弾塑性板の終局強度の 初期不整感度則と確率変動

池田 清宏¹・北田 俊行²・山川 優樹³・松村 政秀⁴・柴崎 晃⁵・狩野 祐一⁶

¹正会員 東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

E-mail: ikeda@civil.tohoku.ac.jp

²正会員 大阪市立大学大学院教授 工学研究科都市系専攻 (〒558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138)

³正会員 東北大学大学院助教 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

⁴正会員 大阪市立大学大学院講師 工学研究科都市系専攻 (〒558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138)

⁵学生会員 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

⁶学生会員 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (同上)

弾塑性板の終局強度は、初期たわみや降伏応力等の変動に伴い、確率的に変動することが知られている。しかし、弾性座屈と塑性座屈が混在する、その複雑なメカニズムの理論的な枠組みの整備が課題となっている。本論文では、Koiter 則を塑性分岐の 2 乗則を含む形で拡張することにより、このような終局強度の変動の記述法を提案する。初期たわみや降伏応力の変動に伴う板の終局強度の変動特性を、弾塑性有限変位解析により求め、提案する感度則により、この特性を精度よく近似できることを示した。さらに、初期たわみと降伏応力の確率的な変動に伴う、板の終局強度の変動を記述する理論的枠組みを提案し、実測データに対し適用した。このとき、板の幅厚比の変化に伴う、座屈挙動の違いが、板の終局強度の確率変動に影響を及ぼしていることを明らかにした。

Key Words : elastic-plastic plate, imperfection sensitivity, plastic buckling, probability

1. 序論

鋼構造物の耐荷力は、形状の狂いや溶接に伴う残留応力などの初期不整に大きく依存することが知られている。Koiter は、分岐座屈する構造系の初期不整依存特性を表す、初期不整感度則を提唱した¹⁾。Koiter 則では、初期不整 ϵ による座屈荷重 P_c の低下量が

$$\delta P_c = C\epsilon^\rho + \text{高次項} \quad (1)$$

という冪乗則により表される²⁾。ここで、 C はある定数であり、 ρ は初期不整の感度を表す定数であり、荷重の極大点では $\rho = 1$ であり、単純対称分岐では $\rho = 2/3$ である。

塑性座屈の初期不整感度の研究は、Koiter 則を準用する形で行われた^{3)~7)}。しかし、圧縮板は塑性域では、弾性座屈と異なる挙動を示すことが^{8),9)}、Koiter 則の準用の妨げとなっている。このように、弾性座屈と塑性座屈が混在する挙動を統一的に記述する理論的な枠組みの整備が課題となっている。

弾性座屈と塑性座屈を統一的に記述する試みとして、Ikeda 等¹⁰⁾は、圧縮力を受ける周辺単純支持板の終局強度が初期たわみの介在により低下するメカニズムを、Koiter 則を拡張することにより記述し、幅厚比の値の増加（板厚の減少）に伴い、座屈を支配する現象が、

(a) 塑性分岐 ($\rho = 2$)

(b) 不安定弾塑性分岐 ($\rho = 2/3$)

(c) 弾性安定分岐後の座屈 ($\rho = 1$)

と変化することを示している。ちなみに、近年注目を集めている、Response Surface Method^{11),12)} のような数値的な応答局面の計算法と比較して、効率よく信頼性を記述することができるのがこの方法論の利点である。しかし、この記述法の実用化には、残留応力や降伏応力等の、終局強度のその他の支配要因も考慮することが課題となっている。

本研究では、この記述法の実用化への一歩として、この記述法に下記の 2 点の拡張を加える。

- 初期たわみに加えて、降伏応力を、板の終局強度の変動の支配要因として取り上げる。
- 文献²⁾の手法を導入することにより、終局強度の確率変動と信頼性を記述する。

