円柱群による波の回折に関する研究

A STUDY OF WAVE DIFFRACTION ON MULTIPLE CYLINDERS

梅田 眞三郎*・篁 源 亮**

By Shinzaburo UMEDA and Motoaki YANO

1. ま え が き

近年、沿岸海域の埋立や海洋開発等によって円島堤や複数の大型円柱構造物が造られるようになった。この場合、円柱径が波長に比較し得る大きさになると、円柱による波の変形の影響や円柱間の相互干渉等を考慮する必要があるが生じている。従来、この種の問題の取扱いとしては、ポテンシャル理論によるのが主であり、その境界条件として線形、非線形を用いたものの2つがある。たとえば前者に関しては、円柱または円島堤による波の回折を取り扱った MacCamy・Fuchs¹⁾ や田中²⁾ の研究などがあり、楕円柱構造物による波の反射および回折を取り上げた合田・吉村・伊藤³⁾ の研究がある。それらは、回折係数がそれぞれ Bessel 関数や Mathieu 関数の級数で表わされることを示している。また任意形状の島堤による波の回折については、井島・周・湯村⁴⁾ による Green 関数を導入した Helmholtz 方程式の解を求める方法による研究がある⁵⁾。一方、波の非線形性を回折理論に導入した研究には、入射波を有限振幅波理論である Stokes 波の第5次近似解で表示した Chakrabarti⁶⁾ によるものや、せつ動法によって非線形波の回折を第2次近似まで求めて、大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線形性の影響を究明した山口・土屋⁷⁾ のものがある。

これらの線形および非線形波の回折理論を適用した研究は、いずれも単一の円柱構造物によるものである。それに対して大楠⁸⁾ は、複数本の円柱に働く波力を円柱間の相互干渉をも考慮してポテンシャル理論によって求めた。ポテンシャルの算定にあたっては、おのおのの反射波が異なった中心座標で表わされているので、ポテンシャル関数に Bessel coordinate transformation (以下加

法定理と称す) を適用することによって中心座標の変換を行っている。同様に、Spring・Monkmeyer⁹⁾ は、加法定理を適用してポテンシャル関数を求め、2本の円柱による波の相互干渉を調べた。そのポテンシャルを求めるにあたっての境界条件を適用する際に反射項の未知の係数を逆マトリックスの形で導いている。その他、楳木・中村¹⁰⁾ は、回折理論と比べ解析的に容易である鏡像法によって複数円柱の波力および抗力項の干渉効果を明らかにした。また Massel¹¹⁾ は、複素関数の Laurent 級数展開を応用し、任意方向の入射波に対する円柱列の相互干渉や波力を検討した。

以上の研究のうち単一円柱構造物の場合には、その研究目的から理論における波の取扱いが非線形にまで拡大されているけれども、複数本の場合には、それらの研究は非線形波の回折理論の複雑さからいづれも線形のポテンシャル理論が適用され、しかも波長に対して円柱径が比較的小さなものを対象とした研究がほとんどである。波長に対する円柱径の比が大きくなると、線形波の回折理論での加法定理を適用して導いたポテンシャルの算定において、特異点の存在や Bessel 関数の性質から解の収束性が悪くなる¹²⁾。このため正しい解を得ることが非常に難しい。

本研究では、円柱群による波の回折に関して波長に対する円柱径の比が大きい場合の2本の大型円柱構造物による波の回折問題に、線形波の回折理論を適用し厳密に級数解を求め、この厳密解を用いて円柱径の違いによる波の変形や相互干渉を明確にする。この2本の級数解を従来の解と比較するとともに、円柱が3本以上の複数本の場合の解を2本の級数解と同様にして比較的簡単に導けることを明らかにした。さらにこれらの解析結果は、超音波を用いた回折実験により検証を行った。

* 正会員 工修 福山大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 Ph. D. 神戸大学教授 工学部土木工学科

2. 理論級数解

円柱が水底にまで達している場合の2本の円柱への入・反射波を以下のようなポテンシャル理論で考える。

図-1 円柱への波の入射方向と座標系

図-1 に示すような横2列に並ぶ円柱に進行波 $\zeta_0 e^{i(kx + \omega t)}$ が入射した場合の円柱まわりのポテンシャルを同図の座標系に従って求める。ただし、 z を水深方向の上向きを正とする座標軸とし、水深を d 、円柱の半径を r_0 、2本の円柱 Γ_A と Γ_B の中心間の距離を p とする。以下の文章では円柱の半

径を円柱径、円柱の中心間隔を円柱間隔として用いる。

また $k \tanh kd = \omega^2/g$ である。

入射波の速度ポテンシャルを

$$\phi_0 = i\omega \zeta_0 \frac{\cosh k(d+z)}{k \sinh kd} e^{i(kx + \omega t)} \dots \dots \dots (1)$$

とし、2本の円柱からの反射波のポテンシャルを

$$\phi = i\omega \zeta_0 \phi(x, y) \frac{\cosh k(d+z)}{k \sinh kd} e^{i\omega t} \dots \dots \dots (2)$$

とする。ここで ϕ は、すでに線形の自由表面条件、水底の条件を満たしており、さらにここでは連続の条件および円柱 Γ_A 、 Γ_B 上での条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial N} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial N} \dots \dots \dots (3)$$

を満足するような ϕ を求めなければならない。式(3)において N は、円柱の表面の法線方向を示す。

円柱に入射する波のポテンシャル e^{ikx} を各円柱 Γ_A 、 Γ_B の中心をそれぞれ原点とする円柱座標で表わし、そのポテンシャルを ϕ_0^A 、 ϕ_0^B とおけば、

$$\begin{aligned} \phi_0^A &= e^{ikr_1 \cos \theta_1} = e^{iR_1 \cos \theta_1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_1) e^{in\theta_1} \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_0^B &= e^{ikr_2 \cos \theta_2} = e^{iR_2 \cos \theta_2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_2) e^{in\theta_2} \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

