべての流域水の挙動の一面としてわれわれの眼に触れている。すなわち、流域水全体としての水の動きの枠内で、河川水・地下水・湖沼水・土壌水など、それぞれの成分水が相互に関連しあいながら、それぞれの機構にしたがって運動し、その結果として流出現象が観察されるわけである。特に低水流出などでは、各成分水の干渉の仕方いかんで実際に起こる現象の性状が大きく左右される場合が少なくない。

以上の考え方を基礎として、筆者は地下水の流出現象に焦点を合わせて、河川水と地下水の干渉を含めた流域水全体としての挙動を変分形式に表現した。その詳細と、その応用例についてはすでに発表したが¹⁾、この論文では、その変分原理を一部修正するとともに、その物理的意義を明らかにしようとしたものである。

2. 従来の知見と問題点

本論に入るに先立って、まず前回の論文¹⁾で得られた知見を要約するとともに、残されていた問題点を指摘しておこう。

前回の論文で得られた結果は、

i) 地下水・河川水の挙動は、それらの干渉も含めて 1 つの変分形式に表現される。この変分形式は、河水・地下水の両者を合わせた流域水全体としての挙動を表現する。

ii) 実際の流域は、いくつかの力学系の一方向的な連なりから成るが、上の変分原理は個々の力学系内の水の挙動について成立する。

iii) この原理のもつ物理的意義は、流域水のもつエ

ネルギーと密接な関連にある。

iv) この手法の 1 つの応用例として、流出過程における地下水流出の低減特性の変化過程・平均化過程について論議した。その詳細は割愛するが、地下水流出のもつ力学的側面と統計的側面とを結びつける可能性を示した。

ところで、前回の論文においては、変分形式を導くにあたって、位置のポテンシャルのみを扱ったがために、導かれた local potential の物理的意義が十分には明らかでない欠点があった。

変分原理による表現は通常の河川水および地下水に関する微分方程式と数学的には同値である。実際の現象の表現として、このいずれがより本質的であるかという議論は別としても、変分形式による表現は、流域水全体としての動き、あるいはそこにおける河川水・地下水の果している役割を洞察するうえにも、さらには工学的諸問題に関する近似解を求めるという点でも有用な手段となりうる。しかし、以上のような問題に対しては、この手法が単なる手法としてではなく、物理的意義が明白であることが望まれることはいうまでもない。

3. 流域水の挙動の変分形式

流域水として河川水と地下水を取上げる。Fig. 1 に示した領域は、水の運動に対して 1 つの力学系を構成しているものとする。すなわち、この領域では、流域水が全体として挙動しており、その枠内で地下水・河川水が互に干渉しながら、それぞれの機構にしたがった運動をしているのである。

河川水・地下水の運動、干渉をも含めた流域水全体としての挙動は、

$$\delta \left[\int_C \int L_\theta dx_i dt + \int_S \int L_s ds dt \right] = 0 \dots\dots\dots (1)$$

あるいは

* 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学教室

$$-\left(kH_g^* \frac{\partial H_g^*}{\partial x_2} - f_2 H_g^*\right) \frac{dx_1}{ds} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

となる。式 (8) が地下水の流れに関する基礎方程式であり、式 (9) は地下水帯よりの横流入あるいは地下水帯への横流出を考慮した河川水の基礎方程式であることは周知のとおりである。すなわち、式 (1) ないし (2) はこの式 (8), (9) を合わせ表現しているわけである。式 (1) では式 (2) の汎関数をさらに任意の時間にわたって積分した形式になっているが、この差異については前論文でも触れたように本質的なものではない。両式がともに式 (8), (9) と同値であるという点では何の差異もないのである。

上の変分演算は H_g, H_s について考え、 H_g^*, H_s^* はなんら関与しなかった。このように 1 つの水理量、たとえば地下水深について H_g と H_g^* という 2 つの量を用いることは、局所平衡の原理^{2),3)} に基づくものであって、それを補助条件式 (5) が補っている。この点がエネルギー保存系についての通常の変分原理と異なる点であるが、「散逸系では本質的に成立しない変分原理」を散逸系に導入する大前提なのである³⁾。