この拡張に基づき、下記の 2 段階の研究を行った。

- Ikeda 等¹⁰⁾の延長線上の研究として、弾塑性有限変位解析プログラム USSP¹³⁾を用いた数値解析により、初期たわみと降伏応力という 2 種類の変動要因に対する、圧縮板の終局強度を求めた。その結果を基に、初期不整感度則を定式化した。
- 本研究の独自の成果として、初期たわみと降伏応力の実測値^{14),15)}に基づき、初期たわみと降伏応力の変動をワイブル分布により記述し、板の終局強

図-1 周辺単純支持板 (U, V, W : x 軸, y 軸, z 軸方向の変位; $\theta_x, \theta_y, \theta_z$: x 軸, y 軸, z 軸まわりのたわみ角)

図-2 公称応力・公称ひずみ関係

表-1 鋼材の機械的性質

鋼種	SS400
ヤング係数 $E(\text{N/mm}^2)$	2.0×10^5
引張強さ $\sigma_U(\text{N/mm}^2)$	400
降伏ひずみ ϵ_Y	σ_Y/E
ひずみ硬化率 $E_{st}(\text{N/mm}^2)$	2486
ポアソン比 ν	0.3

度の確率分布を、これらのワイブル分布の畳込み積分として表した。このようにして求めた板の終局強度の確率分布により、座屈挙動の変化が板の終局強度に及ぼす影響を確率論的に評価した。

2. 板の終局強度の初期不整による低下

周辺単純支持板の終局強度を、弾塑性有限変位解析プログラム USSP¹³⁾による数値解析で求める。

(1) 周辺単純支持板解析モデル

図-1に解析モデルの周辺単純支持板を示す。板の寸法は $a = 400$ (mm), $b = 400$ (mm) とし、三角形有限要素の辺の比は 1 : 1 とした。ちなみに、本論文では、正方形板を取り上げるが、本論文の考え方は長方形板にも適用可能である。板を、 x 軸, y 軸方向にそれぞれ 20 要素、合計 $20 \times 20 \times 2 = 800$ 個の三角形要素に分割し、板厚方向の積分点は 10 点とした。板モデルに初期たわみを与え、一軸一様圧縮解析を行った。解析に用いた鋼材 (SS400) の応力ひずみ曲線を、図-2に示す。弾性域では応力とひずみは線形関係を示し、塑性域に入ると応力は一定となり、その後ひずみが硬化し始め、引張強さに至るといふモデルを仮定した。鋼材の機械的性質を表-1に示す。

幅厚比パラメータ R_R を次式で定義する。

$$R_R = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E} \frac{12(1-\nu^2)}{k\pi^2}} \quad (2)$$

ここに、 t は板厚、 σ_Y は降伏応力、 k は座屈係数 (= 4.0) である。

板の初期たわみとして次の波形を仮定する。

$$w = \epsilon t \cos \pi x/b \cos \pi y/a \quad (3)$$

ここに、 ϵ は初期不整を表す無次元変数であり、初期たわみの最大値は、(初期不整 ϵ) $\times$ (板厚 t) となる。

(2) 荷重変位曲線

幅厚比パラメータ $R_R = 0.1 \sim 2.0$ 、降伏応力 $\sigma_Y = 235$ (N/mm²) に対する、板の荷重変位曲線を図-3に示す。縦軸は平均圧縮応力 σ であり、横軸 $\bar{y}$ は y 軸方向圧縮変位である。解析に用いた初期不整の値 ϵ を、図中に記した。この図のデータをもとに、終局強度と初期不整の関係を調べ、感度則の式 (1) の冪乗の係数 ρ の値を求めた。この結果、この周辺単純支持板の、座屈挙動が、幅厚比パラメータの値の変化に伴い、(a) 塑性分岐 ($\rho = 2$)、(b) 不安定弾塑性分岐 ($\rho = 2/3$)、(c) 弾性安定分岐後の座屈 ($\rho = 1$) と以下のように変化することが分かる。

- (a) 塑性分岐：図-3(a)~(d) の $0.1 \leq R_R \leq 0.8$ では、小さい初期不整 $\epsilon = 0.001$ に対する荷重変位曲線は、降伏点 (Δ) において降伏応力 $\sigma = \sigma_Y$ に達した後、平坦な降伏棚を呈する。終局強度 σ_u は荷重変位曲線上の極大点により与えられ、初期不整 ϵ の値の増大に伴い低下する。図-3(d)~(e) の $R_R = 0.8, 0.9$ は、塑性分岐と不安定弾塑性分岐の遷移域であ

