土構造物の模型振動実験における相似則

ON THE SIMILITUDE IN MODEL VIBRATION TESTS OF
EARTH-STRUCTURES香 川 崇 章*
By Takaaki KAGAWA

1. はじめに

土構造物の振動性状，あるいは破壊性状を検討するとき，振動台による模型実験が行われることが多々ある．このような場合，模型の挙動から実物のそれが推定できるよう，これらの間に成り立つ可能な相似関係について考慮するのが常である．

このような相似則に対する考察は古くは Galilei にまで逆のぼるといわれるが²⁴⁾，土質力学の分野への適用は比較的新しい．適用例を挙げてみれば，ロック・フィル・ダムの模型振動実験^{3), 21)}，基礎の模型振動実験^{5), 10), 17)}，地下爆発のモデル化^{2), 9)}，地下構造物のモデル化²⁷⁾，などがある．また，わが国においてはさまざまな土構造物の模型振動実験がこれまで行われてきている．これらの研究においては，土を線形弾性体と仮定したり，あるいは土の破壊時の性状にのみ着目して相似則を立てる方法がとられているが，こうして決定された相似則は土構造物の非線形応答を調べるために行われる振動実験には直接用いることができない．

このような研究とは別に静的な場合についてではあるが，土に対する相似則の開発を行った Rocha の研究^{19), 20)}が注目される．彼は相似則を立てるために“模型に用いる材料は，実物のそれと同じ制約に従う相似な応力～ひずみ関係を有するものとするが，応力およびひずみはすべて $1/\alpha$ および $1/\beta$ に縮尺されている”という仮定を導入した．この仮定に基づいて土中の間隙水の移動がある場合，および，ない場合の相似則を確立したが，不飽和土の場合生ずる毛管引力の影響については考慮しなかった．こうして求められた相似則は，ひずみと長さの縮尺が異なっているため， $\beta=1$ の場合を除いて，模型内の変形が微小変形を仮定できないほど大きくなると適用不可能となる．Rocha によって示されたこの方法は，これらいくつかの欠点を有するが，有用な概念を含んでい

るものと考えられる．

土構造物に対する相似則を立てる別の方法は，2つの系（以下では模型と実物を意味する）での応力～ひずみ状態を等しくとるやり方である．この場合には模型において重力の加速度あるいは材料の質量密度を形状の縮尺に応じて変える必要が生じる．前者は遠心力を利用して模型内のみかけの重力の加速度を上げることにより達成可能であるが，後者は応力～ひずみ関係がまったく同じで質量密度のみ異なる材料を選択せねばならないという理由からほとんど不可能である．しかしながら，この方法のすぐれている点は相似則を立てるときに，その土の応力～ひずみ関係をくわしく検討する必要がないことであらう．

一般に実際の土が振動実験に用いられた場合，相似関係は成立しにくいものと考えられてきたので，振動実験の結果からこれに対応する実物の挙動を直接推定されたことはほとんどなく，振動台模型は単に“1つの小さな実物”として実物からは切離して考えられるのが普通であった．しかしながら，これは振動台の有意義な利用のためには大きな制限を加えるものである．

そこで，本報告ではせん断ひずみ振幅に関する土のせん断定数，および減衰定数の非線形性を考慮に入れ，土構造物の振動性状を検討するための模型振動実験に適用可能な相似則についての考察を行った．

2. 相似則の立て方

模型の中には，相似な形状を有する力学模型，特殊な条件のもとにモデル化される力学模型，形状的に相似でない模型，などいくつかあるものと考えられるが，ここでは形状が相似な模型についてのみ考えることにする．このような場合には2つの系はその形状が相似で，これら2つの系に含まれるすべての物理量の比が定められた縮尺に従うときに相似関係が成立する．すなわち，すべての物理量は π とよばれる独立な無次元量によって関係

* 正会員 Ph. D. McClelland Engineers, Inc.

づけられ、現象を取扱ううえで重要な物理量の数は大幅に減少することになる。これらの π によって、1つの系からこれに相似な系への現象の変換が可能となり、1つの系の挙動からもう1つの系のそれが簡単に求められることになる。このような意味で、相似則を立てることは、必要にしてかつ十分な無次元量を組立てることに帰着する。

(1) Buckingham の π 定理を直接用いる方法

この方法では第1に、現象に関係すると考えられる物理量をすべて列挙し、第2に Buckingham の π 定理¹⁾を用いて無次元量を組立て、そして第3にこれらの無次元量を2つの系で等しくとることにより相似則を立てるのである。

