流体-固体連成問題のための演算子積分時間領域境界要素法 および空気超音波シミュレーションへの応用

Development of Convolution Quadrature Time-Domain Boundary Element Method for
Fluid-Elastic Half Space and Its Application to Air-Coupled Ultrasonic Simulation

斎藤隆泰*・丸山泰蔵**・廣瀬壮一***

Takahiro SAITOH, Taizou MARUYAMA and Sohichi HIROSE

*正会員 博士(工学) 東京工業大学大学院助教 情報環境学専攻 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-22)

**学生会員 東京工業大学大学院修士課程 情報環境学専攻 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-22)

***正会員 工学博士 東京工業大学大学院教授 情報環境学専攻 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-22)

This paper presents a convolution quadrature time-domain boundary element method for fluid-elastic half space. Application of convolution quadrature method (CQM) to time-domain boundary element method (BEM), which is called CQ-BEM, can help improve numerical stability of time-stepping procedure. However, the conventional CQ-BEM for fluid-elastic half space has two disadvantages. First, it requires much memory to evaluate retarded potentials of time-stepping procedures. Second, it is difficult to couple both boundary integral equations for fluid and elastic half space with time-domain boundary conditions on fluid-elastic interface directly. The formulation presented herewith improves these disadvantages by transforming boundary values in time-domain into Fourier-domain. As numerical examples, air-coupled ultrasonic simulation is shown to validate the presented method.

Key Words : *Time-Domain BEM, Convolution Quadrature Method, Air-Coupled Ultrasonic*

1. はじめに

本論文では、流体-固体連成問題のための演算子積分時間領域境界要素法について検討する。近年、Lubich が提案した畳込み積分を安定に計算する手法である演算子積分法¹⁾²⁾(CQM: Convolution Quadrature Method)を時間領域境界要素法(BEM: Boundary Element Method)に用いる新しい方法(演算子積分時間領域境界要素法)が開発され、様々な波動伝搬問題に対して適用されてきた³⁾。演算子積分時間領域境界要素法は、従来の時間領域境界要素法に比べ、安定に数値解を求めることが可能であること、粘弾性波動問題のような時間領域基本解を閉じた形で求めることが難しい問題に対しても、容易に解を構成できるという利点を持つ⁴⁾。また、演算子積分時間領域境界要素法を高速化・効率化するために、高速多重極法(FMM: Fast Multipole Method)を適用した例も報告されている⁵⁾⁶⁾。

一方で、演算子積分時間領域境界要素法の時間方向に対する解法の手順は、通常的时间領域境界要素法と同様、時間ステップ毎に、その時間ステップ以前の境界データを全て利用した行列ベクトル積の計算を必要とする。そのため、一般的には時間ステップの増加に伴い、過去の影響を考慮するそれら行列ベクトル積の演算にかかる計算負荷は大きくなる。加えて、過去の影響を全

て保存しておくために、時間ステップの増加に伴い影響関数を保存するための必要記憶容量は増加する。

このような演算子積分時間領域境界要素法を、例えば流体-固体連成問題へと適用した場合、2つの問題点がある。1つは先に述べたような、記憶容量の問題である。演算子積分時間領域境界要素法を用いて、小さい時間増分で物理現象を追跡できたとしても、総時間ステップ数が多いと過去に利用した影響関数を全て保存しておかなければならないため、かなりの記憶容量が必要となる。そして、もう1つは、いかに流体-固体の界面における境界条件を処理するかという問題である。演算子積分時間領域境界要素法は、積分核となる基本解はラプラス変換領域のものを使用する一方、境界物理量は時間領域のまま扱う。流体-固体連成問題の時間領域での界面で与えられる境界条件は、後に述べるように時間に関する変位の2階微分項を含む形で与えられる⁷⁾。そのため、流体-固体の各層で求まる時間領域境界積分方程式を、直接に連成させて解くことは難しい。しかしながら、時間領域の解を直接求めることができれば、流体-固体各層での波動伝搬を視覚的にも明確に理解できることから、これら2つの問題点を改善する方法を提案することが望まれる。

そこで、本研究では、このような欠点を改善することに主眼を置き、演算子積分時間領域境界要素法を、流体-固体連成問題に適用する方法について検討する。以下

† Dedicated to the memory of Prof. Takuo FUKUI

図-1 解くべき問題

では、まず、解くべき問題について説明した後、演算子積分時間領域境界要素法について説明する。次に、流体-固体の界面で規定される境界条件の処理方法について検討した後、流体-固体連成問題を解くための演算子積分時間領域境界要素法の改良点について述べる。最後に、空気超音波法の基礎的なシミュレーションを実行することで、本手法の有効性について検討する。