図-3 幅厚比パラメータ $R_R = 0.1 \sim 2.0$ に対する板の荷重変位曲線 ($\tilde{y}$: y 方向の一様圧縮変位, Δ : 降伏点, $\circ$: 弾性分岐点)

り, 小さい初期不整に対しては塑性分岐を起こすが, 初期不整の増加に伴う不安定弾塑性分岐への遷移により, 終局強度 σ_u が急激に低下している。

(b) 不安定弾塑性分岐: 図-3(f) の $R_R = 1.0$ は, 初期不整の小さい値 $\epsilon = 0.001$ に対して, 鋭いピークを呈する。終局強度 σ_u は, 初期不整 ϵ の増加に伴い, 急速に低下している。図-3(g) の $R_R = 1.1$ は, 不安定弾塑性分岐と弾性安定分岐後の座屈の遷移域である。

(c) 弾性安定分岐後の座屈: 図-3(h)~(l) の $1.2 \leq R_R \leq 2.0$ は, 弾性安定分岐後の座屈域である。例えば, 図-3(i) の $R_R = 1.4$ に対しては, 図中に $\circ$ で示す弾性分岐荷重 σ_{cr} を超えた後も荷重は安定に増加し, 終局強度を迎えている。

(3) 終局強度の初期不整感度曲線

代表的な幅厚比パラメータ $R_R = 0.2, 0.9, 1.1, 1.4$ に対して, 板の終局強度 σ_u の初期不整感度を調べた。降伏応力 σ_Y を $200 \sim 300$ (N/mm^2) の範囲で変動させ, それぞれについて初期たわみ ϵ を適宜変動させた。図-

4に, 終局強度 σ_u の初期不整感度曲面を示す。終局強度 σ_u は, 降伏応力 σ_Y の低下に伴い殆ど線形に低下している。終局強度 σ_u は, 初期たわみ ϵ の増加に伴い低下しているが, その低下の度合いは R_R の値により, 以下のように異なっている。

- $R_R = 0.2$: 終局強度 σ_u の低下は緩やかである。
- $R_R = 0.9$: 終局強度 σ_u の低下は ϵ が小さい時には急である。
- $R_R = 1.1$: 終局強度 σ_u の低下は ϵ が小さい時には少し急である。
- $R_R = 1.4$: 終局強度 σ_u は殆ど線形に低下する。

このような低下の度合いの違いと座屈の仕組みとの関連については, 第3章で明らかにする。

降伏応力 σ_Y により正規化した終局強度 σ_u/σ_Y の感度曲線を図-5に示す。 σ_u/σ_Y の値は, 降伏応力 σ_Y の値によらず殆ど一定であり, 主に初期不整 ϵ に依存する事が確認できる。これは, 終局強度 σ_u は, 降伏応力 σ_Y と断面積の積であるためであると思われる。

図-4 終局強度 σ_u の初期不整感度曲面

図-5 正規化した終局強度 σ_u/σ_Y の初期不整感度曲面

3. 板の終局強度の初期不整感度則

この章では、初期たわみと降伏応力の介在による終局強度の低下の仕組を初期不整感度則により記述する。

具体的には、2章で、幅厚比パラメータ R_R の値に応じて分類した、座屈挙動の異なる4つの領域それぞれに対する初期不整感度則を提案し、板の終局強度の低下量がその初期不整感度則に従うことを検証する。

(1) 初期不整感度則の提案

圧縮力を受ける周辺単純支持板の初期たわみと降伏応力の値による終局強度の低下を表す式として、Koiter 則 (1) を改良した次式を提案する

$$\begin{aligned} \sigma_u/\sigma_Y(\epsilon) &= C_0 + C_1\epsilon^\rho + \text{高次項} \\ &= \begin{cases} 1 + C_1\epsilon^2 & \text{塑性分岐} \\ C_0 + C_1\epsilon^{2/3} + C_2\epsilon & \text{不安定弾塑性分岐} \\ C_0 + C_1\epsilon + C_2\epsilon^2 & \text{弾性安定分岐後の座屈} \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