となる。ただし $J_n(R)$ は、 n 次の第1種 Bessel 関数である。

いま、 ϕ_0^A が円柱 Γ_A に入射したときの反射波を ϕ_1^A 、 ϕ_1^B が円柱 Γ_B に入射したときの反射波を ϕ_2^B と

し、順次入・反射波を考えていく。同様に、 ϕ_0^B が円柱 Γ_B に入射してから入・反射波を考えると、円柱 Γ_A 、 Γ_B における入・反射波のポテンシャルは、まず ϕ_1 、 ϕ_2 に対しては

$$\phi_1 = \phi_0^A + \phi_1^A \dots \dots \dots (6)$$

$$\phi_2 = \phi_0^B + \phi_1^B \dots \dots \dots (7)$$

で、それ以後は

$$\phi_{2j-1} = \phi_{j-1}^B + \phi_j^A \dots \dots \dots (8)$$

$$\phi_{2j} = \phi_{j-1}^A + \phi_j^B \dots \dots \dots (9)$$

とおくことができる。ここで式(6)から式(9)において Γ_A 、 Γ_B における境界条件を満足するように入射波に対する反射波を順次求めていき、それぞれの入・反射波を表わす級数が収束すれば、求める速度ポテンシャル ϕ はポテンシャルの重ね合わせにより、

$$\phi = \sum_{j=1}^{\infty} (\phi_{2j-1} + \phi_{2j})/2 \dots \dots \dots (10)$$

で与えられる。

そこで具体的に式(6)から式(9)で示されるポテンシャルを求めてみる。たとえば ϕ_1 に関しては、入・反射波をそれぞれ微小振幅進行波と円柱からの第1反射波とすると、

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_0^A + \phi_1^A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_1) e^{in\theta_1} \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n H_n^{(2)}(R_1) e^{in\theta_1} \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

で表わされる。ここに $H_n^{(2)}(R)$ は、第2種の Hankel 関数で、以後右肩の(2)を省略して $H_n(R)$ として表わす。ここで境界条件 $[\partial \phi_1 / \partial R_1]_{R_1=R_0}=0$ より反射項の係数 α_n を求め、 ϕ_1 を導くと、

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_1) e^{in\theta_1} \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i^n) \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_1) e^{in\theta_1} \\ &\dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

となる。ここに $R_0 = kr_0$ である。同様にして ϕ_2 を導くと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \phi_0^B + \phi_1^B = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_2) e^{in\theta_2} \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i^n) \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_2) e^{in\theta_2} \\ &\dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

次に ϕ_3 と ϕ_4 については、

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \phi_1^B + \phi_2^A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i^n) \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_2) e^{in\theta_2} \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n H_n(R_1) e^{in\theta_1} \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_4 &= \phi_1^A + \phi_2^B = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i^n) \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_1) e^{in\theta_1} \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n H_n(R_2) e^{in\theta_2} \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

の形となって、 ϕ_3 と ϕ_4 ともに入・反射項で R_1, R_2 の異なった独立変数を有した形となっている。さらに $\phi_5, \phi_6, \dots$ も ϕ_3 と ϕ_4 と同様な形となる。

これらの ϕ に関して、 ϕ_1 と ϕ_2 と同様に境界条件を適用すれば反射項の未知の係数 α_n を求めることができる。ところが ϕ_1 と ϕ_2 の場合と違って ϕ_3 以下は、それぞれの入・反射項で R_1, R_2 の異なった独立変数を有しているので、境界条件を適用する場合には注意する必要がある。

ここで α_n を決める方法としては、ポテンシャル ϕ をまず加法定理を用い、中心座標変換により変数を減少してから境界条件を適用する方法がある。この方法によると境界条件の適用にあたっては簡単となるが、加法定理を適用した場合特異点の存在やポテンシャルが二重の級数で表わされるため、円柱径が大きい場合や円柱径と円柱間隔との関係によっては、実際に解を求めていくと級数の収束性が悪い¹²⁾。そこで、ここではポテンシャル ϕ をなんら変形せず、そのまま境界条件を適用することにより係数 α_n を求めた。このようにして各ポテンシャル ϕ の級数解の和として式 (10) より理論級数解を導く。

