沈降性粒子を含む鉛直噴流の特性

CHARACTERISTICS OF SEDIMENT LADEN VERTICAL JETS

栗谷 陽一*・藤崎 一裕**

By Yoichi AWAYA and Kazuhiro FUJISAKI

1. 緒 言

沈降性を有する粒子を含む噴流が静水中へ放出される現象について考察した。周囲流体と密度差を有する懸濁液が鉛直に噴出されると、噴出流体は噴出口の近傍では運動量が卓越して jet 的な挙動をするが、軸上の流速が低下するにつれて、周囲流体との密度差が卓越して、重力ブリュームへと移行する。さらに軸対称噴流のような場合には、このブリュームから粒子群の沈降が卓越する領域へと現象が進展していく。本報は、これらの現象に及ぼす粒子と流体との相対速度の影響や、粒子濃度の影響などを調べたものである。

なお、この種の現象に関しては、運動量が卓越している場合については吉川³⁾、Brush³⁾、Singamsetti⁴⁾の検討などがあり、密度差が卓越している場合については北野²⁾の報告がある。また、均一流体の密度噴流についての報告もなされている。均一流体の場合の現象は、本報で対象とした現象のうち、沈降速度=0の場合に相当する。この場合に対しても、従来の報告との比較検討を行った。

本報では現象の概略を知ることが目的とした。したがって、噴流内の乱れには混合距離の理論を用い、流速分布や濃度分布には相似形を仮定して、基礎式の解をモーメント法により求めた。

2. 基礎方程式

c を粒子の体積濃度、 ρ_s および ρ_l を粒子および流体の密度とすると、粒子の存在による過剰の比重 σ は

$$\sigma = c \cdot (\rho_s - \rho_l) / \rho_l$$

と表わせる。噴流の中心軸に沿って鉛直下方へ x 軸、水平方向に y 軸をとりそれぞれの方向の流速を u , v , 粒子の沈降速度を w とし、 c を小さいとすると、この場合

の基本式は体積、運動量および粒子の重力流束の保存則に対応するものとして、以下の3式となる。

$$\partial u / \partial x + y^{-n} \partial (y^n u) / \partial y = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \partial u^2 / \partial x + y^{-n} \partial (y^n u^2) / \partial y &= 0 \\ &= \sigma g + y^{-n} \partial \{ K y^n (\partial u / \partial y) \} / \partial y \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial \{ \sigma (u + w) \} / \partial x + y^{-n} \partial (y^n \sigma w) / \partial y &= 0 \\ &= y^{-n} \partial \{ K y^n (\partial y / \partial \sigma) \} / \partial y \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

上式で $n=0$ は2次元、 $n=1$ は軸対称密度噴流に対応する。また K は y 方向の渦動拡散係数で本報では、プラントルの運動量輸送理論による値を用いた。つまり

$$K = l^2 |\partial u / \partial y|, \quad l = \varepsilon \cdot x \quad \dots\dots\dots (4)$$

とし、 ε は運動量と粒子に対して、同一の値をとるものとした。噴流内の速度分布と濃度分布に相似形を仮定し、分布形として正規分布を用いると次式となる。

$$u = u_0(x) \exp \{ -y^2 / b(x)^2 \} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\sigma = \sigma_0(x) \exp \{ -y^2 / a(x)^2 \} \quad \dots\dots\dots (6)$$

添字 0 は軸上の値を意味し、 a および b はそれぞれ粒子および運動量の広がり幅に対応する。式 (1), (4), (5), (6) を式 (2), (3) に代入してモーメント変換すれば、 y についての0次および1次の式が、無次元表示ではそれぞれ以下のようなになる。2次元の場合

$$1/\sqrt{2} \cdot d(U_0^2 B) / dX = AS \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$d \{ SA(1 + U_0 / (1 + \lambda^2)^{1/2}) \} / dX = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned} (\pi + 4) U_0 B^2 dU_0 / dX + (\pi + 2) BU_0^3 dB / dX \\ = 2\sqrt{2}\pi BU_0^3 + 4A^2 S \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{ \tan^{-1} \lambda + \lambda / (1 + \lambda^2) \} SB dU_0 / dX \\ + \{ \tan^{-1} \lambda + \lambda (\lambda^2 - 1) / (1 + \lambda^2)^3 \} SU_0 dB / dX \\ + 2 \{ 1 + U_0 / (1 + \lambda^2)^2 \} S dA / dX \\ + \{ 1 + U_0 / (1 + \lambda^2) \} A dS / dX \\ = 2\sqrt{\pi} U_0 S / (1 + \lambda^2)^{3/2} \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$\text{ただし } \lambda = A/B \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= u_0 / w, \quad X = x / L_0, \quad B = b / (\varepsilon^2 L_0) \\ A &= a / (\varepsilon^2 L_0), \quad S = \sigma_0 g L_0 / w^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (12)$$