ここに、 C_0 、 C_1 は定数、 $\rho = 2/3, 1, 2$ であり、幅厚比パラメータに依存する。ちなみに、塑性座屈領域においては完全系 ($\epsilon = 0$) の終局強度 σ_u は降伏応力 σ_Y と一致しているため、 $C_0 = 1$ である。

ところで、式 (4) 中の冪乗の係数は、特異点の種類ごとにある規則に従っている。このため、一見合理的に見える、上記の複数の冪乗則をまとめた式 $\sigma_u/\sigma_Y = C_0 + C_1\epsilon^{2/3} + C_2\epsilon + C_3\epsilon^2$ を用いることには問題があることには注意を要する。

表-2 感度則の係数の値

(a) 2 乗則

R_R	$\epsilon_{0.01}$	C_1
0.1	0.076	-3.34×10^{-1}
0.2	0.153	-4.02×10^{-1}
0.3	0.230	-4.86×10^{-1}
0.4	0.307	-5.95×10^{-1}
0.5	0.384	-7.53×10^{-1}
0.6	0.460	-1.18
0.7	0.537	-2.38
0.8	0.614	-7.04

(b) 2/3 乗則

R_R	$\epsilon_{0.01}$	C_0	C_1	C_2
0.8	0.614	1.079	-8.29×10^{-1}	4.08×10^{-1}
0.9	0.691	1.0	-7.56×10^{-1}	3.75×10^{-1}
1.0	0.768	0.961	-8.08×10^{-1}	4.80×10^{-1}
1.1	0.845	0.835	-3.69×10^{-1}	1.37×10^{-1}
1.2	0.921	0.921	-2.47×10^{-1}	7.23×10^{-2}

(c) 1 乗則

R_R	$\epsilon_{0.01}$	C_0	C_1	C_2
1.3	0.998	0.695	-1.79×10^{-1}	5.51×10^{-2}
1.4	1.075	0.655	-1.34×10^{-1}	3.61×10^{-2}
1.5	1.152	0.622	-9.90×10^{-2}	2.12×10^{-2}
1.6	1.229	0.595	-7.76×10^{-2}	1.50×10^{-2}
1.7	1.305	0.573	-6.12×10^{-2}	1.00×10^{-2}
1.8	1.382	0.553	-4.78×10^{-2}	6.45×10^{-3}
1.9	1.459	0.536	-3.97×10^{-2}	4.86×10^{-3}
2.0	1.536	0.520	-2.98×10^{-2}	2.31×10^{-3}

この感度則 (4) は、下記の 2 つの知見に基づいている。

- 初期たわみ σ_u が、(4) のような 1, 2/3, 2 乗則に従うという Ikeda 等¹⁰⁾の知見。
- 2.(3) 節で図-5 の初期不整感度曲面より得た、「正規化した終局強度 σ_u/σ_Y の値は、降伏応力 σ_Y の値によらず殆ど一定であり、主に初期たわみ ϵ に依存する」という知見。

図-6 に、色々な幅厚比パラメータに対して、数値解析により求めた、正規化した終局強度 σ_u/σ_Y とたわみの初期不整 ϵ の関係を●で示す。ちなみに、この関係を求めるに際し、降伏応力 σ_Y を 200 ~ 300 (N/mm²) の範囲内で変えても、正規化した終局強度 σ_u/σ_Y の値には、殆ど影響しないことを確認した。以下、この関係を、提案する感度則 (4) により記述することとする。初期不整感度則の係数 C_0 、 C_1 、 C_2 の値を各幅厚比パラメータ R_R に対して、表-2 にまとめた。ここで、 $\epsilon_{0.01}$ は、感度則の適用範囲の上限であり、4 章で後述する現実のたわみの初期不整 ϵ の確率分布関数において、非超過確率が 0.01 となる初期不整 ϵ の値と設定する。