2. 解くべき問題

以下では、2次元直交座標系を用いることとし、右下添字は特に断りのない限り、総和規約に従うものとする。また、流体は、密度 ρ^f が一定である非圧縮性流体であると仮定する。

2.1 支配方程式

図-1のような流体と固体の境界面 S^f , S^s を有する連成問題を時間領域境界要素法で解くことを考える。ここでは、入射波は流体領域 D^f から境界面に入射するものと仮定し、入射波の一部は境界面で反射、透過されるとする。このとき、境界面により発生する反射波や透過波を、時間領域境界要素法を用いて決定することが、解析の目的である。

さて、流体領域 D^f における圧力 $p(\mathbf{x}, t)$ 、および固体領域 D^s における変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ は、物体力を無視すれば、それぞれ次の支配方程式を満足する。

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c_f^2} \ddot{p}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1)$$

$$c_T^2 u_{i,jj}(\mathbf{x}, t) + (c_L^2 - c_T^2) u_{j,ji}(\mathbf{x}, t) = \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

ここで、 t は時間を表し、 c_f は流体領域 D^f における波速、 c_L, c_T はそれぞれ固体領域 D^s における P 波、S 波の波速であり、ラメ定数 λ, μ を用いて、それぞれ $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho^s}$, $c_T = \sqrt{\mu/\rho^s}$ で表わされる。ただし、 ρ^s は固体の密度を表している。

2.2 境界積分方程式

支配方程式 (1), (2) より、流体領域 D^f 、および固体領域 D^s における時間領域境界積分方程式は、それぞれ次

のように表される。

$$c(\mathbf{x})p(\mathbf{x}, t) = p^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_{S^f} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * q(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_{S^f} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * p(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (3)$$

$$c_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) = \int_{S^s} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_{S^s} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (4)$$

ここで、 $p^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ は流体領域 D^f における入射波を表し、 $q(\mathbf{y}, t)$ は $q(\mathbf{y}, t) = \partial p(\mathbf{y}, t)/\partial n_y$ で定義される圧力勾配、 $t_i(\mathbf{y}, t)$ は表面力を示している。ただし、 $\partial/\partial n_y$ は点 $\mathbf{y}$ における外向き法線方向微分を表す。また、 $c(\mathbf{x})$, $c_{ij}(\mathbf{x})$ は点 $\mathbf{x}$ に依存して決定される自由項⁸⁾である。一方、 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は2次元スカラー波動問題における時間領域基本解、および対応する二重層核を、 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は2次元弾性波動問題における時間領域基本解と二重層核を表している。また $*$ は畳込み積分である。

通常の時間領域境界要素法では、境界積分方程式 (3), (4) に適切な近似関数基底を導入し、時間・空間に関して直接離散化することで、境界未知量に関する代数方程式を導き、それを解くことによって境界未知量を決定することができる。しかしながら、従来の時間領域境界要素法では、時間増分が小さい場合に、数値解が不安定になりやすい(クラック問題など一部の問題では比較的安定に数値解を求められる場合もある)。通常の時間領域境界要素法では、要素長を l_e 、時間増分を Δt 、波速を c とした場合、 $l_e/(c\Delta t) \simeq 1$ 程度となるように各パラメータを決定する必要がある⁹⁾。しかしながら、本研究で扱うような解析モデルでは、P 波、S 波が混在する上、各領域における波速が著しく異なる場合もありうる。実際、そのような場合に各境界 S^f , S^s で要素長 l_e が共通であるとすれば、 $l_e/(c\Delta t) \simeq 1$ を各境界間で同時に満足させることは難しく、場合によっては数値解が発散する恐れもある。そこで、本研究では、境界積分方程式 (3), (4) を演算子積分法を適用した演算子積分時間領域境界要素法を用いて解くことを考える。

3. 演算子積分時間領域境界要素法

3.1 演算子積分時間領域境界要素法

境界積分方程式 (3), (4) に、Lubich の演算子積分法を適用することを考える (Appendix A を参照)。以下では、境界表面 S^f , S^s をそれぞれ M 個の一定要素で離散化近似するものとし、 $\mathbf{x} \in S^\beta$ ($\beta = f$ or s) を考慮すれば、境界積分方程式 (3), (4) は、式 (40) を用いて、そ

それぞれ次のように離散化近似される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p(\mathbf{x}, n\Delta t) &= p^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha=1}^M [A^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha)q(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t) \\ &\quad - B^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha)p(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t)] \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}, n\Delta t) &= \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha=1}^M [C_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha)t_j(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t) \\ &\quad - D_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha)u_j(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t)] \quad (6) \end{aligned}$$