この方法は適用範囲が広く、一般によく用いられているが以下のような欠点を有している。

㊸ ある無次元量をどのような条件のもとに無視してよいか、また、どの無次元量が大切であるかの判断をする基準がない。

㊹ 組立てられた無次元量は最初に列挙された物理量いかんによって完全に決定されるし、また、物理量を列挙するための確固たる方法が定められていない。

㊺ 実際に必要な無次元量の数が π 定理より求めたそれより少なくなることがある。

そこで、Kline¹³⁾によって述べられた π 定理を用いる際の条件を参考として述べてみた。

① 列挙する物理量には、現象に関係する独立な物理量がすべて、そしてこれに従属な物理量が含まれていなければならない。

② 組立てられた無次元量の中にはどの物理量も少なくとも1回は含まれていなければならない。

③ 物理量を構成する次元量は互いに独立でなければならない。もしそうでないときは、このリダundancy (redundancy) を考慮する必要がある。

(2) 力の比を用いる方法

この方法は Fractional analysis に属し、19世紀に力学のさまざまな問題に適用された。どのような原因に基づく力も同じ次元を有しているので、これらの力の間の比をとることにより即座に無次元量が得られる。相似則を立てるためには、第1に現象に関係する重要な力を列挙し、第2にこれら力相互の比をとり独立な無次元量を求める。ここで無次元量の数は独立な力の数に等しくなる。そして、第3にこれらの無次元量を2つの系で等しくとる。

これに等価な方法としては、第1に現象に関係する重要な力を列挙する。第2に、それぞれの力について模型

と実物の比をとる。第3に、これらの比をすべて等しくとる。この方法では無次元量を明白には取扱う必要がなくなる。

この方法の基礎となっている仮定は、“もし、2つの系が形状的な、そして動力学的な相似を満足している場合には、これらの系の挙動は相似であって、この条件は形状が相似であり、2つの系の間でおもな力の比がすべて同一であれば満足される”である。したがって、もし力によらない物理量、たとえば熱伝導や電流を取扱う場合には上記の仮定は満足されず、この方法を適用することはできなくなる。このような理由で、この方法は多少一般性に欠けることからあまり用いられていないのであるが、力による物理量が支配的である問題に対しては有効であると考えられる。

(3) 支配方程式を用いる方法

現象を支配する方程式、およびその境界条件がわかっている場合にはさらに効率のよい相似則を立てることができる。すなわち、このような方程式は2つの系に対して同等に適用可能であって、これを無次元化することにより現象を支配する無次元量を抽出することができる。

相似則を得るためには、第1に支配方程式、および、これに対応する境界条件を無次元化することにより無次元量を組立て、第2にこれらの無次元量を2つの系で等しくとればよい。

この方法は、支配方程式が与えられた境界条件のもとに解くことが困難であり、これに対応する現象を実験的に調べたいとき、現象を左右する重要な無次元量を見つけるうえできわめて有効な方法であろうと思われる。

3. 土の応力～ひずみモデル

かりに2つの系において応力の状態が等しくとられた場合は、相似則を立てるうえで土の応力～ひずみの関係を直接考慮する必要はないが、そうでなければ相似則を立てる際にこの関係を導入しなければならない。そこで、これまでに提案された土の応力～ひずみ関係を近似的に表現するモデルについてここで簡単に述べることにした。

(1) Hyperbolic モデル

粘性土に対する三軸圧縮試験の結果得られた偏差応力と軸ひずみの関係を表現するために Kondner¹⁴⁾ が最初に提案した。後に Hardin-Drnevich¹⁵⁾ が、おもに共振法土質試験から得られたせん断定数、および減衰定数のせん断ひずみ振幅に関する関係を近似するためにこのモデルを改良した。

Fig. 1 Stress-Strain Relationship of Soil

このモデルでは、せん断応力 τ はせん断ひずみ振幅 r の関数として次式で近似されている。

$$\tau = G_{\max} \cdot r / (1 + r/r_y) \quad (1)$$

上式に含まれる諸量を Fig. 1 に定義した。このモデルは2つのパラメーターを含んでおり、これらによって応力～ひずみ関係が完全に決定される。また、このモデルには極限せん断抵抗として τ_y が存在する。すなわち、せん断ひずみ振幅が無限大のときにもこれに対応するせん断応力は τ_y を越えることはない。

また、減衰定数 β は応力～ひずみの描く履歴曲線によって表わされるエネルギー損失を考慮することにより以下のように求められた⁸⁾。

$$\beta = \beta_{\max} \cdot (r/r_y) / (1 + r/r_y) \quad (2)$$

ここに、 $\beta_{\max}$ はせん断ひずみ振幅が無限大のときの減衰定数である。

(2) 一般化された Ramberg-Osgood モデル

Ramberg-Osgood¹⁸⁾ によって最初に提案され、Jennings¹²⁾ によってさらに一般性を持たせるためにもう1つのパラメーターがつけ加えられた。

このモデルでは与えられたせん断応力からせん断ひずみ振幅を次式によって求める。

$$(r/r_y) = (\tau/\tau_y) + \alpha \cdot (\tau/\tau_y)^r \quad (3)$$

ここで、応力～ひずみ関係を近似するために4つのパラメーターが用いられている。 $r=1$ の場合には単なる線形の、そして $r=\infty$ の場合には弾塑性の応力～ひずみ関係を表わすことができる。