4. 流出系におけるエネルギー損失

ある流体内部にとったコントロール・ボリュームでのエネルギー損失は次式で与えられる⁴⁾。

$$\begin{aligned} \text{energy loss} = & \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2g} \right) dV + \int \frac{1}{\rho g} \left[\frac{\rho v^2}{2} + p + \varrho \right] \\ & \cdot [u \cos(x, \nu) + v \cos(y, \nu) \\ & + w \cos(z, \nu)] d\sigma \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ただし、この節に限り、直角座標 x, y, z 系をとり、 (x, y) 平面を河床ないしは地下水帯不透水層に、 z 軸を (x, y) 平面に垂直上方に選んでいる。また、 x, y, z 方向の速度成分を u, v, w 、 $v^2 = u^2 + v^2 + w^2$ とし、 p は圧力、 ϱ はポテンシャルである。さらに、 $dV, d\sigma$ は対象としているコントロール・ボリュームの体積要素とその表面要素であり、 $\cos(x, \nu), \cos(y, \nu), \cos(z, \nu)$ は表面に外向きに立てた法線と x, y, z 軸とのなす方向余弦である。

Fig. 2

まず、河川において起こるエネルギー損失を評価しよう。一次元的な流れを想定し、水深を H_s 、河床と水平とのなす角を θ_s とする (Fig. 2 参照)。流れに対して静水圧分布を仮定するとともに

$$\frac{1}{\rho g} \left[\frac{\rho v^2}{2} + p + \varrho \right] = H_s \cos \theta_s + \varepsilon + z_0 \equiv a \dots\dots\dots (11)$$

と置こう。式 (10) の右辺第 2 項は体積積分に表わすことができる、河川単位長あたりのエネルギー損失 ΔE_s は

$$\begin{aligned} -\Delta E_s = & \iint \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dV + \iint \left[\frac{\partial (au)}{\partial x} + \frac{\partial (av)}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{\partial (aw)}{\partial z} \right] dV \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

によって与えられる。ただし、この積分は河川単位長あたりの河川水の占める体積について行うものとする。一次元の流れでは $v=0$ でよく、一定幅 B_s の河川を対象としているから、上の各項の積分は

$$\iint \left[\frac{\partial (au)}{\partial x} \right] dV = B_s \frac{\partial}{\partial x} \int a u dz - B_s \frac{\partial H_s}{\partial x} a_s u_s \dots\dots\dots (13)$$

$$\iint \left[\frac{\partial (aw)}{\partial z} \right] dV = B_s a_s w_s \dots\dots\dots (14)$$

となる。ここで、 a_s, u_s, w_s は自由水面における値を意味するが、平均流を扱う限りでは、 $u_s = u, a_s = a$ としとよい。ところで、自由水面の δt 時間内の変化を δH_s とすると

$$\frac{\delta H_s}{\delta t} = \frac{\partial H_s}{\partial t} + \frac{\partial H_s}{\partial x} \cdot u \dots\dots\dots (15)$$

であるが、河川単位長あたりの横流入流量 q (流入を正とする) のある場合には、自由水面での z 方向の流速 w_s は

$$w_s = \frac{\delta H_s}{\delta t} - \frac{q}{B_s} \dots\dots\dots (16)$$

となる。

したがって、エネルギー損失 ΔE_s は

$$\begin{aligned} -\Delta E_s = & \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2g} \right) dV + B_s \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{H_s} a u dz \right. \\ & \left. + a \frac{\partial H_s}{\partial t} - \frac{q \cdot a}{B_s} \right] \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

となる。さらに、 a, u の値が z 方向に変化しないことを考慮するとともに、実際の河川特に低水状態では、速度水頭の時間変化が非常に小さいことを考えれば、河川単位長あたりに起こるエネルギー損失は、結局

$$\begin{aligned} -\Delta E_s = & \frac{\partial}{\partial x} \{ (H_s + \varepsilon + z_0) \cdot Q_s \} \\ & + B_s (H_s + \varepsilon + z_0) \frac{\partial H_s}{\partial t} \\ & - q (H_s + \varepsilon + z_0) \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