たとえば式 (14) で示される ϕ_3 に関して、 R_1 で偏微分を行うと次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_3}{\partial R_1} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(-i)^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} \cdot \frac{\partial}{\partial R_1} \{H_n(R_2) e^{in\theta_1}\} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_n H_n'(R_1) e^{in\theta_1} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(-i)^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} \left\{ H_n'(R_2) e^{in\theta_1} \frac{\partial R_2}{\partial R_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + in H_n(R_2) e^{in\theta_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial R_1} \right\} + \alpha_n H_n'(R_1) e^{in\theta_1} \right] \\ &\quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここで円柱での境界条件 $[\partial \phi_3 / \partial R_1]_{R_1=R_0}=0$ を適用すれば、係数 α_n が決定され ϕ_3 が導かれる。同様にして ϕ_4 を導くことができる。それぞれの式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-i)^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_2) e^{in\theta_1} \right. \\ &\quad + \beta_{1,n} i^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} \cdot \frac{H_n(R_1)}{H_n'(R_0)} \\ &\quad \cdot \frac{R_0 - R_p \cos \alpha_1}{R_3} H_n'(R_3) e^{in\theta_1} \left. \right\} \dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_4 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-i)^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_1) e^{in\theta_1} \right. \\ &\quad + \beta_{2,n} i^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} \cdot \frac{H_n(R_2)}{H_n'(R_0)} \\ &\quad \cdot \frac{R_0 - R_p \cos \alpha_2}{R_4} H_n'(R_4) e^{in\theta_1} \left. \right\} \dots\dots (18) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \theta_3 &= \pi/2 - \alpha_2', \quad \sin \alpha_2' = R_0 \sin \alpha_1 / R_3 \\ \theta_4 &= \pi/2 - \alpha_1', \quad \sin \alpha_1' = R_0 \sin \alpha_2 / R_4 \\ R_3 &= \sqrt{R_0^2 + R_p^2 - 2 R_0 R_p \cos \alpha_1}, \\ R_p &= k p \quad (k = 2 \pi / L) \\ R_4 &= \sqrt{R_0^2 + R_p^2 - 2 R_0 R_p \cos \alpha_2} \\ \beta_{1,n} &= 1 - in \frac{H_n(R_3)}{H_n'(R_3)} \\ &\quad \cdot \frac{R_3}{R_p(R_0 - R_p \cos \alpha_1) \sin \alpha_1} \\ \beta_{2,n} &= 1 - in \frac{H_n(R_4)}{H_n'(R_4)} \\ &\quad \cdot \frac{R_4}{R_p(R_0 - R_p \cos \alpha_2) \sin \alpha_2} \\ &\quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned} \right\}$$

である。なお、式 (17) および (18) の中では、係数 β を定数のような形で表わしているが、式 (19) に示すように定数ではない。このために ϕ_5 以後のポテンシャルを導くには比較的煩雑となるのでここでは省略する。

3. 理論近似級数解

前章において導いた理論級数解には、特異点領域が存在したり、ポテンシャル ϕ_5 以後の式が煩雑であることなどから実際の計算には不向きである。そこで、本研究のような理論展開にあたっては、円柱の直径と波長との比が 0.2 以上の場合を対象としているので、たとえば式 (16) を導くにあたっての偏微分において近似を導入してみる。すなわち円柱の外線間隔をある程度以上とれば、円柱間隔が円柱径に比べて大きいことから、距離 R_1 の変化に対して角度 θ_2 の変化が小さいと考えて偏微分を行う。この場合次のような取扱いとなる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R_1} \{H_n(R_2) e^{in\theta_1}\} &\doteq \frac{\partial}{\partial R_1} \{H_n(R_2)\} e^{in\theta_1} \\ &= H_n'(R_2) \frac{\partial R_2}{\partial R_1} e^{in\theta_1} \dots (20) \end{aligned}$$

このような取扱いに従って前章と同様に円柱での境界条件を適用することによって係数 α_n を求めれば、 ϕ_3 および ϕ_4 を導くことができる。それぞれの式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-i)^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_2) e^{in\theta_1} \right. \\ &\quad + i^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} \cdot \frac{H_n(R_1)}{H_n'(R_0)} \\ &\quad \cdot \frac{R_0 - R_p \cos \alpha_1}{R_3} H_n'(R_3) e^{in\theta_1} \left. \right\} \dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_4 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-i)^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_1) e^{in\theta_1} \right. \\ &\quad + i^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} \cdot \frac{H_n(R_2)}{H_n'(R_0)} \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{R_0 - R_p \cos \alpha_2}{R_4} H_n'(R_4) e^{in\theta_4} \} \dots \dots (22)$$

これらの式は、式 (17) および (18) の係数 β をちょうど 1 と考えた式となっているので、以後の $\phi_5, \phi_6, \dots$ に関しても比較的簡単に円柱での境界条件を適用して求めることができる。それらの式は、次のような形で 2 つの一般式で表わすことができる。

$$\begin{aligned} \phi_{4j+l} = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} [i^n F_n^{j+l-2}(R_0, R_p, R_3, \alpha_1) \\ & \cdot F_n^{j-l+1}(R_0, R_p, R_4, \alpha_2) \{E_n(R_0, R_{3-l}) \\ & - F_n(R_0, R_p, R_{l+2}, \alpha_l) E_n(R_0, R_l)\} e^{in\theta_{4-l}}] \\ & \dots \dots \dots (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{4j+l+1} = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} [i^n F_n^j(R_0, R_p, R_3, \alpha_1) \\ & \cdot F_n^j(R_0, R_p, R_4, \alpha_2) \{-E_n(R_0, R_{3-l}) \\ & + F_n(R_0, R_p, R_{l+2}, \alpha_l) E_n(R_0, R_l)\} e^{in\theta_{l+1}}] \\ & \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

ここで、 $j=1, 2, \dots$ に対してそれぞれ $l=1$ および 2 であり、関数 E_n と F_n は、

$$E_n(R_0, R_l) = \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_l) \quad (l=1, 2) \dots \dots \dots (25)$$

$$\begin{aligned} F_n(R_0, R_p, R_j, \alpha_l) = & \frac{H_n'(R_j)}{H_n'(R_0)} \\ & \cdot \frac{R_0 - R_p \cos \alpha_l}{R_j} \quad ((j, l) = (3, 1), (4, 2)) \\ & \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

で表わされる。

(1) 収束性

式 (10) で表わされる速度ポテンシャル ϕ は、 $\phi_1, \phi_2, \dots$ などの各ポテンシャルの和となっている。ここでの各ポテンシャルは級数の形で表わされているが、従来はこのような級数の算定においては構造物と波長との大小比較や円柱関数の性質などから有限項で打ち切られたり、近似的な置き換えがみられる^{2), 8)}。