減衰定数 β を Jacobsen¹¹⁾ によって述べられた等価線形化法により求めれば、

$$\beta = \beta_{\max} \frac{1 - G/G_{\max}}{1 - (r-1)G/(2rG_{\max})};$$

$$\beta_{\max} = (r-1)/\pi r \quad (4)$$

となる。ただし、 $G/G_{\max}$ は次式より算定すればよい。

$$\frac{G}{G_{\max}} = \frac{1}{1 + \alpha(G \cdot r / G_{\max} \cdot r_y)^{r-1}} \quad (5)$$

このモデルは、Constantopoulos⁴⁾ や Papadakis¹⁶⁾ らによって地盤の地震応答解析に用いられたことがあるが、これまでおもに材料力学の分野で広く用いられてきたようである。

(3) Hardin-Drnevich モデル

Hardin-Drnevich⁹⁾ は Hyperbolic モデルを改良してこのモデルを提案した。彼らは、多くの粘性土および砂に対する共振法土質試験の結果求められたせん断定数、および減衰定数のせん断ひずみ振幅に関する関係を近似するためにこのモデルを用いた。

せん断応力 τ は次式で表わされている。

$$\tau = G_{\max} \cdot r / (1 + r/r_h) \quad (6)$$

ここに、 r_h は hyperbolic strain とよばれ、

$$r_h = \{1 + a \cdot \exp(-b \cdot r/r_y)\} r/r_y$$

で与えられている。 a および b は実験的に求められる土のパラメーターであって、このモデルは4つのパラメーターによってその応力～ひずみ関係を近似する。

また、減衰定数 β は次式で与えられている。

$$\beta = \beta_{\max} \cdot r_h / (1 + r_h) \quad (7)$$

$\beta_{\max}$ は非粘性土に対しては、おもにくり返し荷重の回数に、また、粘性土においてはこれに加えて荷重速度、および応力状態によって左右されるものと考えられている。

(4) Martin-Davidenkov モデル

このモデルは Martin¹⁵⁾ によって提案されたが、Seed-Idriss によって提案されたせん断定数、および減衰定数のせん断ひずみ振幅に対する関係²²⁾ をかなりよく近似することができる。

応力～ひずみ関係は次式で表わされている。

$$\tau = G_{\max} \cdot \{1 - H(r)\} \cdot r \quad (8)$$

ここに、 $H(r)$ は、

$$H(r) = \left\{ \frac{(r/r_y)^{2B}}{1 + (r/r_y)^{2B}} \right\}^A$$

と定義されており、このモデルには応力～ひずみ関係を近似するために4つのパラメーターが用いられている。 $A=1$, $B=1/2$ とおけば、このモデルは Hyperbolic モデルに帰着する。

また、減衰定数 β は次式により算定できる。

$$\beta = \beta_{\max} \frac{r^2 \cdot H(r) - 2 \int_0^r \eta \cdot H(\eta) \cdot d\eta}{r^2 - 2 \int_0^r \eta \cdot H(\eta) \cdot d\eta};$$

$$\beta_{\max} = \frac{2}{\pi} \quad (9)$$

(5) 一般的性質

上記のモデルがどの程度土のせん断定数、および減衰

表一 モデルに用いたパラメーターの値

Model Type	Values of Parameters		
Hyperbolic Model	$\tau_y = 3.16 \times 10^{-4}$		$\beta_{\max} = 22\%$
Ramberg-Osgood Model	$\tau_y = 3.16 \times 10^{-4}$	$\alpha = 2.5$ $r = 2$	
Hardin-Drnevich Model	$\tau_y = 3.16 \times 10^{-4}$	$a = -0.5$ $b = 0.16$	$\beta_{\max} = 27\%$
Martin-Davidenkov Model	$\tau_y = 3.16 \times 10^{-4}$	$A = 0.9$ $B = 0.413$	

定数のひずみ依存性を近似しうるかについて調べるために、各モデルで表一に示したパラメーターの値を用い、Seed-Idrissによって提案された砂に対するこれらの関係²³⁾とをFig. 2において比較した。これから上記のモデルはどれもかなり土のこれらの定数のひずみ依存性を近似し得ることがわかる。ここで、2つのパラメー

