回転自由度を有する一般化有限要素の破壊力学 パラメータ算出法

神田 康行¹・岡田 裕²・伊良波 繁雄³・富山 潤⁴・矢川 元基⁵

¹学生会員 琉球大学大学院生 理工学研究科 (〒903-0213 沖縄県西原町千原1番地)

E-mail:k058601@eve.u-ryukyu.ac.jp

²鹿児島大学大学院准教授 理工学研究科 (〒890-0065 鹿児島県鹿児島市郡元1-21-40)

E-mail:okada@mech.kagoshima-u.ac.jp

³正会員 琉球大学教授 工学部環境建設工学科 (〒903-0213 沖縄県西原町千原1番地)

E-mail:iraha@tec.u-ryukyu.ac.jp

⁴正会員 琉球大学助教 工学部環境建設工学科 (〒903-0213 沖縄県西原町千原1番地)

E-mail:jun-t@tec.u-ryukyu.ac.jp

⁵東洋大学教授 工学部コンピューターショナル工学科 (〒112-0001 東京都文京区白山2-36-5)

E-mail:yagawa@eng.toyo.ac.jp

本論文は、一般化有限要素のひとつである回転自由度を有する平面三角形要素の破壊力学パラメータ算出法を提案する。回転自由度を有する要素は、弾性応力解析、フレッシュコンクリートの流れ解析などに適用され良好な結果を得ている。そこで本論文では、回転自由度を有する平面三角形要素を破壊力学解析へ適用する方法を示す。破壊力学パラメータ算出法に仮想き裂閉口積分法があるが、本要素を用いる場合には各き裂変形モードにおける回転自由度項の寄与を明確にする必要がある。本論文は、き裂先端の変形に着目し各き裂変形モードにおける回転自由度項の寄与について明らかにし、本要素用の仮想き裂閉口積分法を定式化している。本方法により得られた数値解析結果と理論解を比較し、その妥当性を検討した。

Key Words : *fracture mechanics, finite element method, virtual crack closure integral method, drilling degrees of freedom, free mesh method, partition of unity*

1. はじめに

有限要素法 (FEM:Finite Element Method) に代表される、数値計算手法による破壊力学解析は、一般的に鋼構造物の健全性評価や破壊を防止する破壊力学設計などに用いられる^{1),2)}。また、破壊力学解析は金属材料以外にも、土木工学の代表的な材料であるコンクリートや岩石の圧縮荷重下における破壊解析³⁾、岩石の破砕設計法⁴⁾などにも広く適用されている。このような破壊力学解析では応力拡大係数やエネルギー解放率などの破壊力学パラメータを用いて破壊現象を表現するため、これまでに多くの計算法が提案されている^{1),2)}。

また、FEMを用いた場合の破壊力学解析では複雑形状のき裂進展に対して煩雑に要素分割を繰り返す必要があり、これが最大のボトルネックになる。そのため、拡張有限要素法⁵⁾、重合メッシュ法⁶⁾、フリーメッシュ法⁷⁾⁻¹⁵⁾などの要素分割を簡便にする方法が提案されている。フリーメッシュ法は、FEMを節点ベース化した方法であり、全ての処理を節点毎に行うことにより、き裂進展解析や

並列計算に対して粒子法的な解析アプローチを目指した計算方法である。すなわち、有限要素メッシュ (二次元では三角形要素、三次元では四面体要素) を各節点の周囲に局所的に生成し、節点の移動や追加に応じて適切な局所メッシュを生成しながら解析を行うことができるため、煩雑に要素分割を繰り返すき裂進展解析を完全自動で処理できる^{7),8)}。

FEMを用いた破壊力学パラメータ算出法には、直接法とエネルギー解放率に基づく方法 (エネルギー法) がある^{1),2)}。直接法は非常に簡便な方法であるが、一般に応力拡大係数の精度保証が難しく、き裂先端の特異性を考慮した特異要素を用いるなどの工夫が必要である^{1),2)}。また、エネルギー法の代表的なものとして、仮想き裂進展法^{1),2)}、J積分法^{1),2)}、J積分法の一種である領域積分法¹⁶⁾、仮想き裂閉口積分法 (VCCM:Virtual Crack Closure-integral Method)^{6), 17)-22)}などがある。これらの中で、VCCMはFEMの解析結果から得られる節点変位と反力を用いてエネルギー解放率を評価する方法である。さらに、き裂変形のモード分離が容易であることから、混合モード負荷

時のき裂解析に適しており、フリーメッシュ法の自動き裂進展解析にも採用されている⁸⁾。

VCCMはこれまで三次元問題では六面体要素のみが使用可能であったが、近年、岡田らによって四面体要素用のVCCM²²⁾が提案された。そのため、三次元フリーメッシュ法の破壊力学解析にVCCMの適用が可能となった。

また、FEMによる破壊力学パラメータの算出時には、解析精度の良い四辺形および六面体要素や有限要素の各辺上に節点を設けた二次要素が広く用いられる。しかしながら、フリーメッシュ法は節点周りにデローニー分割などを利用して局所的に三角形（三次元では四面体）を作成して解析する手法であるため、このような要素を用いることが困難とされている。そこで、フリーメッシュ法の高精度化として中間節点を持たない高精度要素の適用^{13), 14)}が行われており、この中にPU条件（PU: Partition of Unity）²³⁾を利用した一般化有限要素^{5), 12), 24), 25)}のひとつとして回転自由度を有する要素^{9)-11), 26)-28)}がある。回転自由度を有する要素を用いた高精度フリーメッシュ法は、これまでに弾性応力解析¹⁰⁾、フレッシュコンクリートの流れ解析¹¹⁾などに適用され良い結果を得ており、破壊力学問題に対しても高精度な解が期待できる。しかし、VCCMは解析に用いる有限要素によっては定式化に注意する必要がある¹⁹⁾、回転自由度を有する要素も同様なことが考えられる。