と求められる。ただし、この式で Q_s は河川を流れる流

量，河床の水平となす角度 θ_s は小さく， $\theta_s \simeq 0$ としている。

次に，地下水帯でのエネルギー損失を評価するにあたっては，Darcy 流体に対して静水圧分布を仮定すれば，

$$- \Delta E_g = \int_0^{H_g} \frac{\partial(u(H_g+z_0))}{\partial x} + \frac{\partial(v(H_g+z_0))}{\partial y} + \frac{\partial(w(H_g+z_0))}{\partial z} dz \dots\dots\dots (19)$$

が得られる。ここで， ΔE_g は地下水帯単位面積，単位時間あたりに起こるエネルギー損失であり， u, v, w は filter velocity である。また，上式では不透水層と水平面のなす角度は小さいとしている。

この，右辺第 1, 2 項の積分は Dupuit-Forchheimer の仮定が成立するものとすれば，周知のとおり，

$$\int_0^{H_g} \frac{\partial u(H_g+z_0)}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{H_g} u(H_g+z_0) dz - \frac{\partial H_g}{\partial x} u(H_g+z_0) \dots\dots\dots (20)$$

$$\int_0^{H_g} \frac{\partial v(H_g+z_0)}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{H_g} v(H_g+z_0) dz - \frac{\partial H_g}{\partial y} v(H_g+z_0) \dots\dots\dots (21)$$

である。第 3 項の積分は

$$\int_0^{H_g} \frac{\partial w(H_g+z_0)}{\partial z} dz = [w(H_g+z_0)]_0^{H_g} = w_s \dots\dots\dots (22)$$

となるが，自由水面での z 方向の流速 w_s が

$$w_s = r \frac{\partial H_g}{\partial t} + \frac{\partial H_g}{\partial x} u + \frac{\partial H_g}{\partial y} v - r \dots\dots\dots (23)$$

で与えられることを念頭におくと同時に， (H_g+z_0) が z 方向で一定であることを考えると，地下水帯単位面積・単位時間あたりに起こるエネルギー損失 ΔE_g は，

$$- \Delta E_g \simeq r(H_g+z_0) \frac{\partial H_g}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[kH_g(H_g+z_0) \frac{\partial(H_g+z_0)}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[kH_g(H_g+z_0) \frac{\partial(H_g+z_0)}{\partial y} \right] - r(H_g+z_0) \dots\dots\dots (24)$$

となる。

以上のように，単位時間あたりの，河川単位長あるいは地下水帯単位面積あたりのエネルギー損失は，それぞれ式 (18)，(24) で与えられる。ただ，この節では現実の水深を H_s, H_g で表わし，* 印を付していないこと，ならびに座標の表示を x, y, z で表現したので，他の節の記号と一部異なっている。

5. local potential とエネルギー損失

式 (3)，(4) で与えられる local potential L_g, L_s はそれぞれ H_g, H_g^* および H_s, H_s^* ならびにそれらの場所あるいは時間に関する微分が含まれている。ところで，現実にかかる現象については，補助条件式 (5) があるから，その場合の local potential の値は L_g, L_s のうちの $H_g, \partial H_g / \partial x_i, H_s, \partial H_s / \partial s$ を $H_g^*, \partial H_g^* / \partial x_i, H_s^*, \partial H_s^* / \partial s$ で置き換えた値をとるはずである。いま，このような場合の local potential を L_g^*, L_s^* と * 印を付したもので表わすことにする。

$$L_g^* = L_g |_{H_g=H_g^*, \partial H_g / \partial x_i = \partial H_g^* / \partial x_i} \dots\dots\dots (25)$$

$$L_s^* = L_s |_{H_s=H_s^*, \partial H_s / \partial s = \partial H_s^* / \partial s} \dots\dots\dots (26)$$

一方，当然のことながら，現実にかかる水深 H_g^*, H_s^* に対しては，地下水および河川水についての基礎方程式 (8)，(9) が成立していなければならない。