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木工学教室
** 正会員 工博 九州工業大学助教授 開発土木工学教室

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= m(qg)^{-2/3}(2/\pi)^{1/2}\varepsilon^{-2/3} \\ m &= 2 \int_0^\infty u^2 dy, \\ q &= 2 \int_0^\infty \sigma(u+w) dy \\ &= \sqrt{\pi} \, a \sigma_0 \{w + bu_0(a^2 + b^2)^{-1/2}\} \\ M &= m/(\sqrt{\pi/2} \varepsilon^2 L_0 w^2) = BU_0^2 \\ Q &= qg\varepsilon^{-2}w^{-3} \\ &= \sqrt{\pi} \, AS\{1 + BU_0/(A^2 + B^2)^{1/2}\} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (13)$$
$$\left. \begin{aligned} M &= m/(\sqrt{\pi/2} \varepsilon^2 L_0 w^2) = BU_0^2 \\ Q &= qg\varepsilon^{-2}w^{-3} \\ &= \sqrt{\pi} \, AS\{1 + BU_0/(A^2 + B^2)^{1/2}\} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (14)$$

軸対称の場合も同様に以下式が得られる。

$d(U_0^2 B^2)/dX = 2SA^2 \cdots \cdots \cdots (15)$

$d\{SA^2(1 + U_0/(1 + \lambda^2))\}/dX \cdots \cdots \cdots (16)$

$B^3 U_0 \, dU_0/dX + (2\sqrt{2} - 1)/\sqrt{2} \, B^2 U_0^2 \, dB/dX$
 $= A^3 S + 2/\sqrt{\pi} \, B^2 U_0^2 \cdots \cdots \cdots (17)$

$\{1 - 1/(1 + \lambda^2)^{3/2}\} AB^2 S \, dU_0/dX$
 $+ \{2 - 2/(1 + \lambda^2)^{3/2} - 3\lambda^2/(1 + \lambda^2)^{5/2}\}$
 $\cdot ABSU_0 \, dB/dX + 3\{U_0/(1 + \lambda^2)^{5/2} + 1\}$
 $\cdot A^2 S \, dA/dX + \{1 + U_0/(1 + \lambda^2)^{3/2}\} A^3 \, dS/dX$
 $= 8/\sqrt{\pi} \cdot \lambda^2/(1 + \lambda^2)^2 \, B^2 SU_0 \cdots \cdots \cdots (18)$

ただし $U_0 = u/w, \, X = x/L_1, \, B = b/(\varepsilon^2 L_1)$
 $A = a/(\varepsilon^2 L_1), \, S = \sigma_0 g L_1/w^2 \} \cdots \cdots (19)$

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= (m)^{3/4}(qg)^{-1/2}(2/\pi)^{3/4}\varepsilon^{-1} \\ m &= \int_0^\infty 2\pi y u^2 dy, \\ q &= \int_0^\infty 2\pi y(u+w)\sigma dy \\ &= \pi \sigma_0 a^2 \{w + b^2 u/(a^2 + b^2)\} \\ M &= m/(\sqrt{\pi/2} \varepsilon^2 L_1 w^2) = U_0^2 B^2 \\ Q &= qg L_1^{-1} w^{-3} \varepsilon^{-4} \\ &= \pi A^2 S(1 + U_0/(1 + \lambda^2)) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (20)$$
$$\left. \begin{aligned} M &= m/(\sqrt{\pi/2} \varepsilon^2 L_1 w^2) = U_0^2 B^2 \\ Q &= qg L_1^{-1} w^{-3} \varepsilon^{-4} \\ &= \pi A^2 S(1 + U_0/(1 + \lambda^2)) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (21)$$

仮想原点からの噴出を考えると、現象は運動量 M と粒子流束 Q により規定されるが、以上の無次元表示を用いると $M = Q^{2/3}$ となり、2, 3 次元とも 1 つのパラメーターでまとめることができる。