本研究は一般化有限要素のひとつである回転自由度を有する要素を破壊力学問題へと適用するため、回転自由度項のエネルギーを考慮した二次元問題におけるVCCMを定式化し、破壊力学パラメータ算出精度について検討する。具体的には、き裂先端の変形について着目し、回転自由度項のエネルギー成分をVCCMに関連づける方法について説明している。また、本論文は破壊力学パラメータの算出精度を取り扱っており、き裂進展解析を目的としていないため求解法にはFEMを用いた。なお、本論文で用いられている破壊力学パラメータの算出法は、要素の辺中間に節点を有していないため、そのままフリーメッシュ法に適用可能である。

本論文では、いくつかの数値解析を行い、本方法により得られる応力拡大係数の数値解析結果と理論解を比較することにより、その妥当性について検討する。

2. 二次元問題における仮想き裂閉口積分法

図-1に示すようにき裂が微小長さ Δ だけき裂面に対して直線に進展するモードIのき裂変形を考える。き裂が微小き裂長さ Δ 閉口するために必要な仕事 W は、Irwinのき裂閉口積分より²⁹⁾

図-1 Irwinのき裂閉口積分

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta} \sigma_y(\Delta - r, 0) v(\Delta, \pi) dr \quad (1)$$

と与えられる。ここで、 r はき裂先端からの距離、 $v(\Delta, \pi)$ 、 $\sigma_y(\Delta - r, 0)$ はそれぞれモードI成分のき裂閉口変位とき裂先端近傍の応力である。また、混合モード負荷時においても同様の考え方ができるため、式(1)にモードII成分の応力 $\tau_{xy}(\Delta - r, 0)$ とき裂閉口変位 $u(\Delta, \pi)$ を加えると仕事 W は

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta} \sigma_y(\Delta - r, 0) v(\Delta, \pi) dr + \frac{1}{2} \int_0^{\Delta} \tau_{xy}(\Delta - r, 0) u(\Delta, \pi) dr \quad (2)$$

となる。さらに、単位長さあたりのき裂進展に必要なエネルギーを次式で表すことが出来る。

$$G = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_0^{\Delta} \sigma_y(\Delta - r, 0) v(\Delta, \pi) dr + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_0^{\Delta} \tau_{xy}(\Delta - r, 0) u(\Delta, \pi) dr \quad (3)$$

ここで、 G はエネルギー解放率である。式(3)の右辺項は、それぞれ別個に考慮できるため、次式のようにエネルギー解放率を各き裂の変形モードに分離できる¹⁷⁾⁻¹⁹⁾。

$$G_I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_0^{\Delta} \sigma_y(r - \Delta, 0) v(\Delta, \pi) dr$$

$$G_{II} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_0^{\Delta} \tau_{xy}(r - \Delta, 0) u(\Delta, \pi) dr \quad (4)$$

ここで、 G_I 、 G_{II} は各モードのエネルギー解放率であ

る。このように、VCCMはモード分離が容易であるため特に混合モード負荷時のき裂解析に有効である。

次に、式(4)を有限要素法解析結果を用いて近似する。図-2にき裂先端での三角形要素を用いたVCCMの要素分割例を示す。VCCMでは、Irwinのき裂開口積分を近似するため図-2のようにき裂先端とその前後一要素分は要素の長さ Δ を等しくし、き裂面に対して直線状に要素分割を行う必要がある。式(4)におけるき裂を閉じる応力はき裂先端における節点反力で与えられ、き裂開口変位はき裂先端から一要素後方の節点変位で近似する¹⁹⁾。そして、微小き裂長さ Δ は短い有限とすれば、式(4)は図-3に示すように有限要素法の解析結果を用いて、

$$G_I \approx \frac{1}{2\Delta t} F_y^I v_{COD}^I, \quad G_{II} \approx \frac{1}{2\Delta t} F_x^{II} u_{COD}^{II} \quad (5)$$

と近似することができる。ここで、 F_y^I 、 F_x^{II} は各モード成分の節点反力（等価節点力）、 v_{COD}^I 、 u_{COD}^{II} は各モード成分のき裂開口変位、 t は板厚である。ここで、 F_y^I 、 F_x^{II} は図-2においてハッチを施した要素を用いて次式のように計算される。

$$\{F\} = \sum_{elm=1}^n \int_V [B]^T \{\sigma\} dV = \sum_{elm=1}^n \int_V [k] \{u\} dV \quad (6)$$

ここで、 n は節点反力の計算に関わる要素の数、 $\{F\}$ は各要素の節点反力、 $[B]$ は各要素のひずみ-変位マトリックス、 $\{\sigma\}$ は各要素の応力、 $\{u\}$ は各要素の節点変位、 $[k]$ は各要素の剛性マトリックスである。式(5)に用いる F_y^I 、 F_x^{II} は $\{F\}$ に含まれている。なお、式(6)は体積積分を行っているため、エネルギー解放率の計算時には、式(5)のように節点反力を板厚で除算する必要がある。