また，地下水についての local potential の意義を考えるために，式 (3) の H_g をすべて H_g^* で置き換えた式 (25) より，式 (8) の両辺に $(1/2) \cdot (H_g^*+z_0)$ を乗じたものを減じたらうで整理すると次式が得られる。

$$L_g^* = \frac{1}{2} \left[r(H_g^*+z_0) \frac{\partial H_g^*}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left\{ kH_g^*(H_g^*+z_0) \frac{\partial(H_g^*+z_0)}{\partial x_i} \right\} - r(H_g^*+z_0) \right] + \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ kH_g^*(H_g^*+z_0) \frac{\partial(H_g^*+z_0)}{\partial x_i} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

上式右辺の [ ] 内の値は式 (24) と同一であって，地下水帯単位面積・単位時間あたりに起こるエネルギー損失 ΔE_g の符号を変えたものである。また，右辺第 2 項は流れの flux によって地下水帯単位面積あたり，単位時間あたりに持ち込まれるエネルギー（エネルギー，フラックスともいうべき量）に相当している。

同様に，河川水についても，式 (9) の両辺に $(2/3) \cdot (H_s^*+\varepsilon+z_0)$ を乗じ，これを式 (26) より減じると，式 (9) の右辺第 3 項と第 4 項の和が，河川単位長あたりの地下水帯よりの横流入量 q の符号を変えたものであることに注意すれば，結局 L_s^* は

$$L_s^* = \frac{1}{3} \left[B_s(H_s^*+\varepsilon+z_0) \frac{\partial H_s^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{B_s}{n} H_s^{*5/3} \left(-\frac{\partial(H_s^*+\varepsilon+z_0)}{\partial s} \right)^{1/2} \cdot (- (H_s^*+\varepsilon+z_0)) \right\} - q(H_s^*+\varepsilon+z_0) \right] - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{B_s}{n} H_s^{*5/3} \left(-\frac{\partial(H_s^*+\varepsilon+z_0)}{\partial s} \right)^{1/2} \cdot (H_s^*+\varepsilon+z_0) \right\} + q(H_s^*+\varepsilon+z_0) \dots\dots\dots (28)$$

と書かれる。前述の地下水の場合と同様に、式 (28) 右辺第 1 項の [ ] 内は、マニング則にしたがった平均流を扱っていることを考えれば、式 (18) と全く同じである。すなわち、河川単位長・単位時間あたりのエネルギー損失 ΔE_s の符号を変えたものに等しい。また、右辺の残りの項は、河川単位長に流れの flux によって持ち込まれるエネルギーに等しいことは明らかである。

以上の (27), (28) の両式はそれぞれ、単位時間あたりの地下水帯単位面積・河川単位長について

$$L_g^* = -\frac{1}{2} \Delta E_g + (\text{energy flux}) \dots\dots\dots (27)'$$

$$L_s^* = -\frac{1}{3} \Delta E_s + (\text{energy flux}) \dots\dots\dots (28)'$$

と表わされる。この式は L_g^*, L_s^* が実はエネルギー損失 (係数がかかっているが) とエネルギーの流れとの和であることを示していることに他ならない。ところで、local potential, すなわち式 (3), (4) の L_g, L_s は L_g^*, L_s^* と全く同じ構造をしている。したがって、 L_g, L_s も H_g, H_s の仮想変位に際して想定されるエネルギー損失とエネルギーの流れとの和を意味することがわかる。local potential については、一般に、

$$L = (\text{dissipative processes}) \\ - (\text{convection processes})^{3)}$$

あるいは

$$L = (\text{area contribution}) \\ + (\text{line contribution})^{5)}$$

の形式をとるといわれているが、上の式 (27)', (28)' がちょうどこれらと同じ構造をしていることは明らかであろう。なお、河川の流れに対して Chézy 則を用いた場合にも、 L_s^* は式 (28)' と全く同じになる。