ただし、右上添字の α はソース点を表す指標であり、 A^m と B^m 、 C_{ij}^m と D_{ij}^m は、それぞれ演算子積分法を適用して得られる2次元スカラー波動、弾性波動問題における影響関数であり、それらは次のように表される。

$$A^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{S^f} \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS_y \right] e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (7)$$

$$B^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{S^f} \hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS_y \right] e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (8)$$

$$C_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{S^s} \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS_y \right] e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (9)$$

$$D_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{S^s} \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS_y \right] e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (10)$$

ここで、 i は虚数単位、 s_l は生成多項式の商 $\gamma(z_l)$ を用い $s_l = \gamma(z_l)/\Delta t$ で表わされるラプラスパラメータである。また、 $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ と $\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ 、および $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ と $\hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ はラプラス変換域における2次元スカラー波動、弾性波動問題における基本解、および対応する二重層核を表しており、それらはそれぞれ次の式で表わされる。

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{2\pi} K_0(s_f r) \quad (11)$$

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{\partial}{\partial n_y} \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \\ &= \frac{1}{2\pi\mu} \left[K_0(s_T r) \delta_{ij} - \frac{1}{s_T^2} \{K_0(s_T r) - K_0(s_L r)\} \delta_{ij} \right] \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = -n_i(\mathbf{y})\rho^s [(c_L^2 - 2c_T^2)\hat{U}_{mk,m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)\delta_{ij} \\ &+ c_T^2 U_{ik,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) + U_{jk,i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)] \quad (14) \end{aligned}$$

ただし、 δ_{ij} はクロネッカーデルタ、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ であり、 K_n は n 次の第二種変形ベッセル関数である。また、

$n_i(\mathbf{y})$ は点 $\mathbf{y}$ における法線方向ベクトル成分、 s_κ ($\kappa = f, L$ or T)は、それぞれ $s_\kappa = s_l/c_\kappa$ で表される。

離散化された境界積分方程式(5),(6)において、それぞれ第 n ステップにおける未知量を左辺、既知量を右辺に移行し、整理すれば、それぞれの領域 D^f 、 D^s において次の式を得ることができる。

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^M \left[\left(\frac{1}{2} \delta_{xy^\alpha} + B^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) \right) p(\mathbf{y}^\alpha, n\Delta t) \right. \\ &\quad \left. - A^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) q(\mathbf{y}^\alpha, n\Delta t) \right] = p^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\alpha=1}^M \left[A^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) q(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t) \right. \\ &\quad \left. - B^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) p(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t) \right] \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^M \left[\left(\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{xy^\alpha} + D_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) \right) u_j(\mathbf{y}^\alpha, n\Delta t) \right. \\ &\quad \left. - C_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) t_j(\mathbf{y}^\alpha, n\Delta t) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\alpha=1}^M \left[C_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) t_j(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t) \right. \\ &\quad \left. - D_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) u_j(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t) \right] \quad (16) \end{aligned}$$

ただし、 δ_{xy^α} は $\mathbf{x}$ が $\mathbf{y}^\alpha$ に一致するときに $\delta_{xy^\alpha} = 1$ 、その他の場合はゼロとなる指標である。以上で、境界積分方程式を、第 n ステップ以前の境界データから成る右辺と、第 n ステップにおける境界未知量から成る左辺に整理することができた。よって式(15),(16)は、 $n = 1$ から始めて、界面 S^f 、 S^s における境界条件を考慮することで、圧力 p や変位 u_i 等を求めることができる。

3.2 時間領域における界面の境界条件

流体-固体の連成問題では、界面 S^f 、 S^s における時間領域の境界条件は次のように与えられる⁷⁾。

$$t_1(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (17)$$

$$t_2(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t) \quad (18)$$

$$q(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial n_x} = -\rho_f \ddot{u}_2(\mathbf{x}, t) \quad (19)$$

式(17),(18)は、水平方向および鉛直方向の釣り合いにより決定される境界条件である。一方、式(19)は圧力勾配と鉛直方向変位の加速度より規定される境界条件で、変位 u_2 成分の時間に関する2階微分を含んだ形で与えられていることに注意する。このことより、式(15),(16)を境界条件(17),(18),(19)を用いて連成させる場合、式(19)が変位 u_2 の時間に関する2階微分で表されているために、直接に連成させて解くことは難しい。また、連成させることができたとしても、式(15)や(16)における影響関数 $A^m, B^m, C_{ij}^m, D_{ij}^m$ を全て保存しておく必要があるため、総時間ステップ数が多い場合や、自由度