ターのみによって表わされる Hyperbolic モデルがかなりよい結果を与えることに注目したい。

ここでの目的は、このような土の応力～ひずみモデルを相似則を立てる上で用いることが適切であるかどうかを検討することにある。

この観点に立てば、上記のモデルは土のせん断定数、および減衰定数のひずみ依存性を近似するためにはまず十分であるといえそうである。

そこで、土の応力～ひずみの関係がこのようなモデルで近似できるものと仮定すれば、土のせん断定数、および減衰定数は一般に次のように表現することができる。

(a) Shear Modulus

(b) Damping Ratio

Fig. 2 Performance of Soil Models

Fig. 3 Stress States in Model and Prototype Soil Elements

$$G = G_{\max} \cdot F(\tau/\tau_y) \dots\dots\dots (10)$$

$$\beta = \beta_{\max} \cdot f(\tau/\tau_y) \dots\dots\dots (11)$$

ここで、これら定数のひずみ依存性に影響を与える環境要素は関数 F 、および f の中に含まれている。また、降伏せん断ひずみ振幅 r_y はせん断ひずみ振幅 r を正規化

するために用いられていて、関数 F および f をその形状を変えずに r 方向へ平行移動する役目を持っている。

ここで、Fig. 3 に示したような K_0 状態にある2つの土の要素を考えることにする。これらの要素はその有効鉛直応力 $\sigma_{v,1}$, $\sigma_{v,2}$ が λ 倍異なるだけで他の条件はすべて同一であるものとする。すなわち、 $\sigma_{v,1} = \lambda \cdot \sigma_{v,2}$ でこれらの要素のせん断抵抗 τ_y は初期応力状態のモールの応力円表示により、次のように表わすことができる。

$$\tau_{y,1} = \left\{ \left[\frac{(1+K_0)}{2} \sigma_{v,1} \cdot \sin \phi'_1 + c'_1 \cdot \cos \phi'_1 \right]^2 - \left[\frac{(1-K_0)}{2} \sigma_{v,1} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\tau_{y,2} = \left\{ \left[\frac{(1+K_0)}{2} \sigma_{v,2} \cdot \sin \phi'_2 + c'_2 \cdot \cos \phi'_2 \right]^2 - \left[\frac{(1-K_0)}{2} \sigma_{v,2} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

ここに、 K_0 は静止土圧係数で、 c' および ϕ' は有効応力表示による土の静的強度を表わすパラメーターである。いま、 K_0 は経験的に ϕ' のみの関数として表わされ、 ϕ' は鉛直応力が極度に高い場合を除けばこれに影響されないものとする。また、粘着力 c' は砂や正規圧密状態の粘土に対しては無視できるものとするれば、 $\tau_{y,1}$ と $\tau_{y,2}$ は次式で関係づけられることになる。

$$\tau_{y,1} = \lambda \cdot \tau_{y,2} \dots\dots\dots (12)$$

過圧密状態の粘土では先行圧密圧が2つの土の要素で λ 倍異なっていれば以上の関係が近似的に成立するものと思われる。

一方、最大せん断定数 $G_{\max}$ は有効平均主応力の平方根にほぼ比例することが知られているので、 $G_{\max,1}$ と $G_{\max,2}$ は、

$$G_{\max,1} = \sqrt{\lambda} \cdot G_{\max,2} \dots\dots\dots (13)$$

したがって、式 (12) および (13) から降伏せん断ひずみ $\tau_{y,1}$ 、および $\tau_{y,2}$ は、

$$\tau_{y,1} = \sqrt{\lambda} \cdot \tau_{y,2} \dots\dots\dots (14)$$

を満足することになる。

すなわち、“他の条件はすべて同一でその鉛直応力のみが λ 倍異なる K_0 状態にある2つ

(a) Shear Modulus

(b) Damping Ratio

Fig. 4 Validity of Eq. (15)

の土の要素があった場合に、これらに対する $G/G_{\max}$, および $\beta/\beta_{\max}$ の曲線を考え、同じ $G/G_{\max}$, および $\beta/\beta_{\max}$ の値を与えるせん断ひずみ振幅を r_1 , および r_2 とすれば、

$$r_1/r_2 = (\sigma_{v,1}/\sigma_{v,2})^{1/2} \dots\dots\dots(15)$$

となる”ことが以上の考察より予測できる。

そこで、以上の仮説が妥当なものであるかどうかを検証するために他の研究者によって得られた土の剛性および減衰定数について、実験時の条件がその鉛直応力のみ異なる場合について、同じ $G/G_{\max}$, および $\beta/\beta_{\max}$ の値を与えるせん断ひずみ振幅の比 r_1/r_2 を、対応する鉛直応力の比 $\sigma_{v,1}/\sigma_{v,2}$ に対して Fig. 4 (a), (b) に示した。式 (15) が厳密に成立するものとすれば、実験から求められた点は Fig. 4 の破線上に位置するはずであるが、実際にはかなりのばらつきが見られる。しかしながら、式 (15) で仮定した関係はかなりよく成り立っているものと考えてよいであろう。