式(6)より求めたエネルギー解放率より各モード成分の応力拡大係数 K_I 、 K_{II} は次式で求めることができる。

$$K_I = \sqrt{G_I E'}, \quad K_{II} = \sqrt{G_{II} E'} \quad (7)$$

ここで、平面応力問題では $E' = E$ 、平面ひずみ問題では、 $E' = E/(1-\nu^2)$ であり、 E はヤング係数、 ν はポアソン比である。なお、本論文ではVCCMの説明に三角形一次要素を例としたが、四辺形一次要素においても同様に式(5)よりエネルギー解放率を計算できる¹⁷⁾。また、二次要素を用いた場合は、式(5)に中間節点でのき裂開口変位と節点反力を加えれば良い^{6), 18), 19)}。しかし、特異要素を用いた時には、 $1/\sqrt{r}$ のき裂先端の特異性を考慮する必要がある¹⁹⁾。

図-2 三角形要素を用いた VCCM の要素分割例

図-3 VCCMによるエネルギー解放率の計算方法

VCCMは線形破壊力学では有用性が示されているが、弾塑性破壊力学には適用できない。また、き裂先端は $1/\sqrt{r}$ の特異性を有しているため、有限要素法解析より得られる応力や変位の結果は要素分割によって変動する。そのため、VCCMから得られる応力拡大係数も要素分割により変動するが、本論文5章でも示すようにき裂長さ a に対して微小き裂長さ Δ を十分に短く取り、き裂先端の要素分割を細かく行えばエネルギー解放率を精度良く算出することが出来る。

また、回転自由度を有する要素は、一次要素では表現しにくい曲げに対する近似精度を高めた要素である。

以上のことから、回転自由度を有する三角形要素をVCCMに適用することは、疲労き裂進展解析のプロセスを自動的に処理可能なフリーメッシュ法による破壊力学解析の高精度化に繋がる。

3. 回転自由度を有する平面三角形要素

本研究では一般化要素のうち、関口、菊池が開発した

回転自由度を有する平面三角形要素に着目する²⁶⁾。なぜならば、有限要素の定式化および三次元ソリッド要素への拡張が容易だからである^{9),10)}。

図4に、開口、菊池の回転自由度を有する平面三角形要素を示す。開口、菊池は、一般的な平面三角形要素に回転自由度を導入し、次式のような変位場を仮定した²⁶⁾。

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^3 (u_i - (y - y_i)\theta_i)N_i \\ v = \sum_{i=1}^3 (v_i + (x - x_i)\theta_i)N_i \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 u_i, v_i はそれぞれ三角形要素頂点の x および y 軸方向の変位、 x, y は要素内の任意節点座標、 x_i, y_i は三角形要素の頂点座標、 θ_i は三角形要素頂点の回転自由度、 N_i は一般的な平面三角形一次要素の形状関数である。式(8)より、ひずみ-変位関係を表す $[B]$ マトリックスは、

$$[B] = [B_1 \ B_2 \ B_3]$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -(y - y_i)\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & (x - x_i)\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & (x - x_i)\frac{\partial N_i}{\partial x} - (y - y_i)\frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (9)$$

のようになる。ここで、式(9)における x, y の値は面積座標 $\{L\} = \{L_1, L_2, L_3\}$ で次のように表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

式(8)および応力-ひずみマトリックス $[D]$ を用いて開口、菊池の平面三角形要素の剛性マトリックス $[k]$ は面積座標を用いれば次式のように与えられる。

$$[k] = t \int_0^1 \int_0^{1-L_1} [B]^T [D] [B] \det [J] dL_1 dL_2 \quad (11)$$

ここで、 $[J]$ はヤコビアンマトリックスである。このように、開口、菊池仮定の回転自由度を有する平面三角形要素は、一般的なアイソパラメトリック要素と変わることなく定式化できる。

図4 回転自由度を有する平面三角形要素

4. 回転自由度を有する平面三角形要素を用いた VCCM

本章では、回転自由度を有する平面三角形要素を用いた場合のVCCMについて定式化する。はじめに、VCCMと密接な関係にある回転自由度を有する平面三角形要素のひずみエネルギーについて述べる。

(1) 回転自由度を有する要素のひずみエネルギー

2章で説明したようにVCCMは、き裂が微小長さ Δ 閉じるために要するエネルギーを利用し、エネルギー解放率を算出する方法である。そのため、VCCMの定式化にあたり、まず、回転自由度を有する平面三角形要素のひずみエネルギーについて考察する。式(8)より、開口、菊池の回転自由度を有する平面三角形要素のひずみエネルギー U_c は次のようになる。

$$U_c = \frac{1}{2} \int_V \{u\}^T [B]^T [D] [B] \{u\} dV \quad (12)$$

ここで、 $\{u\} = \{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2, u_3, v_3, \theta_3\}$ の節点変位である。式(12)より回転自由度を有する平面三角形要素のひずみエネルギーは並進方向変位成分に加え回転自由度項の変位成分から構成されている。したがって、回転自由度を有する平面三角形要素をき裂を閉じるエネルギーを評価するVCCMに適用する際には、並進方向変位成分に加え回転自由度項の変位成分も考慮する必要がある。

(2) き裂先端の変形を利用したVCCMの定式化

VCCMの基礎式である式(4)は、き裂先端の変形場を利用しモード分離を行っている。すなわち、モードⅠには y 方向の変位および応力が関連し、モードⅡでは x 方向の変位およびせん断力が関連することを示している。したがって、回転自由度項に関するエネルギーを考慮するため

図-5 き裂面に対して対称な変位と力の関係 (モード I)