(2) 塑性分岐 ($0.1 \leq R_R \leq 0.6$)

塑性分岐が支配的な、幅厚比パラメータが $0.1 \leq R_R \leq 0.6$ の範囲では、初期不整感度則として、(4) で導入した、2 乗則

$$\sigma_u/\sigma_Y = 1 + C_1\epsilon^2 \quad (5)$$

を用いる。この感度則 (5) が表す曲線を、図-6(a)~(c) 中に実線で示す。この曲線は、●で示す解析結果を、 $R_R = 0.1, 0.4$ に対しては、図の範囲内の初期不整 ϵ に対して非常に良く近似しており、 $R_R = 0.6$ に対しては、 $\epsilon \leq 0.3$ では非常に良く近似できているが、 $\epsilon \geq 0.4$ では、不安定弾塑性分岐への移行による誤差が発生している。これにより、塑性分岐が支配的な、 $0.1 \leq R_R \leq 0.6$ の範囲では、初期不整 ϵ の 2 乗則 (5) に従うことが確認できた。ちなみに、初期不整が小さい範囲で漸近的に現象を記述するのが、分岐理論の基本的な考え方である。

(3) 塑性座屈と不安定弾塑性分岐の遷移域 ($R_R = 0.8$)

図-6(d) に示す幅厚比パラメータ $R_R = 0.8$ では、初期不整が $\epsilon \leq 0.1$ という小さい値である時には 2 乗則に従うが、 $\epsilon \geq 0.1$ である時には 2/3 乗の項と高次項である 1 乗の項を含んだ、式 (4) の不安定弾塑性分岐の感度則

$$\sigma_u/\sigma_Y = 1 + C_1\epsilon^{2/3} + C_2\epsilon \quad (6)$$

に非常によく従う。このように、 $R_R = 0.8$ は、塑性座屈と不安定弾塑性分岐の遷移域となっている。

図-6 初期不整感度と感度則による近似

(4) 不安定弾塑性分岐 ($0.9 \leq R_R \leq 1.2$)

幅厚比パラメータ $0.9 \leq R_R \leq 1.2$ では、図-6(e)～(h)に示すように、感度則 (6) により、終局強度の低下を正確に表現できた。この場合は、 ϵ が非常に小さい値である時には 2/3 乗則で十分であるが、 ϵ が大きい値をとる場合に終局強度の低下を正確に表現するために、1 乗の項も用いている。

(5) 弾性安定分岐後の座屈 ($1.4 \leq R_R \leq 2.0$)

幅厚比パラメータ $1.4 \leq R_R \leq 2.0$ では、図-6(i)～(l)に示すように、 ϵ が小さい値を取る時には 1 乗則に従うが、 ϵ が大きくなると 2 乗の項が必要であった。すなわち、弾性安定分岐後の座屈の感度則 (式 (4) 参照)

$$\sigma_u/\sigma_Y = C_0 + C_1\epsilon + C_2\epsilon^2 \quad (7)$$

により、終局強度の低下を正確に記述できた。ただし、 R_R が大きい場合には、1 乗則だけで十分精度よく近似できた。

4. 板の終局強度の確率変動の記述法

3 章で提案・検証した初期不整感度則に、現実の初期たわみ、降伏応力の確率分布を導入して、板の終局強度の確率分布を算出する方法論についてまとめる。

(1) 初期たわみと降伏応力の確率分布

文献^{(14),(15)}の実データに基づき、初期たわみと降伏応力の確率分布を下記のようなワイブル分布により与える。確率密度関数を

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & x < g \\ \lambda m(x-g)^{m-1} \exp\{-\lambda(x-g)^m\} & x \geq g \end{cases} \quad (8)$$

とし、分布関数は次式とする。

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & x < g \\ 1 - \exp\{-\lambda(x-g)^m\} & x \geq g \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 m 、 λ 、 g は分布形を表すパラメータである。