4. 土構造物の模型振動実験における相似則

2. で述べたように Buckingham の π 定理を直接利用する方法からはあまりにも一般的な相似則が導びかれることになり、また、支配方程式を用いる方法では土の非線形性、および破壊状態までを記述する方程式を求めること自体が困難であると考えられるので、ここでは力の比を用いる方法によって土構造物の模型振動実験に適用可能な相似則を立てることにした。

土構造物の振動応答に影響を持っていると考えられる力は、慣性力、弾性変形に伴う力、内部摩擦減衰力、自重による力、そして土が破壊時に示す力などがあげられる。そこで、以下にそれぞれについて述べることにした。

(1) 慣性力

慣性力は質量 M , 振動数の平方 ω^2 , そして動的変位 y の積として表わされるので、2つの系におけるこれらの力の比 r_i は、

$$r_i = \frac{M_m}{M_p} \cdot \frac{\omega_m^2}{\omega_p^2} \cdot \frac{y_m}{y_p}$$

と表わされる。ここに、添字 m , および p はそれぞれ対応する物理量が模型、および実物に属するものであることを示している。ここで、質量密度 ρ , 動ひずみ ε , および2つの系の長さの比 $\lambda (=l_p/l_m)$ を導入すると、

$$r_i = \frac{\omega_m^2}{\omega_p^2} \cdot \frac{\rho_m}{\rho_p} \cdot \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_p} \cdot \frac{1}{\lambda^4} \dots\dots\dots(16)$$

となる。ただし、 $\varepsilon = y/l$ である。

(2) 弾性変形に伴う力

2つの系での弾性力の比 r_e は、動ひずみ ε , 弾性定

数 E , および弾性応力の作用する面積 A の比によって、

$$r_e = \frac{E_m}{E_p} \cdot \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_p} \cdot \frac{A_m}{A_p} = \frac{E_m}{E_p} \cdot \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_p} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \dots\dots(17)$$

と表わすことができる。

(3) 内部摩擦減衰力

土の内部摩擦減衰力は一般に非速度依存型と考えられているので^{6),7)}, 内部摩擦減衰力の比 r_{dp} は、減衰定数 β , 弾性定数 E , 動ひずみ ε , および弾性応力の作用する面積 A の比の積で与えられる。

$$\begin{aligned} r_{dp} &= \frac{\beta_m}{\beta_p} \cdot \frac{E_m}{E_p} \cdot \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_p} \cdot \frac{A_m}{A_p} \\ &= \frac{\beta_m}{\beta_p} \cdot \frac{E_m}{E_p} \cdot \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_p} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

(4) 自重による力

2つの系における自重による力の比 r_d は、質量密度 ρ , 重力の加速度 g , および体積 V の比の積により次のように与えられる。

$$r_d = \frac{\rho_m}{\rho_p} \cdot \frac{g_m}{g_p} \cdot \frac{V_m}{V_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \cdot \frac{g_m}{g_p} \cdot \frac{1}{\lambda^3} \dots\dots(19)$$

(5) 破壊時に示す力

かりに土のせん断抵抗 τ_f が次式のモール・クーロンの破壊基準に従うものとする。

$$\tau_f = c' + \sigma' \cdot \tan \phi'$$

ただし、 σ' は破壊面に作用する有効垂直応力である。以下では粘着力 c' および内部摩擦角 ϕ' による力の比を別々に考える。まず、粘着力による力の比 r_c は、粘着力 c' および破壊面の面積 A' の比の積で与えられる。

$$r_c = \frac{c'_m}{c'_p} \cdot \frac{A'_m}{A'_p} = \frac{c'_m}{c'_p} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \dots\dots\dots(20)$$

また、内部摩擦角による力の比 r_f は、

$$\begin{aligned} r_f &= \frac{\sigma'_m}{\sigma'_p} \cdot \frac{A'_m}{A'_p} \cdot \frac{\tan \phi'_m}{\tan \phi'_p} \\ &= \frac{\sigma'_m}{\sigma'_p} \cdot \frac{\tan \phi'_m}{\tan \phi'_p} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

で与えられる。

模型と実物を結びつける相似則は式 (16)~(21) で表わされる力の比を等しくおくことにより求められる。すなわち、次式が満足されればよい。

$$r_i = r_e = r_{dp} = r_d = r_c = r_f \dots\dots\dots(22)$$

ここで、応力に対する縮尺 α と、ひずみに対する縮尺 α' を導入することにする。

$$\sigma_p/\sigma_m = \alpha, \varepsilon_p/\varepsilon_m = \alpha' \dots\dots\dots(23)$$