ところが、円柱径が大きくなって波長程度になった場合には、どのような有限項で打ち切れればよいかを決定することが難しい。そこで今回は、級数が収束するまで各ポテンシャルを求めてみた。

円柱間隔 $p=2.0L$ と同一にとった 4 種類の円柱径 $r_0=L/6, L/4, L/3, L/2$ に対して、各ポテンシャルが収束するまでの指数 n の値を円柱前面領域の種々の座標点にて求めた。ここに L は波長である。その級数の収束判定は、ポテンシャルの値が 10^{-5} 以下となった場合とした。収束までの指数 n の絶対値 $|n|$ を繰返し回数とすると、 ϕ_1 と ϕ_2 に関しての繰返し回数が最も多く、 ϕ_3 と ϕ_4 に至っては急激にその回数が少なくなる。また ϕ_1 と ϕ_2 に関しての繰返し回数は、円柱径による違いがほ

とどなく、むしろ円柱の中心からの距離 R にほぼ比例している。その ϕ_1 と ϕ_2 に関しての結果を図-2 に示すと、円柱近傍を除いてほぼ距離に比例しているのがわかる。一方、 ϕ_3 と ϕ_4 に関する繰返し回数は、 ϕ_1 と ϕ_2 とは逆に円柱からの距離に対してほとんど

図-2 円柱の中心からの距離に対する繰返し回数

ど変化はなく、円柱径に対して少しずつ異なる。たとえば円柱径 $r_0=L/6$ では、繰返し回数が 3 あるいは 4 で、 $r_0=L/2$ でのそれが 7 前後である。

これらの繰返し回数は、 ϕ_1 と ϕ_2 の結果などから各ポテンシャルにおける入射項に大いに関係していることがわかる。

(2) 解の精度

理論近似級数解を導くにあたっては、式 (20) にみられるように円柱での境界条件を適用する場合に近似を導入してきた。したがってこの級数解に基づいて円柱構造物による波の回折計算を行おうとすると、その適用には限界が生じるものと考えられる。そこで種々の円柱径や円柱間隔に対して、近似を導入したことによってこの解が理論級数解に比ベどの程度の誤差が生じているかを調べてみた。その検討にあたって、速度ポテンシャル ϕ に対する円柱への考慮すべき入・反射波のポテンシャル ϕ としては、前述の収束性の検討結果からも想像されるように ϕ_1 および ϕ_2 の影響が大きく、以後急激にその影響が小さくなっていくと考えられる。このような理由からポテンシャル ϕ を ϕ_4 まで求め、式 (10) より理論級数解および理論近似級数解のそれぞれの ϕ を算定した。ここで理論近似級数解の ϕ の絶対値を K_d 、理論級数解のそれを K_a とし、近似の導入による誤差 E_p を K_d と K_a の差の絶対値とおき、円柱径 $r_0=L/6, L/4, L/3, L/2$ の 4 種類に対して種々の円柱間隔をとって円柱前面におけるそれぞれを求めた。

まず、同一の円柱間隔 $p=2.0L$ での 4 種類の円柱径に対して、図-1 において円柱による相互干渉が大きいと予想される x 軸上の $x=0.1L$ から $1.5L$ までの 8 座標点にて理論近似級数解の K_d に対する誤差 E_p/K_d を求めた。その結果を角度 α_1 に対しての誤差の変化を

程度以上の円柱間隔をとれば、今回の近似の導入もな
ら問題がなく、複数本の大型円柱構造物による波の回折
計算に対して理論近似級数解が適用可能と考えられる。

(3) 計算例

理論式における式 (23) から式 (26) で示されるよう
な一般式を比較的簡単に誘導することができた理論近似
級数解によって、実際に種々の円柱径に対して計算を行
ってみた。前節で定義した K_d を回折係数として、円
柱間隔 $p=2.0L$ を同一にとり、円柱径 $r_0=L/6, L/4,$
 $L/3, L/2$ の4種類についての回折係数、水面変動量お
よび位相角を求め、構造物の前面および背後の領域で波
がどのように変形し、相互干渉を起こすかを調べてみ
た。なお計算座標点間隔は、円柱前面および背後の領域

図—5 回折係数の分布 (円柱径 $r_0=L/4$ の単一円柱の
場合)

図—6 回折係数の分布 (円柱径 $r_0=L/4$ の2本の円柱
の場合)

図—7 回折係数の分布 (円柱径 $r_0=L/2$ の単一円柱の
場合)

図—8 回折係数の分布 (円柱径 $r_0=L/2$ の2本の円柱
の場合)

ともに x 方向については1波長まで0.1波長間隔で、1
波長以上は0.5波長間隔で4波長まで求めた。 y 方向に
ついては、0.25波長間隔で2波長まで求めた。

まず回折係数の分布状況からの円柱による波の相互干
渉の様子をみてみよう。円柱径 r_0 が $L/4$ と $L/2$ の単
一および2本の円柱の場合の結果をそれぞれ 図—5, 6,
7, 8 に示す。今回の座標軸のとり方からその分布は、 x
軸に関して対称であるので円柱 Γ_A を中心とした領域
を示す。

その結果をみてみると、2本の円柱の場合どの円柱径
に対しても円柱周辺、特に前面領域では回折係数の分布
が、円柱の中心 $y/L=1.0$ を軸としてほぼ対称となっ
ている。すなわち前面領域では、円柱前面1.0波長程
度までその分布は対称となっている。単一円柱の結果と
比べてみると、2本の場合の円柱周辺1.0波長程
度までの回折係数の分布は、 $r_0=L/4$ の場合単一
円柱との結果とほぼ同じである。 $r_0=L/2$ の場合
では、わずかながら異なっているが似かよって
いるところも多い。 $r_0=L/6$ と $r_0=L/3$ の場合
も、それぞれ $r_0=L/4$ と $r_0=L/2$ の場合とほぼ
同じ結果となっている。しかし前面および背後の
領域ともに2本の円柱の場合、円柱 Γ_A から遠
ざかるにつれて $y/L=1.0$ を軸とした対称性が
崩れ出しており、特に $r_0=L/3$ から $r_0=L/2$ に
至ってそれが顕著となっている。