が大きい問題の場合は必要記憶容量が膨大となる。そこで、次のように演算子積分時間領域境界要素法を改良することで、流体-固体連成問題を解くことについて考える。

4. 流体-固体連成問題のための演算子積分時間領域境界要素法

さて、3.1 節で述べたように、演算子積分時間領域境界要素法では、影響関数の積分核の計算に時間領域基本解ではなく、ラプラス変換領域基本解を用いた。ここで注意すべき点は、式 (5), (6) より、圧力や変位といった境界物理量は、ラプラス変換領域ではなく、時間領域のまま扱っている点である。そのため、積分核にラプラス変換領域基本解を用いていても、毎時間ステップ毎に過去の影響を逐一考慮するための行列ベクトル積演算、および、その行列の係数成分となる影響関数の保存が必要となると思われる。そこで、以下では、これらの点を踏まえ、演算子積分時間領域境界要素法を改良する。

4.1 演算子積分時間領域境界要素法の改良

式 (5), (6) における影響関数 $A^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $B^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $C_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $D_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、式 (7)-(10) より、いずれもフーリエ変換の形式で定義されている。したがって、以下では $L = N$ として、式 (7)-(10) における左辺を高速フーリエ変換を用いて評価する⁶⁾ことを前提として考える。まず、流体領域 D^f における境界積分方程式 (5) の右辺第二項を、式 (7), (8) を用いて次のように変形する。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha=1}^M \left[A^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) q(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t) - B^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) p(\mathbf{y}^\alpha, k\Delta t) \right] \\ &= \frac{\mathcal{R}^{-n}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{\alpha=1}^M \left[\tilde{A}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) \tilde{q}^l(\mathbf{y}^\alpha) - \tilde{B}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) \tilde{p}^l(\mathbf{y}^\alpha) \right] \xi^{-nl} \quad (20) \end{aligned}$$

ただし、 $\xi = e^{2\pi i/N}$ であり、 $\tilde{A}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\tilde{B}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ はそれぞれ次のように表わされる。

$$\tilde{A}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{S^f} \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS_y \quad (21)$$

$$\tilde{B}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{S^f} \hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS_y \quad (22)$$

また、 $\tilde{p}^l(\mathbf{y})$, $\tilde{q}^l(\mathbf{y})$ は次のように表される。

$$\tilde{p}^l(\mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{N-1} [\mathcal{R}^k p(\mathbf{y}, k\Delta t)] \xi^{kl} \quad (23)$$

$$\tilde{q}^l(\mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{N-1} [\mathcal{R}^k q(\mathbf{y}, k\Delta t)] \xi^{kl} \quad (24)$$

ここで、式 (23), (24) はそれぞれ $\mathcal{R}^k p(\mathbf{y}, k\Delta t)$ および $\mathcal{R}^k q(\mathbf{y}, k\Delta t)$ のフーリエ変換であることに注意する。こ

のことから、 $p(\mathbf{y}, n\Delta t)$, $q(\mathbf{y}, n\Delta t)$ はそれぞれ逆フーリエ変換により、次のように計算することができる。

$$p(\mathbf{y}, n\Delta t) = \frac{\mathcal{R}^{-n}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{p}^l(\mathbf{y}) \xi^{-nl} \quad (25)$$

$$q(\mathbf{y}, n\Delta t) = \frac{\mathcal{R}^{-n}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{q}^l(\mathbf{y}) \xi^{-nl} \quad (26)$$

このように、境界上の圧力 $p(\mathbf{y}, n\Delta t)$ 、および圧力勾配 $q(\mathbf{y}, n\Delta t)$ は、いずれも像空間で表わすことができた。これより、式 (5) の右辺第一項である入射波についても、次のようなフーリエ変換および逆フーリエ変換を定義することができる。

$$\tilde{p}^{\text{in},l}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{N-1} [\mathcal{R}^k p^{\text{in}}(\mathbf{x}, k\Delta t)] \xi^{kl} \quad (27)$$

$$p^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) = \frac{\mathcal{R}^{-n}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{p}^{\text{in},l}(\mathbf{x}) \xi^{-nl} \quad (28)$$

よって、式 (20), (25), (28) の関係を用いて式 (5) を書き直し、整理すれば、最終的に流体領域 D^f に対して次の式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \tilde{p}^l(\mathbf{x}) = \tilde{p}^{\text{in},l}(\mathbf{x}) \\ & + \sum_{\alpha=1}^M \left[\tilde{A}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) \tilde{q}^l(\mathbf{y}^\alpha) - \tilde{B}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) \tilde{p}^l(\mathbf{y}^\alpha) \right], \quad (l = 0, \dots, N-1) \quad (29) \end{aligned}$$

これより、同様の手順で式 (6) を変形することを考えれば、固体領域 D^s において、式 (29) に対応した次の式を導くことができる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \tilde{u}_i^l(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^M \left[\tilde{C}_{ij}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) \tilde{t}_j^l(\mathbf{y}^\alpha) - \tilde{D}_{ij}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) \tilde{u}_j^l(\mathbf{y}^\alpha) \right], \quad (l = 0, \dots, N-1) \quad (30) \end{aligned}$$