(a) σ_Y の確率密度関数

(b) w/b の確率密度関数

図-7 降伏応力と初期たわみの確率分布

a) 降伏応力の確率分布

文献¹⁴⁾における，降伏応力 σ_Y の平均値 28.5 (kgf/mm²)，標準偏差 2.48 (kgf/mm²) という実データを (N/mm²) に対応する単位系に変換することにより，

$$m = 2.3532, \lambda = 6.361 \times 10^{-5}, g = 230.3 \quad (10)$$

とワイブル分布のパラメータの値を設定した．降伏応力の確率密度関数を図-7(a)に示す．このとき，このワイブル分布の最頻値は， $\hat{\sigma}_Y = 278.3$ (N/mm²)である．

b) 初期たわみの確率分布

日本鋼構造協会の IDM 委員会¹⁵⁾により， w を初期たわみの最大値とすると， $x = 150w/b (\geq 0)$ と正規化した初期たわみの平均値は，0.8951，標準偏差は 0.4439 であることが報告されている．ただし， b は板幅である．このような平均値と標準偏差を持つワイブル分布のパラメータを，

$$m = 2.120, \lambda = 0.978, g = 0 \quad (11)$$

と設定する．この $x = 150w/b$ の分布を変数変換することにより得た，正規化した初期たわみ w/b の確率密度関数を図-7(b)に示す．

(2) 弾塑性座屈荷重の確率変動の算出法

板の終局強度の確率分布を求めるため，式 (4) を終局強度を求める初期不整感度則へ変形する．両辺に σ_Y を掛けて，次式のように書きかえる．

$$\sigma_u = \sigma_Y f(\epsilon) = \sigma_Y (C_0 + C_1 \epsilon^p + \text{高次項}) \quad (12)$$

式 (3) より $w = \epsilon t$ であるから，確率変数 $x = 150w/b$ とおき， $b = 400$ (mm) を用いると，初期不整 ϵ は

$$\epsilon = 8x/3t \quad (13)$$

となる．この式を用いて，(14) を，

$$\sigma_u = \sigma_Y f(8x/(3t)) = \sigma_Y g(x) \quad (14)$$

と書き直しておく．ただし， $g(x) = f(8x/(3t))$ である．

降伏応力 σ_Y ，たわみの初期不整 $x = 150w/b$ をワイブル分布に従う確率変数として，終局強度 σ_u の確率変動を算出する．

$$\alpha = \sigma_Y, \beta = g(x) \quad (15)$$

とおけば，式 (14) より，終局強度 σ_u の確率密度関数は，次の畳み込み積分により与えられる．

$$\phi_u(\sigma_u) = \int_{\alpha_{min}}^{\infty} \phi_\alpha(\alpha) \phi_\beta\left(\frac{\sigma_u}{\alpha}\right) \frac{d\alpha}{\alpha} \quad (16)$$

ここで， $\alpha_{min} = g = 230.3$ は $\alpha = \sigma_Y$ の最小値であり， $\phi_\beta = \phi_x \times dx/d\beta$ である．

5. 弾塑性板の終局強度の確率変動への適用

弾塑性板の終局強度の確率変動を記述する．

(1) 終局強度の確率密度

3 章の初期不整感度則と 4 章の初期不整の実データを，終局強度 σ_u の確率密度関数 ϕ_u の式 (16) に用いることにより，図-8 に示すような，幅厚比パラメータ $0.2 \leq R_R \leq 2.0$ に対する ϕ_u を求めた．この図において，幅厚比パラメータ R_R が増加するに伴い，確率密度関数の分布は左側に移動し，終局強度が低下している．これは， R_R の増加に伴い，板厚が減少し，座屈し易くなるためである．以下，座屈のメカニズム毎に考察を加える．

- 塑性分岐域 ($0.1 \leq R_R \leq 0.6$) では，終局強度の変動の主要因は，図-7(a) に示した降伏応力の変動であり，幅厚比パラメータ R_R の増加に伴い，終局強度が少しずつ低下している．
- 塑性分岐域から不安定弾塑性分岐への遷移域 ($R_R = 0.8$) では，終局強度の変動に対し，図-7(a) に示した降伏応力の変動と図-7(b) に示した初期たわみの変動が連成している．このため，終局強度の変動の分散が最も大きくなっており，確率密度の最大値が最も低くなっている．