には、回転自由度の変位が各き裂変形モード成分においてどのような関係にあるかを明確にする必要がある。

そこで、Rajuらが領域積分法のモード分離¹⁶⁾で示したように、モードIはき裂面に対して対称な変形、モードIIはき裂面に対して反対称な変形というき裂の変形に着目して回転自由度項の変位について考察する。本要素の回転自由度項は厳密な意味での節点回転角ではないが^{26), 28)}、要素の変形に関するパラメータの一つであることから、き裂変形の対称性に関する議論の対象とすることができる。回転自由度項に付随して現れるモーメントに関しても、同様な理由からき裂変形の対称性に関する議論の対象とすることが可能である。

a) モードIのエネルギー解放率について

図-5にモードIでのき裂面に対して対称な変位と力の関係を示す。また、図-5においては剛体回転は発生していないものとする。図-5(a)より、き裂上下面における各変位成分の関係は次のようになる。

$$u^+ = u^-, \quad v^+ = -v^-, \quad \theta^+ = -\theta^- \quad (13)$$

ここで、 u^+ 、 v^+ 、 θ^+ はき裂面上側における節点変位および回転自由度、 u^- 、 v^- 、 θ^- はき裂面下側における節点変位および回転自由度である。VCCMに用いるき裂開口変位 u_{COD} 、 v_{COD} および回転自由度項の差 θ_{SUB} はき裂上下面上における変位の差より求められるため、以下の関係を得る。

$$\begin{aligned} u_{COD} &= u^+ - u^- = 0 \\ v_{COD} &= v^+ - v^- \neq 0 \\ \theta_{SUB} &= \theta^+ - \theta^- \neq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

図-6 き裂面に対して反対称な変位と力の関係 (モード II)

次に変位と同様な方法で力の成分についても考察する。図-5(b)より、き裂上下面における反力は次のようになる。

$$F_x^+ = F_x^-, \quad F_y^+ = -F_y^-, \quad M^+ = -M^- \quad (15)$$

ここで、 F_x^+ 、 F_y^+ 、 M^+ はき裂面上側における力、 F_x^- 、 F_y^- 、 M^- はき裂面下側における力である。き裂上下面では力の釣り合いより以下の関係が成立する。

$$F_x^+ + F_x^- = 0, \quad F_y^+ + F_y^- = 0, \quad M^+ + M^- = 0 \quad (16)$$

式(15)および(16)よりモード I における力の関係として以下を得ることが出来る。

$$F_x^+ = F_x^- = 0, \quad F_y^+ = -F_y^- \neq 0, \quad M^+ = -M^- \neq 0 \quad (17)$$

式(14)および(17)より、回転自由度を有する要素のモード I 変形では、き裂面に対して垂直方向の変位および反力、回転自由度項の変位および反力が寄与することになる。したがって、モード I 成分のエネルギー解放率 G_I は次式によって近似される。

$$G_I \approx \frac{1}{2\Delta t} (F_y v_{COD} + M \theta_{SUB}) \quad (18)$$

式(18)より、モードIのエネルギー解放率は回転自由度項の影響を受けることがわかる。

b) モードIIのエネルギー解放率について

モードIIは、き裂面に対して反対称な変形であるため、図-5(a)において変形の方法がき裂上下面で変化しない成

分を変化させれば良い。図-6にき裂面に反対称な変位と力の関係を示す。また、ここでもモードⅠの時と同様に図-6には剛体回転は発生していないものとする。図-6(a)より、き裂上下面における各方向の変位の関係は次のようになる。

$$u^+ = -u^-, \quad v^+ = v^-, \quad \theta^+ = \theta^- \quad (19)$$

モードⅠの時と同様にき裂上下面でのき裂開口変位および回転自由項の差として以下の関係を得る。

$$\begin{aligned} u_{COD} &= u^+ - u^- \neq 0 \\ v_{COD} &= v^+ - v^- = 0 \\ \theta_{SUB} &= \theta^+ - \theta^- = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

次に図-6(b)よりモードⅡにおける力について考察すると以下の関係を得ることが出来る。

$$F_x^+ = -F_x^-, \quad F_y^+ = F_y^-, \quad M^+ = M^- \quad (21)$$

式(16)、(21)よりモードⅡにおける力の関係は

$$F_x^+ = -F_x^- \neq 0, \quad F_y^+ = F_y^- = 0, \quad M^+ = M^- = 0 \quad (22)$$

となる。式(20)および(22)より、回転自由度を有する要素のモードⅡ変形ではき裂面に対して、水平方向の変位および反力のみが寄与することになる。よって、モードⅡ成分のエネルギー解放率 G_{II} は次式で近似される。

$$G_{II} \approx \frac{1}{2\Delta t} F_x u_{COD} \quad (23)$$

式(23)より、モードⅡのエネルギー解放率はモードⅠと異なり回転自由度項の影響を受けないことがわかる。式(18)および式(23)より、各モードにおける変位および反力成分には、重複する項が存在しないためモード分離に対しても問題がないことがわかる。なお、応力拡大係数は式(7)に基づいて計算される。

5. 数値解析例

本章では、いくつかの数値解析例により本方法を検討

図-7 遠方で応力が作用する無限弾性体

図-8 遠方で応力が作用する無限弾性体の要素分割

する。また、有限要素の比較として、平面三角形一次要素および二次要素においても VCCM を用いて応力拡大係数を算出した。なお、本章で用いる材料係数としてヤング係数 $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ であり、板厚 $t = 1 \text{ mm}$ 、平面応力状態を仮定して解析を行う。また、本研究では回転自由度を有する要素および三角形二次要素の剛性マトリックスはガウスの数値積分法（積分点の数は3点）を実行して求めた。なお、応力拡大係数は次のように理論解との誤差を算出して評価する。

$$\text{誤差(\%)} = \left| \frac{\text{理論解} - \text{計算結果}}{\text{理論解}} \right| \times 100 \quad (24)$$