3. 計算結果と考察

2 次元の場合の計算結果を 図-1~図-4 に、軸対称の場合の結果を 図-5~図-8 に示す。2 次元の場合には、これらの図によると jet 的挙動から、パラメーター Q に応じたプリュームへと現象が移行している様子がわかる。このプリュームは式 (15)~(18) から

$U_0 Q^{-1/3} = A \{ \tan^{-1} A - (\pi + 2 - 2\sqrt{2}) A$
 $\times 2^{-1/2} (1 + A)^{-2/3} \}^{-1} \cdots \cdots \cdots (22)$

$BX^{-1} = 2\sqrt{2} \pi (\pi + 2 - 2\sqrt{2}) A^{-1}, \, A = BA$
 $\cdots \cdots \cdots (23)$

$SQ^{-2/3}X = (U_0 Q^{-1/3})^{1/2} 2^{-1/2} A^{-1} \cdots \cdots \cdots (24)$

$2\pi(U_0 Q^{-1/3})^2 + \{Q^{-1/3} + U_0 Q^{-1/3}(1 + A^2)^{-1/2}\}$
 $\times (\pi + 2 - 2\sqrt{2}) A^{-1} = 1 \cdots \cdots \cdots (25)$

ただし、 A は式 (22) と (25) を連立させて求める。

図-1~図-4 中の jet 域に記した点は、吉川らの論文¹⁾より引用したもので、 $Q \approx 120$ の場合の実験結果である。このとき $\varepsilon = 0.19$ とした。粒子濃度は計算値の方が全般的に大きめに出ているが、流速や運動量の広がりについては、計算値は実験値をよく近似している。また、図-1 の右端部の点は気泡噴流の実験値²⁾で、 $\varepsilon = 0.3$ とした。これらの図から、 ε に適当な値を用いると計算値は現象の大略を表現できるものと考えられる。

図-5~図-8 の軸対称の場合には、 $w = 0$ ($Q = \infty$) の場合を除いて、jet→プリュームからさらに粒子群の沈降

図-1 U と X との関係 (2 次元)

図-2 A, B と X との関係

図-3 S と X との関係

図-4 λ と X との関係

表-1 jet と プ リ ュ ー ム の 解 (2 次 元)

	jet				プ リ ュ ー ム			
	bx^{-1}	ax^{-1}	$\frac{u_0 \sqrt{x}}{u_{0i} \sqrt{b_i}}$	$\frac{\sigma_0 \sqrt{x}}{\sigma_{0i} \sqrt{b_i}}$	bx^{-1}	ax^{-1}	$\frac{u_0}{(qg)^{1/3}}$	$\frac{\sigma_0 g x}{(qg)^{2/3}}$
著 者 ら	$3.192\epsilon^2$	$3.192\epsilon^2$	$0.5598\epsilon^{-1}$	$0.5598\epsilon^{-1}$	$1.949\epsilon^2$	$1.771\epsilon^2$	$0.8208\epsilon^{-2/3}$	$0.5244\epsilon^{-4/3}$
Lee, et al. ⁹⁾	0.3610	0.3250	0.5262	0.5262	0.1806	0.1625	1.812	2.578
Kotsovinos, et al. ⁶⁾	0.0808	0.1083	2.814	3.029	0.0808	0.1083	1.650	2.381
Rouse, et al. ⁵⁾	—	—	—	—	0.1768	0.1562	1.800	2.600

表-2 jet と プ リ ュ ー ム の 解 (軸 対 称)

	jet				プ リ ュ ー ム			
	bx^{-1}	ax^{-1}	$\frac{u_0 x}{u_{0i} b_i}$	$\frac{\sigma_0 x}{\sigma_{0i} b_i}$	bx^{-1}	ax^{-1}	$\frac{u_0 x^{1/3}}{(qg)^{1/3}}$	$\frac{\sigma_0 g x^{5/3}}{(qg)^{2/3}}$
著 者 ら	$3.853\epsilon^2$	$3.853\epsilon^2$	$0.2596\epsilon^{-2}$	$0.2596\epsilon^{-2}$	$3.030\epsilon^2$	$2.669\epsilon^2$	$0.4520\epsilon^{-4/3}$	$0.1756\epsilon^{-8/3}$
Morton ⁷⁾	0.1640	0.1902	6.098	6.098	0.0984	0.1141	4.782	11.74
Abraham ⁸⁾	0.1125	0.1220	8.770	7.850	—	—	—	—
Rouse et al. ⁵⁾	—	—	—	—	0.1021	0.1187	4.700	11.00