式 (27)', (28)' で local potential の物理的意義は明らかにされたが、ここで注目すべきは、地下水と河川水についてエネルギー損失の係数 (式 (27)', (28)' の右辺第 1 項) が異なっていることである。これは、両者の流れの機構の差異、すなわち、地下水流では導水勾配に比例した流れが起こるのに対して、河川水では流速がエネルギー勾配の 1/2 乗に比例していること注 3) に起因する。実は、後述するように、この係数の差が、流域水全体としての挙動における地下水と河川水の果す役割の重みを表現するのである。

6. 汎関数の物理的意義

変分原理の物理的意義を考えるために、ここでは式 (2) の形式的汎関数を J と記そう。

$$J = \int_G L_g dx_i + \int_S L_s ds \dots\dots\dots (29)$$

また、 L_g, L_s が L_g^*, L_s^* の値をとった場合の J の値、すなわち J の停留値を J^* と記すことにする。

L_g^*, L_s^* のもつ物理的意義は前節で明らかにしたとおりであるから、式 (27), (28) を用いれば、

$$J^* = -\frac{1}{2} \int_G \Delta E_g dx_i - \frac{1}{3} \int_S \Delta E_s ds \\ + \oint \left[k H_g^* (H_g^* + z_0) \frac{\partial (H_g^* + z_0)}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_2}{ds} \right. \\ \left. - k H_g^* (H_g^* + z_0) \frac{\partial (H_g^* + z_0)}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_1}{ds} \right] ds \\ + \int q (H_s^* + \varepsilon + z_0) ds \\ + \left[\frac{B_s}{n} H_s^{*5/3} \left(-\frac{\partial (H_s^* + \varepsilon + z_0)}{\partial s} \right)^{1/2} \right. \\ \left. \cdot (H_s^* + \varepsilon + z_0) \right]_{\text{down stream end}}^{\text{upper stream end}} \dots\dots\dots (30)$$

となる。河川と地下水帯との接する境界で、いわゆる well loss がなく、 $\varepsilon \simeq 0$ であると考えれば、式 (30) の右辺第 3 項のうち河川に沿っての積分と、右辺第 4 項との和は 0 となり、

$$J^* = -\frac{1}{2} \int_G \Delta E_g dx_i - \frac{1}{3} \int_S \Delta E_s ds \\ + \int_C \left\{ k H_g^* (H_g^* + z_0) \frac{\partial (H_g^* + z_0)}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_2}{ds} \right. \\ \left. - k H_g^* (H_g^* + z_0) \frac{\partial (H_g^* + z_0)}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_1}{ds} \right\} ds \\ + \left[\frac{B_s}{n} H_s^{*5/3} \left(-\frac{\partial (H_s^* + \varepsilon + z_0)}{\partial s} \right)^{1/2} \right. \\ \left. \cdot (H_s^* + \varepsilon + z_0) \right]_{\text{down stream end}}^{\text{upper stream end}} \dots\dots\dots (31)$$

が得られる。ここで、右辺第 3 項の積分は、地下水の領域 G の周辺境界 C のうち、河川と接する境界を除いた境界 C' についての線積分を意味している。

さて、式 (31) を観察すれば容易にわかるように、右辺の第 1 項・第 2 項は 1 つの力学系内部 (地下水帯 G と河川 S) で単位時間あたりに起こるエネルギー損失を表現し、残りの項は、この力学系の周辺より流れによって単位時間あたりに系内に持ち込まれるエネルギーである。ただ、地下水帯と河川で起こるエネルギー損失は、系全体としての挙動には同じ貢献をするのではなく、その流動の機構・構造の違いによって、上記のように重みを別にしてしているのである。以上の様子を Fig. 3 に示す。

7. 変分原理と流域水の挙動

これまで、local potential L_g, L_s, L_g^*, L_s^* ないしは J^* について述べてきた。ここで議論を、式 (1) あ

注 3) いまかりに、速度がエネルギー勾配 (流れを駆動する力) の $1/n$ 乗に比例する流れが存在するものとすれば、上の係数は $1/(n+1)$ となる。

Fig. 3 Physical significance of the functional.