(1) 回転自由度項の変位および反力に関する検討

ここでは、VCCMに用いる回転自由度項の節点変位および反力について、き裂変形の各モードでの関係を数値解析により検討する。解析モデルは図-7のように無限弾性体に各モードの応力を载荷したものである。要素分割は図-8のようにき裂周囲は細かくし、問題の対称性を利

表-1 き裂上下面での回転自由度項の節点変位と反力

き裂の変形	θ 上側	θ 下側	M
モードI	-0.00342	0.00342	0.00311
モードII	-0.00062	-0.00062	0.00000

表-2 遠方で応力が作用する無限弾性体の応力拡大係数の算出結果

算出方法	K_I (MPa mm ^{1/2})		K_{II} (MPa mm ^{1/2})	
	解析解	誤差(%)	解析解	誤差(%)
理論解	125.33	---	125.33	---
一次要素+VCCM	126.97	1.31	127.59	1.80
二次要素+VCCM	125.68	0.28	124.48	0.68
回転自由度+VCCM	126.36	0.82	127.44	1.68

用して1/4領域で対称になるように行った。また、三角形一次要素において節点数は3688、要素数は7176である。ここで、回転自由度を有する要素の自由度は一次要素と比較すると1.5倍であり、二次要素の場合は約3.9倍となっている。また、微小き裂長さ Δ とき裂長さ a の比は $\Delta/a=0.01$ とした。なお、この問題における応力拡大係数は各モードにおいて次式で与えられる³⁰⁾。

$$K_I = \sigma_y \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \tau_{xy} \sqrt{\pi a} \quad (25)$$

ここで、 σ_y は引張応力、 τ_{xy} はせん断応力、 a はき裂長さ（本解析では $a=0.5\text{mm}$ ）である。

解析より得られた回転自由度項の変位および反力の結果を表-1に示す。表-1より、モードIおよびモードIIの回転自由度項の節点変位 θ と反力 M は4章で説明したき裂上下面の関係になっている。これより、節点回転自由度とモーメントの関係は数値計算結果でも確認できた。

また、表-2に各要素の応力拡大係数を示す。表-2より応力拡大係数の精度として、二次要素はモードI、IIともに誤差が1%以内、一次要素および本方法は誤差が2%以内と二次要素よりも若干高めに評価する。

(2) 中央にき裂を有する板の引張問題

ここでは、回転自由度項のエネルギーを考慮しない場合の応力拡大係数について定量的に検討する。解析モデルは、図-9(a)に示すように中央にき裂を有する板の引張問題である。また、要素分割は図-9(b)のように1/4領域で対称になるように行い、三角形一次要素において節点

図-9 中央にき裂を有する板の引張問題

表-3 中央にき裂を有する板の引張問題の応力拡大係数算出結果

算出方法	K_I (MPa mm ^{1/2})	
	計算結果	誤差(%)
回転自由度項のエネルギーを考慮したVCCM	1.255	0.021
回転自由度項のエネルギーを考慮しないVCCM	1.236	1.536
一次要素+VCCM	1.257	0.133
二次要素+VCCM	1.257	0.131
理論解	1.255	---

数は2624、要素数は5064である。ここで、回転自由度を有する要素の自由度は一次要素と比較すると1.5倍であり、二次要素の場合は約3.9倍となっている。また、微小き裂長さ Δ とき裂長さ a の比は $\Delta/a=0.01$ とした。なお、この問題における応力拡大係数³⁰⁾は、

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(\xi) \quad (26)$$

$$F(\xi) \approx \left(1.0 - 0.5\xi + 0.370\xi^2 - 0.044\xi^3 \right) / \sqrt{1-\xi}$$

のように与えられる。ここで、 $\xi = (2a/W)$ 、 W は板の幅である。また、式(26)の誤差は0.3%以内である。なお、本解析では $a=0.5\text{mm}$ 、 $W=20\text{mm}$ である。

解析より得られた応力拡大係数の算出結果を表-3に示す。表-3より、一次、二次要素および回転自由度項のエネルギーを考慮した場合のVCCMによる応力拡大係数は誤差が1%以内であり、回転自由度項のエネルギーを考慮しない場合のVCCMは誤差が1.5%だった。

図-10 垂直応力とせん断応力を同時に受ける無限弾性体

表-4 垂直応力とせん断応力を受ける無限弾性体の応力拡大係数算出結果

	K_I (MPa mm ^{1/2})		K_{II} (MPa mm ^{1/2})	
	計算結果	誤差 (%)	計算結果	誤差 (%)
理論解	112.80	---	-112.80	---
一次要素+VCCM	115.22	2.15	-115.65	2.53
二次要素+VCCM	114.55	1.55	-112.89	0.08
回転自由度+VCCM	114.83	1.80	-115.42	2.32
S-FEM+VCCM	113.80	0.89	-113.26	0.41

(3) 混合モード問題

ここでは、混合モード負荷時における本方法の検討を行う。解析モデルは文献6)を参考にして図-10のような引張応力とせん断応力を同時に受ける問題である。解析に用いた要素分割は図-10(b)のように1/4領域で対称になるように行い、三角形一次要素における節点数は2834、要素数は5504である。ここで、回転自由度を有する要素の自由度は一次要素と比較すると1.5倍となっており、二次要素の場合は約3.9倍であった。なお、微小き裂長さ Δ とき裂長さ a の比は $\Delta/a = 0.01$ となっている。また、この問題における理論解³⁰⁾は式(25)で与えられる。