ただし、 $\tilde{C}_{ij}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\tilde{D}_{ij}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\tilde{u}_j^l(\mathbf{y}^\alpha)$, $\tilde{t}_j^l(\mathbf{y}^\alpha)$ は、それぞれ次のように定義される。

$$\tilde{C}_{ij}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{S^s} \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS_y \quad (31)$$

$$\tilde{D}_{ij}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{S^s} \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS_y \quad (32)$$

$$\tilde{u}_j^l(\mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{N-1} [\mathcal{R}^k u_j(\mathbf{y}, k\Delta t)] \xi^{kl} \quad (33)$$

$$\tilde{t}_j^l(\mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{N-1} [\mathcal{R}^k t_j(\mathbf{y}, k\Delta t)] \xi^{kl} \quad (34)$$

式 (29), (30) は、それぞれ各 l ($l = 0, \dots, N-1$) について成立する独立した合計 N 個の方程式である。そのため、式 (29), (30) を各 l について独立に計算すれば、像空間における圧力 $\tilde{p}^l(\mathbf{y})$ や圧力勾配 $\tilde{q}^l(\mathbf{y})$ 、変位 $\tilde{u}_i^l(\mathbf{y})$ や表面力 $\tilde{t}_i^l(\mathbf{y})$ をそれぞれ N 個求めることができる。一方、

時間領域における圧力 $p(\mathbf{y}, n\Delta t)$ や圧力勾配 $q(\mathbf{y}, n\Delta t)$ は、式 (25), (26) を用いた逆フーリエ変換を施すことによって求めることができる。変位 $u_i(\mathbf{y}, n\Delta t)$ や表面力 $t_i(\mathbf{y}, n\Delta t)$ についても、同様に式 (33) や (34) に対応した逆フーリエ変換を用いて計算できる。

このように、式 (29), (30) を用いて解く場合は、例えば式 (29) における係数行列成分となる $\tilde{A}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\tilde{B}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ も各 l について独立であるため、計算終了時までこれら影響関数を保存しておく必要はなく、必要記憶容量は $O(M^2)$ 程度となる。そのため、必要記憶容量が $O(NM^2)$ 程度である式 (5), (6) を用いた従来型の演算子積分時間領域境界要素法と比べて、記憶容量を大幅に削減することが可能となる。また、この方法では、像空間で求めた圧力や変位を単に形式的に逆フーリエ変換するだけで時間領域の解が求まる。そのため、通常の周波数領域境界要素法で求めた解を重ね合わせて逆変換する方法¹⁰⁾に比べて、逆変換の際の手間は省けるというメリットもある。

4.2 像空間における界面の境界条件

式 (29) や (30) における圧力 $\tilde{p}^l(\mathbf{y})$ や変位 $\tilde{u}_i(\mathbf{y})$ といった境界物理量は、もはや時間領域で表されていない。そのため、式 (29), (30) を連成させて解くためには、先に定義した界面における境界条件式 (17), (18), (19) を時間領域で定義されたものから、像空間で定義されたものへと変換してやればよい。これより、界面における境界条件式 (17), (18), (19) を式 (23), (24) で定義したような像空間へと変換すれば、それらはそれぞれ次のように定義できる。

$$\tilde{t}_1^l(\mathbf{x}) = 0 \quad (35)$$

$$\tilde{t}_2^l(\mathbf{x}) = -\tilde{p}^l(\mathbf{x}) \quad (36)$$

$$\tilde{u}_2^l(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho^f s_l^2} \frac{\partial \tilde{p}^l(\mathbf{x})}{\partial n_x} = \frac{1}{\rho^f s_l^2} \tilde{q}^l(\mathbf{x}) \quad (37)$$

ここで、式 (37) における右辺の分母にパラメータ s_l が現れるが、 s_l は Lubich の演算子積分法において $\mathcal{R} < 1$ を満たす限りゼロとならないことに注意する。

さて、境界条件式 (37) は、もはや時間に関する 2 階微分を伴わない形式へと帰着されている。このように、圧力 $\tilde{p}^l(\mathbf{x})$ と圧力勾配 $\tilde{q}^l(\mathbf{x})$ は、それぞれ表面力 $\tilde{t}_2^l(\mathbf{x})$ と変位 $\tilde{u}_2^l(\mathbf{x})$ を用いた単純な形式で表すことができたため、式 (29), (30) を直接に連立して解くことが可能となった。

5. 数値解析例

以下、数値解析例を示す。ここでは、流体-固体連成問題に対する演算子積分時間領域境界要素法の応用例として、近年、超音波非破壊評価の一手法として注目を

図-2 ピッチキャッチ法を用いた空気超音波法

表-1 空気とモルタルの材料定数

	P 波速度 (m/s)	S 波速度 (m/s)	密度 (kg/m ³)
空気:	330	-	1.2
モルタル:	4000	2000	2300

集めている空気超音波法¹¹⁾を想定した基礎的なシミュレーションを実行する。超音波非破壊評価の最終目的は欠陥形状の画像化である。画像化には、受信超音波の時間波形を用いるので、時間領域の解を効率的に求めることができれば有用である。