るいは式 (2) で与えられる変分原理に戻そう。(3), (4) 両式で与えられる local potential には H_g, H_g^*, H_s, H_s^* およびそれらの微分が含まれていた。式 (1), (2) の導入過程¹⁾ からわかるように, $H_g^*, H_s^*, \partial H_g^*/\partial t, \partial H_s^*/\partial t$ などの量は, 実は流水断面の幾何学的条件に起因するものである。一方, H_g, H_s などの量は, 流れのもつエネルギー, あるいは流れを起こす駆動力, すなわち, 流れの力学的状態に起因している。したがって, 式 (1) ないしは (2) で与えられる変分原理では, 流れの幾何学的状態を局所的に固定するという条件 (局所平衡の原理) のもとで, 流れの力学的状態を仮想変位させた場合の汎関数 J の停留性を問題としていることに相当する注 4)。

実際の力学系内での流域水の挙動は, 汎関数 J がその停留値 J^* を取るように挙動し, その結果として, 河川水が, 地下水が運動し, さらにこの両者が互に干渉していると考えることができる。前回の論文でも触れたとおり, 実際の流域はこのような力学系の一方向的な連鎖 (直列または並列の) であって, 上段の力学系から一方的な水の流入を受けると, それぞれの力学系内で, 流域水は上の変分原理にしたがって運動し, 次の力学系へと

流下しているわけである。このような過程を繰返ししながら, 流出現象, 特に地下水流出の特性は順次平均化・一様化されて下流に伝播されるのである。

従来, 低水流出現象は, lump system あるいはその連鎖として扱われてきたが, 上記の考察は, 流域内部で起こっている現象, すなわち個々の lump system の内容を考察し, 流出現象を正しく理解するうえで, また流域の抱え方を明らかにするうえで 1 つの指針ともなるであろう。

8. あとがき

本論文では, 流域水の挙動に関する変分原理の物理的解釈に焦点を絞って考察した。ここでの論議でも, いくつかの近似に頼った点もあって, なお十分なものではない。しかし, 流域水の全体としての挙動を洞察し, また, この手法を具体的な工学上の諸問題に応用するうえで, 一応の基礎を与えたものと考えている。

ところで, ここで考えた力学系としては, たとえば, 盆地や扇状地などがその典型であることは容易に推察されようが, 実際の複雑な流域にあって, この力学系がどの程度の領域に対応するかは難しい問題である。それは流出系のスケールと係わる問題でもあって, 実際の流域についての観測・解析を基礎にしなければ明らかにされえないであろう。今後この手法のより普遍化・応用化に努めると同時に, 力学系の抱え方についてもさらに検討を進めたいと考えている。

最後に, 本研究は, 昭和 48 年度試験研究 (文部省科学研究費補助金・代表者筆者) の一部であることを記し, 謝意を表する。

参考文献

- 1) Takagi, F.: A Study on the Behavior of Basin Water by means of the Variational Technique, Proc. JSCE, Vol. 185, Jan., 1971. pp. 71~81.
- 2) Fitts, D.D.: Non-Equilibrium Thermodynamics, McGraw-Hill Book Co., New York, 1962, Chapt. 3.
- 3) Prigogine, I.: Evolution Criteria, Variational Properties, and Fluctuations, "Non-Equilibrium Thermodynamics, Variational Techniques and Stability" ed. by Donnelly et al, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1966, pp. 3-16.
- 4) 岩佐義朗: 開水路流れの基礎理論, 水工学シリーズ 64-01, 土木学会水理委員会, 1964 年 7 月.
- 5) Schechter, R.S.: Variational Principles for Continuum Systems, "Non-Equilibrium Thermodynamics, Variational Techniques and Stability" ed. by Donnelly et al, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1966, pp. 55~69.

(1973.10.20・受付)

注 4) ここで扱っているのは J の仮想変位 $\delta H_g, \delta H_s$ に対する停留性であって, $\delta H_g^*, \delta H_s^*$ に対する J^* の停留性ではない。 J の停留値が J^* であって, その値は式 (31) で示される意味をもっているが, J^* の停留性は一般的には物理的意義をもたず, その特殊な場合として, 「すべての流れが消滅し, ただ水が静止の状態にある平衡状態」を含んでいるにすぎない。