土構造物模型に対する相似則を立てるときよく用いられる条件は $\alpha = \alpha' = 1$ であるので、まず最初にこの条件のもとにどんな相似則が導かれるかを検討してみよう。この場合、2つの系での応力〜ひずみ状態は等しく式 (16)

～(21) は次式に帰着する.

$$\left. \begin{aligned} r_i &= \frac{\omega_m^2}{\omega_p^2} \cdot \frac{\rho_m}{\rho_p} \cdot \frac{1}{\lambda^4}, r_d = \frac{\rho_m}{\rho_p} \cdot \frac{g_m}{g_p} \cdot \frac{1}{\lambda^3} \\ r_e &= r_d p = r_c = r_f = 1/\lambda^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ただし、2つの系で同じ応力状態なので、 $E_m = E_p$, $\beta_m = \beta_p$, $c_m' = c_p$, および $\phi_m' = \phi_p'$ が成立するものと考えた。したがって、相似則を得るための条件は、

$$\frac{\rho_m}{\rho_p} \cdot \frac{g_m}{g_p} = \lambda, \frac{\omega_m^2}{\omega_p^2} \cdot \frac{\rho_m}{\rho_p} = \lambda^2 \dots\dots\dots (25)$$

となり、以下に述べる2つの相似則が得られる。

a) 相似則-A

かりに、模型において実物と同じ材料が用いられたとすれば、 $\rho_m = \rho_p$ が満足されるので、式(25)から $g_m/g_p = \lambda$, および $\omega_m/\omega_p = \lambda$ なる条件が得られる。すなわち、この相似則では模型において実物と同じ質量密度を有する材料が用いられたときには模型における重力の加速度を λ 倍せねばならない。したがって、かりに $1/100$ の模型が製作されたとすれば、模型実験における重力の

加速度は $100g$ にまで増加することが必要となる。これは遠心力を利用してみかけの重力の加速度を増加させる実験方法をとることにより達成可能ではあるが、このような振動実験は現時点では少なくとも不可能であろう。この場合のおもな物理量の

表-2 相似則-A

	模型/実物
振動数	λ
質量密度	1
動的変位	$1/\lambda$
動ひずみ	1
応力	1
加速度	λ

縮尺を表-2に示した。

b) 相似則-B

次に、もし模型と実物において同じ重力の場が用いられたとすれば、 $g_m/g_p = 1$ が満足され、式(25)より $\rho_m/\rho_p = \lambda$, および $\omega_m/\omega_p = \sqrt{\lambda}$ なる関係が求められる。

この場合には模型において重力の加速度を変える必要はないが、模型に用いられる材料は実物のそれと同じ応力～ひずみ関係を有し、かつ、その質量密度だけ λ 倍でなければならない。この条件は相似則-Aにおいて強いられる条件よりさらに達成

表-3 相似則-B

	模型/実物
振動数	$\sqrt{\lambda}$
質量密度	λ
動的変位	$1/\lambda$
動ひずみ	1
応力	1
加速度	1

不可能であろう。表-3におもな物理量の縮尺を示した。

c) 相似則-C

以上2つの相似則は2つの系での応力～ひずみ状態が同一であるという条件のもとに導かれたが、これらは土構造物の模型振動実験に適用されるためにはどちらも同等に不適当であった。

いま、2つの系で同じ土が同じ条件のもとに用いら

れ、模型において重力の加速度がコントロールできないものとすれば次の条件はあらかじめ与えられていることになる。

$$\sigma_p/\sigma_m = \lambda (= \alpha) \dots\dots\dots (26)$$

したがって、相似則を得るためには土の応力～ひずみ関係を用いてひずみの縮尺 α' を決定するしかない。ここで、応力の比は式(10)を用いて、

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_m} = \frac{G_{\max, p}}{G_{\max, m}} \cdot \frac{F(\tau_p/\tau_{y, p})}{F(\tau_m/\tau_{y, m})} \cdot \frac{\tau_p}{\tau_m} = \lambda$$

と表わされ、さらに式(13)を用いることにより、上式はひずみに対する縮尺 α' を次のように与える。

$$\alpha' = \sqrt{\lambda} \dots\dots\dots (27)$$

したがって、式(16)～(21)の力の比は、

$$\left. \begin{aligned} r_i &= \frac{\omega_m^2}{\omega_p^2} \cdot \frac{1}{\lambda^4 \cdot \sqrt{\lambda}}, r_d p = \frac{\beta_m}{\beta_p} \cdot \frac{1}{\lambda^3} \\ r_e &= r_d [= r_c = r_f] = 1/\lambda^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