空気超音波法は、通常、図-2 のようなピッチキャッチ法により、固体中の欠陥等による散乱波を送信とは異なる別の探触子で受信することによって、その受信波形から欠陥の有無等を推定する方法である。その際、非接触で超音波の送受信を行うため、通常の超音波探傷法のように接触媒質を試験体に塗布する必要がない。そのため、探傷の自動化や、高温等の過酷な状況下における機器等への適用が期待されている。

しかしながら、空気超音波法における問題点は、空気と試験体の音響インピーダンスが著しく異なることである。表-1 に、試験体にモルタルを用いた場合の、空気、モルタルのおよその材料定数を示す。空気およびモルタルの縦波に関する音響インピーダンス Z^f , Z_L^s はそれぞれ表-1 より、 $Z^f = 3.96 \times 10^2 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$, $Z_L^s = 9.2 \times 10^6 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ であり、20,000 倍以上の開きがある。このような理由から、例えば通常の半無限弾性体内の波動伝搬問題等では、固体表面に応力フリーの境界条件を用い、空気の影響を無視する場合が多い。しかしながら、超音波を空気中から送受信する影響を考慮すると、試験体表面において応力フリーの境界条件を適用することはできず、解くべき問題は、流体-固体連成問題と同様の定式化が必要となる。

以下の解析では、 D^f を空気、 D^s をモルタルとし、空気とモルタルの材料定数として表-1 の値を用いることとする。また、領域 D^f , D^s における半無限空間に対して、全空間における基本解 (11)-(14) を用い、境界 S^f , S^s

図-3 垂直入射による反射圧力, 透過変位

図-4 入射角と往復透過係数の関係

は, 解析に十分な長さで打ち切って計算を行う. 演算子積分法の利用には, $\gamma(z) = (1-z) + (1-z)^2/2$ とし, $\mathcal{R}$ を決定するための精度パラメータ ϵ は, $\epsilon = 1.0 \times 10^{-12}$ とした.

5.1 計算精度の確認

解析に先立ち, 計算精度の確認を行う. ここでは, 空気中 D^f から周期 $T = 2\mu\text{s}$ (中心周波数 500kHz を想定), 振幅 p_0 の平面正弦圧力波を界面に垂直に 1 波与え, 界面から垂直上方 1mm の点 (A 点) における反射圧力 p/p_0 , 下方 3mm の点 (B 点), および下方 5mm の点 (C 点) での透過変位 $u_2 p^s c_L / (p_0 T)$ を, 本手法を用いて計算する. 空気 D^f 側から界面に垂直に平面圧力波を入射させた場合の反射圧力波, 透過変位は, 空気, モルタルの音響インピーダンスより求められる反射, 透過係数を用いてそれぞれ解析的に求めることができる¹²⁾.

図-3 中の記号は, 本手法により得られた A 点での反射圧力, B, C 点での透過変位を示している. 比較のため, 解析的に得られた反射圧力, 透過変位も実線で示してある. ただし, 時刻 $t = 0\mu\text{s}$ に, 平面正弦圧力波が界面に到達するとしている. 図-3 より, 両者は良く一致していることが確認できた.

5.2 空気超音波法を想定したシミュレーション

(1) 入射波と入射角の設定

反射係数や透過係数は, 入射角に依存する. 先に述べたように, 空気とモルタルの音響インピーダンスの差は非常に大きいため, 入射角によっては適切な受信波形を得られない場合も考えられる. そこで, 入射角を変化させ, できるだけ大きい振幅の受信波を得られるような入射角を予め見積もっておくことが空気超音波法を行う上で重要となる. ここでは, 超音波の空気からモルタル内部への透過係数 T^{fs} , およびモルタルから空気領域への透過係数 T^{sf} を求めることで, 超音波が空気側からモルタルへと透過し, 再び空気中へと超音波が伝搬するトータルの過程における透過係数 $T^{fsf} = T^{fs} \cdot T^{sf}$ (以

下, 往復透過係数と呼ぶ) と入射角の関係を求めることで, 入射角を決定する.