次に両円柱に挟まれ、その中央に位置する y/L
 $=0.0$ 上における前面および背後の領域において
入射波形 η_I に対する水面変動 η を調べてみた。
入射波の方向を図—1 のようにとると、その比は、

$$\eta/\eta_I = e^{-ikx}\phi(x, y) \dots\dots\dots (28)$$

となる。

その結果、式 (28) の実部の変動状況を 図—9
に示す。この場合、単一円柱の場合との比較のた
めに破線でその結果も重ねて図に示している。た
だし単一円柱の場合の結果は、円柱の中心から y
方向に1波長離れた座標点での値である。円柱の
近傍における変動や円柱径の違いによる変動をみ
ていくと、前述の回折係数からの考察結果とほぼ
同じようなことがいえる。単一円柱の場合の結果
と比べると、円柱近傍では円柱径 r_0 が $L/3$ 以
上になると変動差が顕著となり、また円柱から遠
ざかった領域では、円柱径 r_0 が $L/4$ 以上で変
動差ははっきりと現われている。

さらに、各座標点において単一円柱の場合と2
本の円柱の場合の位相角を求めてみた。図面は紙
面の都合で省略するが、各座標点において単一円
柱の場合と2本の円柱の場合の位相角の差をみて

図—9 入射波に対する水面変動の比較

みると、円柱径の違いによってその差の変化がみられる。円柱径 r_0 が $L/2$ に至っては位相角の差が大きく、円柱背後の領域では円柱から遠く離れた領域でもその差が大きい。

(4) 考 察

2本の円柱による波の変形や相互干渉について、単一円柱の場合の結果を基準として回折係数の分布や水面変動および位相角の変化などから検討してみた。その結果、今回のような円柱間隔を2波長ととった場合には、円柱径を変えても円柱周辺1波長程度まではその円柱による波の変形が支配的であって、もう一方の円柱の影響をあまり受けにくいようである。しかしながら円柱径 r_0 が $L/3$ 以上の大きな円柱径になると、円柱周辺1波長前後からそれより遠方の領域でもう一方の円柱の影響を強く受け出すことが明らかとなった。

このように理論近似級数解によって2本の円柱による波の変形や相互干渉を十分把握することができたのは、解の特性や円柱への入・反射波を厳密に検討したことにもよると考えられる。円柱への入・反射を円柱の相互干渉の形で考慮し、 ϕ_1 と $\phi_2, \dots$ というように各ポテンシャルを順次求めて速度ポテンシャル ϕ を算定するにあたっては、考慮すべきポテンシャル ϕ の項数 ϕ_j を円柱径や円柱からの距離に対してどのように異なるかを調べてみた。その結果、考慮すべきポテンシャルの項数は、図—10に示すように円柱からの距離にほぼ逆比例しているのがわかった。また各円柱径ごとの種々の座標点におけるポテンシャルの項数をみても、座標点が異なっても同じポテンシャルの項数を必要とする点があることなどから、ポテンシャルの項数が円柱の中心からの距

図—10 円柱 Γ_A の中心からの距離に対する最小ポテンシャルの項数

離ばかりでなく方向にも関係していることが想像された¹²⁾。これらの検討結果は、前節の計算例に当然考慮してきた。

一方、理論近似級数解の特性に関しては、理論級数解や従来の加法定理を適用して導いた解などに比較¹²⁾すると次のような特徴を有している。1つには、解の収束性に問題がなく、すべての領域において他の解のような特異点が存在せず、解を厳密に求めることができる。さらに各入・反射波のポテンシャル式を比較的簡単な一般式で表わすことができる。

以上のような特徴を有する理論近似級数解は、円柱径が波長に比して大きな場合の MacCamy・Fuchs ら¹⁾に始まる回折理論をもととしており、本研究における理論式の誘導にあたっての条件、すなわち微小振幅波に対する水底にまで達した大型鉛直円柱構造物の場合の波の回折理論解と考えると差し支えないと思われる。

4. 3本以上の場合の解

前章で導いた理論近似級数解をさらに3本以上の円柱群へと発展させる。2本の円柱の場合と同様に各円柱への入・反射波を順次考えていく。

円柱の個数を M とし、 M が奇数の場合を考える。2本の円柱の場合と比較のために図—11に示すような複数本の円柱の場合を例にとって円柱群による波の回折を考える。座標原点の円柱を Γ_0 とし、 x 軸に関して対称に円柱が配列されているとすると、円柱

図—11 3本以上の円柱の場合の座標系

Γ_0 を除く y の正の領域にある円柱 $\Gamma_{-1}, \Gamma_{-2}, \dots$ と負の領域にある円柱 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ の円柱の数 M_e は、 $(M-1)/2$ 個である。またどの円柱も、円柱径 r_0 と円柱間隔 p が同じであるとする。

まず、第1次入・反射波に関しての円柱 Γ_m ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M_e$) でのポテンシャル ϕ_m^1 は、2本の場合の式 (12), (13) などと同様にして微小振幅進行波と円柱からの第1反射波とで次のように表わされる。

$$\phi_m^1 = \phi_0^m + \phi_1^m \dots (29)$$

次に第2次入・反射波以後に関しては、

$$\phi_m^k = \left\{ \sum_{m=-M_e}^{M_e} \phi_{k-1}^m \right\} - \phi_{k-1}^m + \phi_k^m \quad (k=2, 3, \dots) \dots (30)$$