となり、 α は R_i とともに変化する量となる。jet で $R_i=0$ 、プ リ ュ ー ム で $R_i=0.8207^{-3}$ であることを考えると、 α の両極端の値も求められる。

軸対称の場合も同様に、次式で α を定義すると

$$d/dx(\pi b^2)=\alpha 2\pi b u_0 \cdots \cdots \cdots (30)$$

式 (15)、(16) に対応する式を用いて $d/dx(u_0 b^2)$ を消去して、次式が得られる¹⁴⁾。

$$\alpha=(2+\sqrt{2})\epsilon^2/\sqrt{\pi}+\lambda\{\lambda+(\lambda-1)(1+\sqrt{2})\}/(2F_{dc}^2)$$
$$F_{dc}=u_0/\sqrt{a\sigma_0 g} \cdots \cdots \cdots (31)$$

この場合も 2 次元の場合と類似の考察が可能で、現象の進行とともに α が変化することになる。 α に関しては $\alpha=0.055+0.087R_i/\sqrt{2}$ ¹⁰⁾、 $\alpha=0.057+0.25/F_{dc}^2$ ¹¹⁾ などのような形で利用されている例^{6),12),13)} もみられる。本報では、混合距離の理論を用い ϵ を一定として、(29)、(31) のような式を導いたが、 ϵ の R_i や F_{dc} に対する依存性については別に検討を要する。

以上、本報では粒子を含む密度噴流について考察した。体積、運動量と、粒子の重力流束の保存則を基礎式として、噴流内の乱れには混合距離の理論を用い、流速分布や濃度分布には相似形を仮定して現象を解析した。基礎式の 0 次および 1 次のモーメント変換式を数値計算して無次元距離 X の種々の値に応じて、運動量、相対密度、粒子群沈降のいずれかが卓越した状況が現われる様子を無次元パラメーター Q との関連において示した。

参 考 文 献

1) 吉川秀夫・福岡捷二・吉川勝秀：流体と固体粒子の相互作用に関する研究，土木学会論文集，第 260 号，pp. 89 ~100, 1977 年 4 月。

2) 北野義則・田中綏彦・栗谷陽一：静水中における気泡噴流の性質，土木学会論文集，第 253 号，pp. 37~47, 1976 年 9 月。
3) Brush, L. M.: Exploratory study of sediment diffusion, J. Geophy. Res., Vol. 67, No. 4, pp. 1427~1433, 1962.
4) Singamsetti, S. R.: Diffusion of sediment in a submerged jet, Proc. of ASCE, Vol. 92, No. HY2, pp. 153~168, March, 1966.
5) Rouse, H., C. S. Yih and H. W. Humphreys: Gravitational convection from a boundary source, Tellus, Vol. 4, pp. 201~210, 1952.
6) Kotsovinos, N. E. and E. J. List: Plane turbulent buoyant jets, J. Fluid Mech., Vol. 81, pp. 22~24, 1977.
7) Morton, B. R.: Forced plumes, J. Fluid Mech., Vol. 5, pp. 151~163, 1959.
8) Abraham, G.: Jet diffusion in liquid of greater density, Proc. of ASCE, Vol. 86, No. HY6, pp. 1~13, June, 1960.
9) Lee, S. L. and H. W. Emmons: A study of natural convection above a line fire, J. Fluid Mech., Vol. 11, pp. 353~368, 1961.
10) List, E. J. and J. Imberger: Turbulent entrainment in buoyant jets and plumes, Proc. of ASCE, Vol. 99, No. HY9, pp. 1461~1474, September, 1972.
11) Wright, S. J. and R. B. Wallance: Two-dimensional buoyant jets in stratified fluid, Proc. of ASCE, Vol. 105, No. HY11, pp. 1393~1406, November, 1979.
12) Fox, D. G.: Forced plume in a stratified fluid, J. of Geophy. Res., Vol. 75, No. 33, pp. 6818~6835, 1970.
13) Hirst, E.: Buoyant jets discharged to quiescent stratified ambients, J. of Geophy. Res., Vol. 76, No. 30, pp. 7375~7885, 1971.
14) Scorer, R. S.: Environmental Aerodynamics, Ellis Horwood, pp. 320~321, 1978.