解析より得られた結果を表-4に示す。なお、表中には岡田ら⁶⁾が行った平面四辺形二次要素を用いた重合メッシュ法 (S-FEM) とVCCMによる応力拡大係数の計算結果も示してある。表-4より応力拡大係数の算出結果として二次要素は理論解との誤差がモードIでは約1.5%、モードIIでは約0.1%であり、S-FEMの場合はモードIおよびモードIIともに誤差が1%以内となっている。また、三角形一次要素および本方法では、モードIが約2%、モード

図-11 引張応力を受ける斜めき裂問題

図-12 引張応力を受ける斜めき裂問題における要素分割

IIが約2.5%の誤差である。これより、本方法は混合モード問題への適用も可能といえる。

(4) き裂先端の要素分割に対する検討

ここでは、図-11に示す引張応力を受ける斜めき裂問題を例にき裂先端の要素分割を粗くした場合について検討する。なお、解析のケースは図-11中のき裂の傾斜角度 α を $0^\circ \sim 75^\circ$ まで 15° ずつ分割した計6ケースとした。図-12にき裂の傾斜角度 $\alpha = 45^\circ$ での三角形一次要素における節点数 948、要素数 1694の要素分割を示す。図-12(b)に示すようにこの問題におけるき裂先端の要素分割は、図-8(b)と比較すると粗く行った。また、要素分割は1/4領域で対称になるように行っていない。ここで、回転自由度を有する要素の自由度は一次要素と比較すると1.5倍となっており、二次要素の場合は約3.8倍であった。また、微小き裂長さ Δ とき裂長さ a の比は $\Delta/a = 0.01$ である。なお、この問題における理論解は次式で与えられる³⁰⁾。

$$K_I = \sigma_y \sqrt{\pi a} \cos^2 \alpha, \quad K_{II} = \sigma_y \sqrt{\pi a} \cos \alpha \sin \alpha \quad (27)$$

ここで、 a はき裂長さ(本解析では $a = 0.5\text{mm}$)、 α はき裂の傾斜角度である。

表-5 引張応力を受ける斜めき裂問題における応力拡大係数算出結果

き裂の傾斜角度	一次要素		回転自由度		二次要素	
	K_I	K_{II}	K_I	K_{II}	K_I	K_{II}
	誤差(%)	誤差(%)	誤差(%)	誤差(%)	誤差(%)	誤差(%)
0	13.03	---	3.54	---	0.26	---
15	12.63	8.92	4.14	5.45	0.22	1.15
30	14.70	7.81	4.39	3.31	0.35	1.32
45	13.96	7.74	3.18	4.12	0.48	1.22
60	13.05	6.52	4.19	4.65	0.39	1.12
75	9.03	7.14	3.40	4.80	0.47	1.05
平均誤差	12.73	7.63	3.80	4.47	0.36	1.17

(a) 解析モデル

(b) 要素分割

図-13 二重片持ち梁試験片

解析より得られた各モードの応力拡大係数の理論解との誤差を表-5 に示す。表-5 より、二次要素は誤差がモード I、モード II とともに約 1%の精度である。また、本方法は、理論解との誤差がモード I に関しては約 4%、モード II に関しては約 4.5%であった。き裂先端での要素分割が粗いことを考慮すれば良い精度である。一方、一次要素はモード I の誤差が約 13%、モード II の誤差が約 7.5%と大きく理論解と離れていることがわかる。このことより、本方法は、二次要素と比較すると精度は若干悪いが、一次要素よりも精度は良い。

(5) 二重片持ち梁試験片

ここでは、回転自由度を有する要素を用いることの利点である曲げが卓越する問題の解析を行う。解析モデルは、図-13 に示すように二重片持ち梁試験片である。解析に用いた要素分割は図-13(b)に示すようにき裂上下面で対称になるように行った。なお、三角形一次要素における節点数は 434、要素数は 720 であり、回転自由度を有する要素の自由度は一次要素と比較すると 1.5 倍、二次要素の場合は約 3.5 倍となっている。また、き裂先端

表-6 二重片持ち梁試験片における応力拡大係数算出結果

算出方法	K_I (MPa mm ^{1/2})	
	計算結果	誤差(%)
一次要素+VCCM	35.963	2.977
二次要素+VCCM	37.007	0.159
回転自由度+VCCM	36.876	0.511
理論解	37.066	---

(a) $\Delta/a = 0.2$ (b) $\Delta/a = 0.04$

図-14 収束計算に用いた要素分割図

を細かく分割するために微小き裂長さ Δ とき裂長さ a の比は $\Delta/a = 0.001$ とした。なお、この問題における応力拡大係数³⁰⁾は、

$$K_I = \frac{P}{\sqrt{H(a)}} \left(\frac{a}{H(a)} + 0.7 \right) f(m) \quad (28)$$

と与えられる。ここで、 a はき裂長さ（本解析では $a = 10\text{mm}$ ）、 $f(m)$ は梁の勾配から決定される係数であり、本解析では $f(m) = \sqrt{12}$ である。また、式(28)の誤差は $a/H(a) > 1$ で1%の桁となっている。

解析より得られた応力拡大係数の計算結果を表-6に示す。表-6より、二次要素および本方法は1%以内の誤差である。一方、一次要素は約3%の誤差であり、二次要素および回転自由度を有する要素と比較すると差が大きい。これより、本方法は曲げが卓越する問題に対して一次要素よりも精度が良いといえる。