図-8 板の終局強度の確率分布

図-9 非超過確率 $p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$ に対する終局強度 σ_u と幅厚比パラメータの関係

- (c) 不安定弾塑性分岐域 ($0.9 \leq R_R \leq 1.2$) では、幅厚比パラメータ R_R の増加に伴い、終局強度が低下し、その変動の分散が小さくなっており、確率密度の最大値が高くなっている。これは、降伏応力の変動の影響が低下し、初期たわみの変動の影響が支配する状況に移行したことによるものである。
- (d) 弾性安定分岐後の座屈域 ($1.2 \leq R_R \leq 2.0$) では、初期たわみの変動が支配的になっており、幅厚比パラメータ R_R の増加に伴い、終局強度が低下し、終局強度の変動の分散が小さくなっている。
- このように、座屈挙動の違いが板の終局強度の確率分布を変化させていることが分かる。

(2) 終局強度の非超過確率

非超過確率 $p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$ に対する終局強度 σ_u と幅厚比パラメータの関係を図-9に示す。非超過確率 p の値の増加に伴い、終局強度 σ_u が増加している。

さらに、非超過確率の各々の値に対して、幅厚比パラメータが小さいとき ($R_R \leq 0.6$) には、塑性分岐が支配的であり、幅厚比パラメータが大ききときには、終局強度 σ_u が急速に低下するという、典型的な終局強度曲線となっており、本手法の妥当性を示している。

6. 結論

本研究では、板の初期たわみと降伏応力を初期不整とした初期不整感度則により、終局強度を記述する方法論を提案した。このように定式化した初期不整感度則を、板の弾塑性解析結果に適用する事によりその妥当性を検証した。板の終局強度を体系的かつ効率的に記述できることが、本手法の利点である。

Koiter の 2/3 乗則は、降伏応力と弾性座屈応力が接近する $0.9 \leq R_R \leq 1.2$ という、幅厚比パラメータの値の狭い範囲でのみ成立していた。このような適用範囲の狭さが、Koiter 理論が実務で用いられなかった理由であると思われる。今後は、塑性分岐、不安定弾塑性分岐、弾性安定分岐後の座屈等の座屈を支配する要因の違いを踏まえた方法論が展開されることを希望する。

提案した初期不整感度則に、実測データより得られる初期たわみと降伏応力の確率分布を導入する事で、板の終局強度の確率分布を各幅厚比パラメータ毎に求めた。この板の終局強度の確率分布により、幅厚比パラメータの違い、すなわち、座屈挙動の違いが板の終局強度の確率分布に影響を与える事を確認した。

耐力力の確率変動に寄与するその他の要因である、残留応力や歪硬化の開始点などのばらつきの評価は今後の課題とする。ちなみに、強度部材である圧縮部材の板の幅厚比パラメータの実用的な領域 (0.5 付近) では、歪硬化領域に至るまでに板が座屈し歪硬化の影響は大きくなく、残留応力の影響が大きい。一方、耐震部材の板要素のように、一般に幅厚比パラメータが小さくなると歪硬化の効果が期待でき耐力力が大きくなり、また、歪硬化は、変形性能にも大きな影響を及ぼす。したがって、幅厚比パラメータが小さい耐震部材の板要素では、歪硬化の開始点も確率変数とするのが実用的であると考えられる。

最後に、実務への有用性について言及する。道路橋示方書の製作基準にしたがって製作された板の初期たわみの確率密度分布を用いた圧縮応力度の確率密度分布を明らかにしているので、外荷重による作用応力の確率密度分布がわかると、対象とする圧縮板の破壊確率がもとまる。さらに、この破壊確率を他の部材のそれと比較すると、道路橋示方書の製作基準をもっと厳しくする必要があるのか、緩和できるのかなどを明らかにすることができる。