図-4 は, 空気側から入射角 α でモルタルに超音波を入射させた場合の入射角と往復透過係数の関係を示している. 実線および点線は, それぞれモルタル中における P 波, S 波が再び空気側へ透過する場合の往復透過係数を示している. 音響インピーダンスの差が非常に大きいため, 超音波探傷法で利用できる入射角はごく小さい場合のみに限られていることがわかる. モルタル中における P 波は, 入射角が $\alpha < 5^\circ$, S 波についても, 入射角が $\alpha < 10^\circ$ でなければ, 空気側へ透過することなく, 全反射することがわかる. 往復透過係数は全体的に P 波に比べて S 波の方が大きく, かつ扱える入射角も大きい. したがって, 以下の解析では S 波の透過係数の最大値を取る入射角 $\alpha = 6^\circ$ を, 入射角として用いることとする.

次に, 解析で用いる入射波について検討する. 探触子による超音波の放射モデルは, 一般にレイリー積分の形で与えられることが多い¹³⁾. レイリー積分は, 周波数領域では, 探触子表面における圧力速度と, ポイントソースとの積を探触子の超音波放射面 S^t に渡って積分した形で表現されている. これらの点を考慮し, 簡単のため本研究ではポイントソースとして全空間でのスカラー波動問題における時間領域基本解 (11) を与えた次の式を用いた.

$$p^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = \int_{S^t} p_0 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \frac{\partial p(\mathbf{y}, t)}{\partial n_y} dS_y, \quad \frac{\partial p(\mathbf{y}, t)}{\partial n_y} = \begin{cases} \sin(2\pi t/T) & (t \leq T) \\ 0 & (t > T) \end{cases} \quad (38)$$

ここで, T は入射波の周期, p_0 は振幅 $\partial p(\mathbf{y}, t)/\partial n_y$ で探触子表面における圧力の速度分布を与えている. なお, 式 (38) は畳込み積分を含んだ形で表されている. そこで, 本研究では, 入射波の計算における畳込み積分の扱いに対しても, 演算子積分法を用いて計算を行った.

図-5 空洞がない場合のモルタル中を伝搬する超音波の可視化 (a) $t = 2\mu s$ (b) $t = 5\mu s$

図-6 空洞がある場合のモルタル中を伝搬する超音波の可視化 (a) $t = 2\mu s$ (b) $t = 5\mu s$

(2) 解析結果

次に、前節で設定した入射波、入射角を用いて行った空気超音波法を想定した基礎的なシミュレーション結果を示す。ただし、入射波の周期は $T = 2\mu s$ (中心周波数 500kHz を想定) で与え、できるだけポイントソースに近くなるよう、 $S^t = 1mm$ とした。総時間ステップ数 N 、および演算子積分法のパラメータ L については $L = N = 1024$ とし、時間増分を $\Delta t = 0.02\mu s$ とした。このとき、 $\mathcal{R} \simeq 0.9865989$ となる。

なお、通常の演算子積分時間領域境界要素法を用いて境界条件 (17), (18), (19) を適切に処理できたとしても、必要記憶容量は $O(NM^2)$ 程度であるため、 N の大きい本解析は通常の計算機ではまず実行できない。

図-5 はモルタル内での超音波変位の絶対値を可視化した結果を示している。ただし、可視化の都合上、モルタル内での変位の絶対値を 1.5×10^4 倍していることに注意されたい。図-5(a) より、空気側から入射された入射超音波が、界面でモード変換されることにより、モルタル内で P 波、および S 波が発生している様子を見取れる。また、図-5(b) では、ヘッドウェーブ、および S 波からやや遅れた位置にて表面波の存在も確認することができる。

一方、比較のため、モルタル中に空洞欠陥が存在する場合の解析結果を図-6 に示す。ただし、空洞の境界条件は、空洞内部の空気による影響を考慮することなく、表

図-7 $t = 6\mu s$ における表面漏洩波

面力成分を $t_i = 0$ として与えた。図-6(a) より、モルタル内で発生した P 波の空洞による散乱波を確認することができる。また図-6(b) では、S 波の空洞による散乱、図-5(b) と同様に表面波やヘッドウェーブの発生を確認することができる。

最後に、図-7 に $t = 6\mu s$ での空気、モルタル中の超音波を可視化した結果を示す。ただし、空気およびモルタル中のそれぞれのスケールは異なることに注意されたい。図-7 より、空気中において、モルタルの界面を伝搬する表面波による空気中への表面漏洩波も確認することができる。

以上の結果より、波動論の観点から見て、解析結果がそれぞれ適切に波動現象を再現していることが確認された。

6. おわりに

本論文では、流体-固体連成問題のための、演算子積分時間領域境界要素法の定式化を示した。流体-固体界面における境界条件を処理するために、圧力や変位といった物理量を新たな像空間で定義することで、演算子積分法を適用した境界積分方程式を容易に扱うことができた。このような取扱いをした場合、通常の演算子積分時間領域境界要素法と異なり、影響関数を計算終了時まで全て保存しておく必要はないため、記憶容量を大幅に削減することができる。また、数値解析例として、非接触超音波探傷法として近年注目を集めている空気超音波法を想定した基礎的なシミュレーションを行い、本手法および解析結果の妥当性を示した。