の一般式で表わされる。

ここで2本の場合の式 (26) で示される関数 F_n を用いて、次のような2通りの場合の対象となる円柱位置の関係によって関数 F_n を設定する。円柱 Γ_m より上にある円柱 Γ_{m-l} ($l=1, 2, \dots$) との関係では、図-12 円柱 Γ_m が円柱 Γ_{m-l} に従って関数 F_n は次のように表わされる。

図-12

円柱 Γ_m が円柱 Γ_{m-l} に従って関数 F_n は次のように表わされる。

$$F_n(R_0, R_{p,l}, R_{um}, \alpha_m) = \frac{H_n'(R_{um})}{H_n'(R_0)} \cdot \frac{R_0 - R_{p,l} \cos \alpha_m}{R_{um}} \dots (31)$$

ここで表わされている大文字 $R_{p,l}$ などは、図-12 の小文字で示される距離 $r_{p,l}$ などに波数 k を乗じたものである。また距離と角度などの関係には次のようなものがある。

$$\left. \begin{aligned} R_{um} \sin \alpha'_{m-l} &= R_0 \sin \alpha_m \\ \theta'_{m-l} &= \pi/2 - \alpha'_{m-l} \\ R_{um} &= \sqrt{R_0^2 + R_{p,l}^2 - 2 R_0 R_{p,l} \cos \alpha_m} \\ R_{p,l} &= l \cdot R_p = l k p \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

それに対して、円柱 Γ_m より下にある円柱 Γ_{m+l} との関係では、上式の添字 um を dm に、 $m-l$ を $m+l$ に、また角度 α_m を $\pi - \alpha_m$ に変換した式で表わされる。さらに、ここで関数 F_n を今回同一円柱径および円柱間隔で考えているので、次のように簡略化した関数 f_n で定義する。

$$\begin{aligned} f_n(R_{um}, l) &= F_n(R_0, R_{p,l}, R_{um}, l, \alpha_m) \dots (33) \\ f_n(R_{dm}, l) &= F_n(R_0, R_{p,l}, R_{dm}, l, \pi - \alpha_m) \dots (34) \end{aligned}$$

ここに、 $l=1, 2, \dots$ である。

以上のような関数 f_n と式 (25) で定義した関数 E_n を用いると、入・反射波の各ポテンシャル ϕ_j^m ($j=1,$

$2, \dots$) は次のように表わされる。

$$\phi_1^m = -E_n(R_0, R_m) e^{in\theta_m} \dots (35)$$

$$\begin{aligned} \phi_2^m &= E_n(R_0, R_m) \left\{ \sum_{j=1}^{M_u} f_n(R_{um,j}) e^{in\theta'_{m-j}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{M_d} f_n(R_{dm,j}) e^{in\theta'_{m+j}} \right\} \dots (36) \end{aligned}$$

ここに M_u は、円柱 Γ_m より上にある円柱の個数、 M_d は円柱 Γ_m より下にある円柱の個数で

$$M_u + M_d + 1 = M \dots (37)$$

である。

次に、 ϕ_3^m 以後のポテンシャル ϕ_{k+1}^m を求めるにあたって、円柱番号 m_1 と m_2 ($m_1 > m_2$) で表わされる円柱において、

$$m_0 = m_1 - m_2 \dots (38)$$

$$\begin{aligned} E_x[\phi_2^{m_1}]_{m_1 \rightarrow m_2} &= f_n(R_{um}, m_2) E_n(R_0, R_{m_1}) \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{M_u} f_n(R_{um,j}) e^{in\theta'_{m_1-j}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{M_d} f_n(R_{dm,j}) e^{in\theta'_{m_1+j}} \right\} \dots (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_x[\phi_2^{m_1}]_{m_1 \rightarrow m_2} &= f_n(R_{um}, m_2) E_n(R_0, R_{m_2}) \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{M_u} f_n(R_{um,j}) e^{in\theta'_{m_1-j}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{M_d} f_n(R_{dm,j}) e^{in\theta'_{m_1+j}} \right\} \dots (40) \end{aligned}$$

とおく。ここでの $E_x[\phi_2^{m_1}]_{m_1 \rightarrow m_2}$ などと示される式は、2つの円柱へ入・反射における関係式を定義するものである。たとえば $E_x[\phi_2^{m_1}]_{m_1 \rightarrow m_2}$ は、円柱 Γ_{m_1} において式 (36) の形で定義された第2次の反射波のポテンシャル ϕ_2^m が円柱 Γ_{m_2} に第3次の入射波として関係した場合、 ϕ_2^m の式に円柱 Γ_{m_1} と Γ_{m_2} との関係から導かれる関数 f_n を乗じた形で定義されるものである。

このようにして円柱 Γ_m での第2次の反射波のポテンシャルを基本として、他の円柱との関係から導かれる関数 f_n を求め、順次高次の入・反射波のポテンシャルを求めていくと、円柱 Γ_m での一般式 ϕ_{k+1}^m は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \phi_{k+1}^m &= (-1)^k \left\{ \sum_{j=1}^{M_u} E_x[\phi_k^m]_{m \rightarrow m-j} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{M_d} E_x[\phi_k^m]_{m \rightarrow m+j} \right\} \quad (k=2, 3, \dots) \dots (41) \end{aligned}$$

この式を式 (30) に代入することによってポテンシャル ϕ_m^k を求めることができ、 M 個の円柱がある場合の速度ポテンシャル ϕ をポテンシャル ψ の重ね合わせとして算定することができる。