参考文献

- 1) Koiter, W. T.: *On the Stability of Elastic Equilibrium*, Dissertation, Delft, Holland, Springer, 1945.
- 2) Ikeda, K., Murota, K.: *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials—Engineering Use of Group-Theoretic Bifurcation Theory*, Springer, New York, 2002.
- 3) Hutchinson, J. W.: On the postbuckling behavior of imperfection-sensitive structures in the plastic range, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, No. 1, pp. 155–162, 1972.
- 4) Needleman, A.: Postbifurcation behavior and imperfection sensitivity of elastic–plastic circular plates, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 17, No. 1, pp. 1–13, 1975.
- 5) Byskov, E.: Imperfection sensitivity of elastic-plastic truss columns, *AIAA Journal*, Vol. 20, No. 2, pp. 263–267, 1982.
- 6) Ming, S.-X., Wenda, L.: Postbuckling and imperfection sensitivity analysis of structures in the plastic range—Part 1: Model analysis, *Thin-Walled Structures*, Vol. 10, No. 4, pp. 263–275, 1990.
- 7) Su, X. M., Lu, W. D.: Post-bifurcation and imperfection sensitivity analysis of plastic clamped circular plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 27, No. 6, pp. 769–782, 1991.
- 8) Feldman, E., Aboudi, J.: Postbuckling analysis and imperfection sensitivity of viscoplastic plates and cylindrical panels, *Thin-Walled Structures*, Vol. 17, No. 4, pp. 273–290, 1993.
- 9) Lu, Z., Obrecht, H., Wunderlich, W.: Imperfection sensitivity of elastic and elastic-plastic torispherical pressure vessel heads, *Thin-Walled Structures*, Vol. 23, No. 1–4, pp. 21–39, 1995.
- 10) Ikeda, K., Kitada, T., Matsumura, M., Yamakawa, Y.: Imperfection sensitivity of ultimate buckling strength of elastic–plastic square plates under compression, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 42, pp. 529–541, 2007.
- 11) Faravelli, L.: Response surface approach for reliability analysis, *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol. 115, No. 2, pp. 2763–2781, 1989.
- 12) Bucher, C. G., Bourgund, U.: A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems, *Structural Safety*, Vol. 7, No. 1, pp. 57–66, 1990.
- 13) 大阪市立大学大学院工学研究科都市系専攻橋梁工学分野, JIP テクノサイエンス (株) システム技術研究所: EPASS/USSP Version 1.0 ユーザーズ・マニュアル, 2007.
- 14) 西村昭: 鋼材の機械的性質のばらつきについて, *JSSC*, Vol. 5, No. 48, pp. 68–74, 1969.
- 15) 日本鋼構造協会 関西地区連絡会 関西地区委員会 IDM 委員会: 鋼橋部材の形状初期不整と耐荷力の統計学的研究, *JSSC*, Vol. 16, No. 170, pp. 10–43, 1980.

(2008. 3. 31 受付)

SENSITIVITY LAW AND PROBABILISTIC VARIATION OF ELASTO-PLASTIC ULTIMATE STRENGTH OF IMPERFECT PLATES

Kiyohiro IKEDA, Toshiyuki KITADA, Yuki YAMAKAWA, Masahide MATSUMURA,
Akira SHIBASAKI and Yuuichi KARINO

The mechanism of imperfection sensitivity of elastic–plastic plates under compression is complex as they undergo elastic and/or plastic buckling, dependent on their width–thickness ratio. The Koiter power law is extended by implementing the quadratic law so as to describe the elastic and plastic buckling of the plates with probabilistically varying initial deflection and yield stress. The finite-displacement, elastic–plastic analysis was conducted on simply-supported square plates under compression by varying the plate thickness, yield stress, and the initial deflection of a sinusoidal form. In accordance with the change of the mechanism of buckling, the power law is changed pertinently to describe the complex imperfection sensitivity of the compression plates in a synthetic manner. A theoretical framework to describe the probabilistic variation of the ultimate strength of the plates has been proposed, and has been put to use in the evaluation of the influence of width–thickness ratio.