(6) VCCMに用いる微小長さ Δ に関する検討

ここでは、VCCMに用いる微小き裂長さ Δ の検討を行う。検討方法はRybickyら¹⁷⁾と同様に微小き裂長さ Δ とき裂長さ a の比 Δ/a をいくつか変化させた応力拡大係数の収束計算とした。解析モデルは、図-9(a)に示すように中央にき裂を有する板の引張問題である。図-14に

表-7 応力拡大係数の収束計算結果

Δ/a	一次要素	回転自由度	二次要素
	誤差(%)	誤差(%)	誤差(%)
0.01	0.133	0.021	0.131
0.0125	0.481	0.386	0.191
0.02	1.155	0.903	0.052
0.025	0.699	0.329	0.011
0.04	1.087	0.764	1.000
0.1	2.540	2.259	0.567
0.15	3.684	3.029	0.883
0.2	4.789	3.955	1.310

$\Delta/a = 0.2$ ， 0.04 での要素分割図をそれぞれ示す．ここで， $\Delta/a = 0.2$ において，三角形一次要素における節点数は1122，要素数は2124であり回転自由度を有する要素の自由度は一次要素と比較すると1.5倍，二次要素の場合は約3.9倍となっている．なお，要素分割は1/4領域で対称になるように行っている．

解析より得られた各要素における応力拡大係数の収束状況を表-7に示す．表-7より， $\Delta/a = 0.2$ の場合は，一次要素が約5%，回転自由度を有する要素が約4%，二次要素が約1.5%の誤差であり， $\Delta/a = 0.04$ とした場合は，全ての要素が約1%の誤差である．このことから，VCCMではき裂前縁の要素分割を細かくし， Δ/a を小さくとれば，良い精度で応力拡大係数を計算できる．

6. 結論

本研究は，一般化有限要素のうち回転自由度を有する平面三角形要素の破壊力学パラメータ算出法として，回転自由度項のエネルギーを考慮したVCCMを定式化し，その精度評価を行った．本研究をまとめると以下のようになる．

- 1) 従来のVCCMは有限要素法解析結果である並進方向の節点変位と節点反力だけからエネルギー解放率を評価するが，回転自由度を有する要素では，回転自由度項がひずみエネルギーの一部を構成するため，従来の並進方向節点変位および反力に加え，回転自由度項の成分も考慮する必要があることを確認した．
- 2) き裂先端の変形場に着目し，回転自由度項のエネルギーを各モードにおいて考慮する方法を示した．これより，モードIでは回転自由度項のエネルギーが

関わることを示し，モードIIでは関わらないことを示した．

- 3) 本方法の妥当性を検討するため，いくつかの数値解析を行った．引張あるいはせん断応力が作用する問題においてき裂先端の要素分割を細かく行った場合は，本方法より得られる応力拡大係数と理論解を比較するとモードIおよびモードIIともに約2%以内の誤差であることを示した．また，き裂先端の要素分割を比較的粗く行った場合，一次要素はモードIに関しては約13%，モードIIに関しては約7.5%と大きく理論解と離れたが，本方法はモードIに関しては約4%，モードIIに関しては約4.5%であった．
- 4) 回転自由度を有する要素を用いることの利点である曲げが卓越する問題について解析を行った．その結果，一次要素は約3%，本方法および二次要素は1%以内の誤差だった．
- 5) VCCMに用いる微小き裂長さ Δ の検討として，微小き裂長さ Δ とき裂長さ a の比 Δ/a をいくつか変化させた時の応力拡大係数の収束計算を行った．その結果，一次要素，二次要素，本方法ともに $\Delta/a = 0.04$ 以下であれば，応力拡大係数を約1%の誤差で計算できることを確認した．

本方法をフリーメッシュ法に適用すれば，完全自動き裂進展解析の高精度化が可能である．また，本方法に従えば，PU条件を利用した任意自由度を用いた場合の一般化有限要素についてもVCCMにより破壊力学パラメータの算出が可能であると考えられる．また，今回は破壊力学パラメータの算出法としてVCCMについて検討を行ったが，本研究で示した回転自由度項の導入方法は，J積分法の一つである領域積分法や仮想き裂進展法など他の破壊力学パラメータ算出法におけるき裂変形のモード分離への適用や回転自由度を有する四面体要素への拡張なども可能であると推察される．

今後は，高精度フリーメッシュ法による完全自動き裂進展解析，任意自由度を用いた場合の有限要素に対する検討，三次元問題への拡張，領域積分法や仮想き裂進展法への適用などについて研究を行っていく予定である．

謝辞：本研究を遂行するにあたり，日本原子力研究開発機構松原仁氏，慶応義塾大学河合浩志氏，プロメテック・ソフトウェア株式会社藤澤智光氏，入部綱清氏，崎原康平氏，琉球大学大学院（研究当時）山城建樹氏，鹿児島大学大学院（研究当時）荒木宏介氏には多大なご助言を承った．関係者各位に深く感謝いたします．