以上の複数本の場合の理論近似級数解に従って実際に計算を行ってみた。その計算例として2本の場合の結果と比較するために、引き続いて3本の円柱の場合の計算例を示す。どの円柱径も $r_0 = L/2$ とし、それぞれの円

図-13 回折係数の分布 (円柱 $r_0=L/2$ の3本の円柱の場合)

柱間隔を $p=2.0L$ と同一にとって計算を行い、回折係数、水面変動および位相波面などを求めた。

まず 図-7 および 図-8 と比較するために、図-13 に示すような円柱前面と背後の領域において回折係数の分布を求めた。2本の円柱の場合には、円柱周辺1波長程度まで単一円柱の場合の結果と似かよったところが多かったが、3本の円柱の場合の結果は多少その様相が異なっている。すなわち円柱前面および背後の回折係数の値が、2本の場合の結果に比べて大きくなっている。さらに円柱から1波長以上離れた領域では、他の円柱による影響を強く受けて回折係数の分布やその値が2本の場合の結果と異なっているところが多くなっている。

このような回折係数から円柱による波の変形や相互干

図-14 入射波に対する水面変動 (円柱径 $r_0=L/2$ の場合)

渉をみてきたが、式 (28) で示される入射波高 η_I に対する水面変動 η との比によっても、円柱による波の相互干渉特性を調べてみた。図-9 と同様に η/η_I の実部の変動状況を 図-14 に示す。この場合、3本の円柱の場合の結果を単一円柱と2本の円柱の結果とで比較するために、それぞれ一点鎖線、破線および実線で水面変動を表わし、その変動状況を比較した。ただし座標軸の位置が3ケースとも異なるので、単一円柱の場合にはその円柱の中心が、2本の円柱の場合には円柱 Γ_A の中心が、3本の円柱の場合には円柱 Γ_{-1} の中心が 図-14 の $(x/L, y/L)=(0.0, 1.0)$ にあると考えて、その円柱の中心およびそれより上下1波長離れたx軸方向の水面変動を図に示した。

回折係数の分布で考察を示したと同様に、水面変動状況からも円柱による波の変形や相互干渉が明らかになっている。円柱に挟まれた領域の水面変動を表わしている $y/L=0.0$ 上では、2本および3本の円柱の場合の結果が単一円柱の結果と比べると全域にわたって変動差があり、円柱による波の変形や相互干渉の程度が顕著になっていることがわかる。それに対して円柱の中心 $y/L=1.0$ 上での水面変動に関しては、3つのケースの差があまり目立たない。これは他の円柱による影響が少なく、むしろその円柱自身による波の変形が卓越していることによるものと想像される。

さらに円柱による波の回折を明らかにするために、図-15 に位相角 $\arg[\eta/\eta_I]$ によって円柱背後の領域における波の峰線のy軸方向の変化を示した。峰線のy軸方向の変化が、円柱に挟まれた $y/L=1.0$ 上付近の領域において著しい。この結果から、隣接する円柱による影響が顕著に現われるのが円柱背後1波長程度で、他の円柱による影響は円柱より2波長以上離れた付近にみられることが想像される。

図-15 円柱背後の波の峰線

5. 超音波による回折実験

超音波を用いた回折はポテンシャル理論で表現できる¹³⁾。本論文では波の回折をポテンシャル理論に基づいて研究を行ってきた。したがって上記の理論結果を実験上から検証する場合、超音波を用いる方法と造波水槽を用いる方法等が考えられる。いまこの両者を比較した場合、ポテンシャル理論に適合する波を得るという点では、超音波を用いる方が有利と考えられる。超音波の検出には、幸いにして光学的映像法が適用でき、可視化、あるいはホトマルの使用による定量計測も可能である¹⁴⁾。ここでは従来から音の回折像を得るためによく用いられるシュリーレン法、ならびに音の波面映像(波の振幅、位相、波長)を得るためのストロボ法^{15), 16)}の両者を結合した新しい方法を考え、回折像の物理的な意味を明らかにするとともに、理論計算結果との比較を行った。

実験装置の概略を図—16に示す。光源Lからの光を超音波セル T_1 、ミラー M、コンデンサレンズ C、ナイフエッジ P_1 を経てストロボ光とする。この光をレンズ L_1 で平行光とし、超音波回折実験水槽 T_2 を通し、可視音波波面としたものを対物レンズ L_2 とナイフエッジ P_2 で Side Band 化して音波の円柱による回折像と音波波面の両者の重なった像を衡立 S に投影させる。

超音波回折実験水槽 T_2 においては、音波の壁面による反射を防ぐためシリコンゴムをおいている。音波の波長は約 0.8 mm である。

今回は、計算結果と比較のために進行超音波の単一円柱および2本の円柱による回折実験を行った。音場におかれる円柱構造物に相当する針金は、直径が 0.8 mm であるので、音波の波長を λ で表わすと円柱半径が約 $\lambda/2$ である単一円柱の場合と、同じ円柱径で円柱間隔を約 2.0λ の2本の円柱の場合とで実験を行った。

ストロボスコープ光源を用いた光学系のもとで実験を行った結果、単一円柱および2本の円柱の場合のそれぞれの音波面と回折の映像は、写真—1, 2に示すとおりである。濃淡の曲線は、回折が円柱の前面から背後の傾

図—16 ストロボスコープ光源を用いた超音波による回折実験装置

写真—1 音波面と回折の映像 (円柱径 $r_0 = \lambda/2$ の単一円柱の場合)

写真—2 音波面と回折の映像 (円柱径 $r_0 = \lambda/2$, 円柱間隔 $p = 2.0\lambda$ の2本の円柱の場合)