となる。ここで r_c と r_f をかっこに入れた理由は、

3.(5) で述べたように、非粘性土や正規圧密状態にある粘性土に対しては c' は無視することができ、 ϕ' は通常対象とする上載圧の範囲ではこれによらないものと考えると、 $r_f = 1/\lambda^3$ であって r_c について考える必要はないし、式(10)および(11)で表わされる土の応力～ひずみモデルが破壊状態までも成立するものとすれば r_c と r_f を別途ここで考える必要がないからである。

次に内部減衰力の比 r_{dp} であるが、式(11)を用いれば、

$$r_{dp} = \frac{\beta_{\max, m}}{\beta_{\max, p}} \cdot \frac{f(\tau_m/\tau_{y, m})}{f(\tau_p/\tau_{y, p})} = \frac{\beta_{\max, m}}{\beta_{\max, p}} \dots\dots\dots (29)$$

となる。 $\beta_{\max}$ は Hardin-Drnevich⁸⁾ によれば、飽和砂に対しては $\beta_{\max} = 28 - 1.5 \log N$, 飽和粘性土に対しては、 $\beta_{\max} = 31 - \log N - (3 + 0.048 \omega) \cdot (\sigma_m)^{0.5} + 0.60 (\omega)^{0.5}$ と与えられている。したがって、非粘性土に対してはくり返し荷重の回数 N によってのみ多少影響されるだけで、 $\beta_{\max, m} = \beta_{\max, p}$ がほぼ成立し、粘性土に対しては模型と実物の長さの縮尺が極度に大きくなり振動数 ω の相違が大きく影響しない範囲で $\beta_{\max, m} = \beta_{\max, p}$ はほぼ満足されるものとみてよい。

したがって、すべての力の比は円振動数 ω に関する縮尺を

$$\omega_m/\omega_p = \lambda^{3/4} \dots\dots\dots (30)$$

とすることにより満足される。この場合のおもな物理量の縮尺を表-4に示した。

表-4 相似則-C

ここで導いた相似則では、模型において実物と同じ土、および同じ重力の場が用いられたときに、すべての応力は $1/\lambda$ に、そしてすべてのひずみは $1/\sqrt{\lambda}$ に縮尺されることになり、この

	模型/実物
振動数	$\lambda^{3/4}$
質量密度	1
動的変位	$1/\lambda^{3/2}$
動ひずみ	$1/\lambda^{1/2}$
応力	$1/\lambda$
加速度	1

場合振動数は $\lambda^{3/4}$ 倍 となることがわかった。したがって、振動台による模型実験のように重力の加速度を変えることのできない場合にこの相似則が適用できることになる。この相似則においてはひずみの縮尺が長さの縮尺と異なっているが、土構造物模型の変形が微小であると仮定できるときにはこれは問題とならない。ただ、変形が極度に大きくなった場合には、ひずみと長さの縮尺が異なっている影響が現われ相似則を乱すことになるが、実物の土構造物の地震応答で考慮されるせん断ひずみ振幅の範囲が $10^{-2} \sim 10^{-1} \%$ 程度であることを考えると、このために模型内に生ずるひずみは $\lambda=100$ の場合、 $10^{-3} \sim 10^{-2} \%$ 程度であり、実物の土構造物で線形ひずみ振動が仮定できるならば模型においても同様であり、ひずみと長さの縮尺が2つの系で異なっていることは問題にならないものと思われる。

5. 結 論

本報告では土構造物の模型振動実験を実際の土を用いて行う場合に適用可能な新しい相似則について考えてみた。

これまで、土構造物の模型振動実験のための相似則を立てる場合、土が線形弾性体として扱えるものと仮定したり、また、その破壊性状にのみ着目するのがほとんどであった。そうでない場合には振動台模型は実物との相似関係から離れて“1つの小さな実物”として取扱われ、振動実験の結果は直接実物の挙動を推定するためには用いられず、実物で起こるであろう現象を定性的に再現するため、あるいは、設計計算に用いる解析手法の妥当性を検証するためにのみ用いられてきたようである。

本報告における相似則では模型振動実験において実物と同じ土を用いることができ、かつ、その重力の加速度を変える必要もない。応力の縮尺は、模型で実物と同じ土を用いるという条件、および、模型において重力の加速度を変えないという条件から長さの縮尺に等しくすずに固定されたものと考え、ひずみの縮尺を土のせん断ひずみ振幅による非線形関係を用いて決定した。こうして得られた相似則は、土構造物の振動台による模型実験、地盤～構造物系の模型振動実験などに適用可能であり、振動台実験によってこれら実物の非線形応答を直接推定する方法を確立するために役立つものと考えられる。

6. おわりに

本報告は、筆者がカリフォルニア大学で行った Ph. D. 研究の一部であり、研究の遂行に助力してくださった Lysmer 教授、および Seed 教授に記してここに厚