今後は、3次元問題への拡張や、高速多重極法の適用等を行うと同時に、より本格的な空気超音波の解析を、実験と比較しつつ、行っていく予定である。

謝辞

本研究を行うにあたり、故福井卓雄教授（福井大学大学院工学研究科原子力・エネルギー安全工学専攻）に生前多くのご助言をいただきました。また、本研究は平成22年度科学研究費補助金（基盤研究（B）：21360211）の支援を得て行われたものです。この場をお借りして感謝申し上げます。

Appendix A 演算子積分法

演算子積分法についてまとめておく。Lubich は、畳込み積分 $f(t) * g(t)$ を、 $f(t)$ のラプラス変換を用いた離散化畳込み積分によって近似する手法を提案した（詳しい条件については文献¹⁾²⁾³⁾等を参照）。

一般的に、畳込み積分は次のように表される。

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (39)$$

Lubich の演算子積分法によれば、式 (39) で表される畳込み積分は、時間 t を時間増分 Δt を用いて N ステップに分割すれば、次のように近似される。

$$f(n\Delta t) * g(n\Delta t) \simeq \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}(\Delta t)g(j\Delta t), \quad (n = 0, 1, \dots, N) \quad (40)$$

ただし、 $\omega_j(\Delta t)$ は演算子積分法における重み関数であり、複素変数 z に関する次の級数展開

$$F\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(\Delta t)z^n \quad (41)$$

によって決定される。ここで、式 (41) における関数 F は、ラプラスパラメータ s を用いた関数 $f(t)$ のラプラ

ス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (42)$$

を表している。これより、式 (41) における重み関数 ω_n は、コーシーの積分公式を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} \omega_n(\Delta t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\mathcal{R}} F\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) z^{-n-1} dz \\ &\simeq \frac{\mathcal{R}^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\gamma(z_l)}{\Delta t}\right) e^{\frac{-2\pi i n l}{L}} \end{aligned} \quad (43)$$

ここで、 f のラプラス変換である関数 F の存在を保証するためには、引数 $\gamma(z)/\Delta t$ の実部が正のときに正則でなければならない。また、式 (43) の $\gamma(z_l)$ は線形マルチステップ法（差分法）における生成多項式の商であり、引数 z_l は半径 $\mathcal{R} < 1$ の円周上の等分点 L を考え、 $z_l = \mathcal{R}e^{2\pi i l/L}$ によって表される。 $\mathcal{R}$ は目標とする精度 ϵ によって決定されるパラメータで、 $\mathcal{R}^L = \sqrt{\epsilon}$ により決定される。

参考文献

- 1) C. Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, Vol. 52, pp. 129-145, 1988.
- 2) C. Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus II, *Numer. Math.*, Vol. 52, pp. 413-425, 1988.
- 3) 福井卓雄・斎藤隆泰 : Lubich の演算子積分法における高速多重極法, 日本シミュレーション学会論文誌, 小特集 : 境界要素法の新展開, Vol.28, No.3, pp.17-22, 2009.
- 4) T. Saitoh, S. Hirose and T. Fukui: Convolution quadrature boundary element method and acceleration by fast multipole method in 2-D viscoelastic wave propagation, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, Vol. 57, pp.385-393, 2009.
- 5) T. Saitoh and S. Hirose: Parallelized fast multipole BEM based on the convolution quadrature method for 3-D wave propagation problems in time-domain, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, Vol. 10, 012242, 2010.
- 6) 斎藤隆泰・石田貴之・福井卓雄・廣瀬壮一 : 演算子積分法および高速多重極法を用いた新しい二次元時間領域動弾性境界要素法について, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.11, pp. 193-200, 2008.
- 7) 廣瀬壮一・北原道弘 : 液体-固体の境界近傍における欠陥による散乱, 境界要素法論文集, Vol.8, pp.63-68, 1991.
- 8) 小林昭一編著 : 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.
- 9) 福井卓雄 : 境界要素法の研究-高速・高精度計算法の開発と応用-, 京都大学学位論文, 1998.
- 10) 小田島淳・中畑和之・北原道弘 : 位相の反転・非反転現象に着目した欠陥による後方散乱波形解析, 境界要素法論文集, Vol.18, pp.23-28, 2001.
- 11) 非破壊検査, 検査と材料評価, 特集, 非接触超音波法の新展開, Vol.58, No.7, 日本非破壊検査協会, 2009.
- 12) J. L. Rose: *Ultrasonic Waves in Solid Media*, Cambridge University Press, 1999.
- 13) L. W. Schmerr: *Fundamentals of ultrasonic nondestructive evaluation*, Plenum Press, 1998.

(2011 年 3 月 8 日 受付)