域へと広がっていく二次元的な分布を示している。写真—1 と 写真—2 を比べてみると、2本の円柱の場合の結果は、単一円柱の場合のものをほぼ重ね合わせたような形となっている。また濃淡の曲線で表わされているところを見ると、各音波面が横方向において急激に変化している。この状況を計算結果と比較検討するために、写真—1 および 2 の条件とほぼ同じである円柱径 $r_0 = \lambda/2$ 、円柱間隔 $p = 2.0\lambda$ の場合について、3. での理論近似級数解で求めた。各座標点にて位相角から波面の峰の部分の位置を求めると、単一円柱および2本の円柱の場合の結果は、図—17 および 18 の実線のようになった。それぞれの図において峰線の y 方向での最急勾配点と思われるところに $\times$ 印を示した。これらの図に 写真—1 お

図—17 実験と計算によるそれぞれの回折の比較 (単一円柱の場合)

図—18 実験と計算によるそれぞれの回折の比較
(2本の円柱の場合)

および2の回折と波面の映像部分を黒くして破線で囲って表わした。実験結果からの回折の線内に計算結果の点が現われる。すなわちこのことは、計算結果の各峰線における回折点が実験結果と一致しており、その点を結ぶことによって実験結果の写真にみられる円柱による回折を計算でも表わし得ることを示している。

以上の超音波による回折実験結果から、本研究で導いた理論近似級数解も円柱構造物による波の回折をかなりの精度で解析可能としていることが想像される。

6. 結 論

波長に対する円柱径の比が大きい場合の2本の大型円柱構造物による波の変形や相互干渉に関する計算方法について検討を行い、線形波回折理論における理論近似級数解を示した。その解の特性を検討するとともに、円柱群による波の回折計算式を導いた。さらにその解の妥当性を超音波による回折実験により検証した。

従来の円柱群による解は、加法定理を適用して導かれているため解の収束性に問題点を有していた。しかし、そのポテンシャルの級数の形を変えることによって得られた今回の解は、ポテンシャル解の一般式を簡略な形で導くことができ、収束性等になら問題がない。しかもその解による計算結果から円柱構造物による波の変形や相互干渉を十分把握することができた。さらに新しい可視化技術を導入した超音波による回折実験結果から、今回の計算結果が波面および回折パターンをより厳密に再現していることがわかった。確かに今回の解は、線形波回折理論における近似解にすぎず、適用限界としては円柱の外線間隔と円柱の直径との比 l_0/D が 1.0 より小さな極端な構造物による波の相互干渉を起こすような場

合が存在する。しかし、実用的な面で種々の特徴を有しており、また今回計算結果の検証に用いた超音波による回折実験手法が、 $D-A$ 変換の使用により $\sin$ 波以外のたとえば非線形波等の回折実験にも簡単に適用できるので便利であることなどより、線形から非線形波回折へと発展が期待できる。

参 考 文 献

- 1) MacCamy, R.C. and R.A. Fuchs : Wave forces on piles; A diffraction theory, Technical Memo No. 69, U.S. Army Corps of Engineering, Beach Erosion Board, Dec. 1954.
- 2) 田中 清 : 円形島による波浪の回折, 第3回 海岸工学講演集, pp. 33~35, 1956.
- 3) 合田良実・吉村知司・伊藤喜行 : 島堤による波の反射および回折に関する研究, 港湾技術研究所報告, 第10巻, 第2号, 1971.
- 4) 井島武士・周 宗仁・湯村やす : 任意形状の透過および不透防波堤による波の散乱, 土木学会論文報告集, 第225号, pp. 31~42, 1974.
- 5) 梅田眞三郎 : 波の回折の計算法に関する Review, 福山大学工学部紀要, 第3号, pp. 51~57, 1981.
- 6) Chakrabarti, S.K. : Nonlinear wave forces on vertical cylinder, Proc. of ASCE, Vol. 98, No. HY 11, pp. 1895~1909, 1972.
- 7) 山口正隆・土屋義人 : 大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線形性の影響, 土木学会論文報告集, 第229号, pp. 41~53, 1974.
- 8) 大楠 丹 : 複数本の鉛直円柱に働く波力について, 日本造船学会論文集, 第131号, pp. 53~64, 1972.
- 9) Spring, B.H. and P.L. Monkmeyer : Interaction of plane waves with vertical cylinders, Proceedings Fourteenth Coastal Engineering Conference, ASCE, Vol. 3, pp. 1828~1847, 1974.
- 10) 榎木 亨・中村孝幸 : 複数円柱構造物の波力干渉効果について (1), 第25回海岸工学講演会論文集, pp. 372~376, 1978.
- 11) Massel, S.R. : Interaction of water waves with cylinder barrier, Proc. of ASCE, Vol. 102, No. WW 2, pp. 165~187, May, 1976.
- 12) 梅田眞三郎・筧 源亮・野村勝美・藤井克典 : 二本の大型円柱構造物による波の回折に関する研究, 福山大学工学部紀要, 第4号, 1982.
- 13) 実吉純一・菊池喜充・能本乙彦(監修) : 超音波技術便覧, 日刊工業新聞社, pp. 9~15, pp. 174~197 および pp. 494~502, 1960.
- 14) M. Yano : Improved holographic method for the measurement of velocity in water flow, International Symposium on Flow Visualization, Bochum, Sept. 1980.
- 15) 浅沼 強 (編) : 流れの可視化ハンドブック, 朝倉書店, pp. 331~341, 1977.
- 16) 五十嵐寿一(編) : 音響と振動, 共立出版, pp. 270~273, 1974.

(1982.2.18・受付)