参考文献

- 1) 矢川元基：破壊力学—理論・解析から工学的応用まで—, pp. 11-254, 培風館, 1988.
- 2) 白鳥正紀, 三好俊郎, 松下久雄：数値破壊力学, pp. 1-107, 実教出版, 1980.
- 3) 矢富盟祥, 鱸洋一：圧縮荷重下にある進展き裂の E 積分によるエネルギー解放率の有限要素解析, 土木学会論文集, No.612/I-46, pp. 251-263, 1999.
- 4) 野間達也, 松本浩二：二次元モデルによる静的破壊工法の破壊設計法, 土木学会論文集, No.638/III-49, pp. 107-115, 1999.
- 5) Belytshko, T. and Black, T. : Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.45, pp. 601-620, 1999.
- 6) Okada, H., Endoh, S., Kikuchi, M. : On fracture analysis using an element overlay technique, *Engng. Fract. Mech.*, Vol.72, pp. 773-789, 2005.
- 7) Yagawa, G. : Node-by-node parallel finite elements: a virtually meshless method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.60, pp. 69-102, 2004.
- 8) 吉野京太郎, 稲葉正和, 矢川元基, 藤澤智光：節点処理型有限要素法による完全自動のき裂進展解析システム, 日本機械学会論文集 (A 編), 69 巻, 687 号, pp. 1524-1530, 2003.
- 9) 松原仁, 伊良波繁雄, 富山潤, 山城建樹, 矢川元基：回転自由度を有する要素を用いたフリーメッシュ法, 土木学会論文集, No.766/I-68, pp. 97-107, 2004.
- 10) 山城建樹, 松原仁, 伊良波繁雄, 富山潤, 矢川元基：高精度フリーメッシュ法による新設コンクリート構造物のひび割れ要因に関する研究, 応用力学論文集, Vol.7, pp. 1233-1239, 2004.
- 11) 富山潤, 伊良波繁雄, 松原仁, 矢川元基：フリーメッシュ法によるフレッシュコンクリートの流動解析法に関する研究, 土木学会論文集, No.746/V-64, pp. 91-101, 2003.
- 12) Tian, R. and Yagawa, G. : Generalized nodes and high-performance elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.64, pp. 2039-2071, 2005.
- 13) 関東康裕：混合法による高精度フリーメッシュ法, 日本計算工学会論文集, No.20000036, 2000.
- 14) Yagawa, G. and Matsubara, H. : Node based finite element method with high performance elements: the local element method, *Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS VIII)*, pp.64-67, 2005.
- 15) Yagawa, G. and Miyamura, T. : Three-node triangular shell element using mixed formulation and its implementation by free mesh method, *Computers and Structures*, Vol. 83, pp. 2066-2076, 2005.
- 16) Raju, I. S., and Shivakumar, K. N. : An equivalent domain integral method in the two-dimensional analysis of mixed mode crack problems, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 37, No.4, pp. 707-725, 1990.
- 17) Ribicki, E. F. and Kanninen, M. F. : A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 9, pp. 931-938, 1977.
- 18) Maiti, S. K. : Finite element computation of crack closure integrals and stress intensity factors, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 41, No.3, pp. 339-348, 1992.
- 19) Raju, I. S. : Calculation of strain-energy release rates with higher order and singular finite elements, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 28, No.3, pp. 251-274, 1987.
- 20) Shivakumar, K. N., Tan, P. W., Newman, Jr. J. C. : A virtual crack-closure technique for calculating stress intensity factors for cracked three dimensional bodies, *Int. J. Fracture*, Vol.36, R 43-R50, 1988.
- 21) Okada, H., Higashi, M., Kikuchi, M., Fukui, Y. and Kumazawa, N. : Three dimensional virtual crack closure-integral method (VCCM) with skewed and non-symmetric mesh arrangement at the crack front, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 72, pp. 1717-1737, 2005.
- 22) Okada, H. and Kamibeppu, T. : A Virtual Crack Closure-Integral Method (VCCM) for Three-Dimensional Crack Problems Using Linear Tetrahedral Finite Elements, *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol.10, No.3, pp. 229-238, 2005.
- 23) Babuska, I. and Melenk, J. M. : The partition of unity method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.40, pp. 727-758, 1997.
- 24) Strouboulis, T., Babuska, I., Copps, K. : The design and analysis of the generalized finite element method, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engng.*, Vol.181, pp. 43-69, 2000.
- 25) Terada, K., Asai, M., Yamagishi, M. : Finite cover method for linear and nonlinear analysis of heterogeneous solids, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.58, pp. 1321-1346, 2003.
- 26) Sekiguchi, M. and Kikuchi, N. : Re-examination of membrane elements with drilling freedom, *Proceedings of the fifth world congress on computational mechanics (WCCM V)*, 2002.
- 27) 松原仁, 伊良波繁雄, 富山潤, 山城建樹, 入部綱清：回転自由度を有する関口・菊池要素と Cook 要素の比較, 応用力学論文集, Vol.7, pp. 431-440, 2004.
- 28) 只野裕一, 野口裕久：面内回転自由度を考慮した二次元一般化平面要素による幾何学的非線形解析, 計算工学会論文集, No.20040027, 2004.
- 29) Irwin, G. R. : Fracture, *Handbook der Physik*, vol.6, pp. 551-590, 1958.
- 30) 岡村弘之：線形破壊力学, pp. 212-222, 培風館, 1976.

(2006 10. 20 受付)

FRACTURE MECHANICS PARAMETER COMPUTATION USING GENERALIZED FINITE ELEMENT WITH DRILLING DEGREES OF FREEDOM

Yasuyuki KANDA, Hiroshi OKADA, Shigeo IRAHA,
Jun TOMIYAMA and Genki YAGAWA

This paper presents a virtual crack closure-integral method (VCCM) using a generalized finite element with drilling degrees of freedom (DOF). So far, the finite element with drilling DOF has been applied to elastic stress analysis etc. It is has not been applied to fracture mechanics analysis. When VCCM is applied to the generalized finite element, the contributions of drilling DOF to the energy release rate need to carefully be examined in relation with the deformation modes of crack. In this paper, we propose a VCCM formulation and some numerical results. They are compared with the theoretical solutions and with some other numerical ones. Finally, the validity of proposed VCCM is discussed.