くお礼を申し述べる次第である。

参 考 文 献

- 1) Buckingham, E. : On physically similar systems, Phys. Rev. No. 4, 1914.
- 2) Chabai, J. : On scaling dimensions of craters produced by buried explosives, J. Geophysical Research, Vol. 70, 1965.
- 3) Clough, R.W. and D. Pirtz : Earthquake resistance of rock-fill dams, Trans. Am. Soc. Civ. Eng. Vol. 123, 1958.
- 4) Constantopoulos, I.V., J.M. Roesset, and J.T. Christian : A comparison of linear and exact nonlinear analyses of soil amplification, Proc. 5th World Conf. Earthquake Eng., Rome, 1973.
- 5) Hadala, P.F. : Dynamic bearing capacity of soils, investigation of a dimensionless load-displacement relation for footings on clay, Waterways Experiment Station Technical Report 3-599, Vicksburg, Miss., June, 1965.
- 6) Hardin, B.O. and W.L. Black : Sand stiffness under various triaxial stresses, J. Soil Mech. Fdns. Div., ASCE, Vol. 92, No. SM 2, Mar., 1966.
- 7) Hardin, B.O. and W.L. Black : Closure to Vibration modulus of normally consolidated clays, J. Soil Mech. Fdns. Div., ASCE, Vol. 95, No. SM 6, Nov., 1969.
- 8) Hardin, B.O. and V.P., Drnevich : Shear modulus and damping in soils; Design equations and curves, J. Soil Mech. Fdns. Div., ASCE, Vol. 98, No. SM 7, July, 1972.
- 9) Haskell, N.A. : Some consideration on the modeling of crater phenomena in earth, Air Force Surv. Geophys., Vol. 67, TN 55-205, Air Force Cambridge Research Center, Bedford, Mass., 1955.
- 10) Jackson, J.G. and P.F. Hadala : Dynamic bearing capacity of soils, Report 3, the application of similitude to small-scale footing tests, Waterways Experiment Station Technical Report No. 3-599, Vicksburg, Miss., Dec., 1964.
- 11) Jacobsen, L.S. : Damping in composite structures, Proc. 2nd World Conf. Earthquake Eng., Tokyo, 1960.
- 12) Jennings, P.C. : Periodic response of a general yielding structure, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 90, No. EM 2, April, 1964.
- 13) Kline, S.J. : Similitude and Apporoximation Theory, McGraw-Hill Book Co., 1965.
- 14) Kondner, R.L. : Hyperbolic stress-strain response; cohesive soils, J. Soil Mech. Fdns. Div., ASCE, Vol. 89, No. SM 1, Feb., 1963.
- 15) Martin, P.P. : Non-linear methods for dynamic analysis of ground response, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, June, 1975.
- 16) Papadakis, C. N., V. L. Streeter and E. B. Wylie : Bedrock motions computed from surface seismograms, J. Geotech. Eng. Div., ASCE, Vol. 100, No. GT 10, Oct., 1974.
- 17) Poplin, J.K. : A model study of dynamically loaded square footings on dry sand, Waterways Experiment Station Technical Report 69-3, Vicksburg, Miss., March, 1969.
- 18) Ramberg, W. and W.R. Osgood : Description of stress-strain curves by three parameters, Technical Note 902, NACA, July, 1943.

- 19) Rocha, M. : Similarity conditions in model studies of soil mechanics problems, Laboratoria Nacional de Engenharia Civil, Lisbon Publ. No. 35, 1953.
- 20) Rocha, M. : The possibility of solving soil mechanics problems by the use of models, Proc. 4th Int. Conf. Soil Mech., London, Vol. 1, 1957.
- 21) Seed, H.B. and R.W. Clough : Earthquake resistance of sloping core dams., J. Soil Mech Fdns. Div., ASCE, Vol. 89, 1963.
- 22) Seed, H.B. and I.M. Idriss : Soil moduli and damping factors for dynamic response analysis, Report No. EERC 70-10, Earthquake Eng. Research Center, University of California, Berkeley, Dec. 1970.
- 23) Silver, M. L. and H. B. Seed : The behavior of sands under seismic loading conditions, Report No. EERC 69-16, Earthquake Eng. Research Center, University of California, Berkeley, Dec., 1969.
- 24) Sommerfeld, A. : Mechanik der Deformierbaren Medien, 4th ed., Akad. Verlagses, Leipzig, 1957.
- 25) 龍岡文夫 : 利根川砂の動的変形係数, 1975 年 2 月 20 日.
- 26) Weissman, G.F. and R.R. Hart : The damping capacity of some granular soils, Symposium on capital Dynamics, ASTM Special Technical Publication, No. 305, June, 1961.
- 27) Young, D.F. and G. Murphy : Dynamic similitude of underground structures, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 90, No. SM 3, June, 1964.

(1977.4.18・受付)