Haar wavelet を用いた 2 次元拡散問題時間域境界要素法における 係数行列保存成分数の解析自由度依存性

Estimation of the Number of Non-zero Entries of Coefficient Matrix
in Time-Domain Boundary Element Method with Haar Wavelets for 2-D Diffusion Problems

紅露一寛*・阿部和久**
Kazuhiro KORO and Kazuhisa ABE

*正会員 博士(工学) 新潟大学准教授 大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)
**正会員 工博 新潟大学教授 工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

In the time-domain BEM with Haar wavelets for 2-D diffusion problems, the relation between the number of non-zero entries of the coefficient matrices and the degree of freedom(DOF) N is theoretically investigated using the information on the size and the arrangement of the support of the basis functions. The coefficient matrices are compressed using the Beylkin-type level-independent truncation scheme with a DOF-independent prescribed threshold value. The number of non-zero entries of the matrix $\mathbf{G}^{(L,p)}$ and $\mathbf{H}^{(L,p)}$ ($1 \leq p \leq L$, L : current time step), $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,p)})$ and $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,p)})$, increases in proportion to the factors $\log N$, $N^{1/2}$, N and $N \log N$, except for the behavior in the smaller DOF range where $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,p)})$ and $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,p)}) \sim O(N^2)$. For $M \gg 1$ and $N \gg 1$, $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,p)})$ and $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,p)})$ show $O(N \log N)$ in matrix compression with a prescribed threshold value λ .

Key Words : time-domain BEM, Haar wavelet, matrix compression, diffusion equation

1. はじめに

境界要素法 (BEM) は, 原則として境界上の離散化のみで対象とする問題の近似解を求めることができる. そのため, BEM において離散化により得られる連立一次方程式の自由度が有限要素法 (FEM) などの領域型解法に比べて小さくなる¹⁾. BEM の問題の規模の小ささは, 提案当初こそ利点として考えられたが, 定常問題では離散化方程式の係数行列が密となるため, 解析の際には $O(N^2)$ の記憶容量と $O(N^2)$ または $O(N^3)$ の計算量を要する. それゆえ, BEM の大規模解析への適用は困難と考えられてきた.

この BEM の計算効率上の欠点を解消すべく, 高速多重極展開法^{2),3),4)}や, wavelet 法^{5),6),7)}などの高速化・効率化手法が提案され, 国内外の多くの研究者によりその実用化に関する研究が進められている. 本研究で対象とする wavelet 法は, 境界積分方程式の離散化に wavelet 基底を用いる方法で, 係数行列のスパース化により使用メモリと計算量の削減を図るものである. wavelet 法における係数行列のスパース化の鍵は, wavelet のゼロモーメント性 (基底関数と所定次以下の単項式との直交性) にある. BEM における係数行列成分は, 基本解と基底関数である wavelet との積を境界積分することで得られるため, wavelet 基底がゼロモーメント性を有することは, この境界積分における基本解の低次成分

の寄与が消失することを意味する. そのため, 係数計算の際に取り扱う境界積分の定義域において被積分関数の変動が緩やかであれば, 境界積分値が微小となることが期待でき, 微小な係数成分の切り捨てによりスパースな係数行列を作り出すことができる.

wavelet 法は, 提案当初は従来の離散化により得られた係数行列に wavelet 変換を代数的に作用させることで行列のスパース化を図る^{8),9)}ものが多数を占めていたが, 解析時の計算量を可能な限り削減することを目的として, 境界上の関数近似および Galerkin 法離散化に用いる重み関数に wavelet 基底を用いる定式化^{6),7),10)}も採用されている. 既往の研究成果の大半は定常問題, 特に Laplace 問題における計算効率の改善効果の検討に充てられている. 特に著者らはこれまで, 境界要素解析に適した非直交スプライン wavelet を構成し⁷⁾, Laplace 問題における最適な切り捨て基準値の実用的決定法¹⁰⁾の提案や, Laplace 問題において最適な切り捨て基準値の下での wavelet BEM 解析における係数行列の保存成分数の評価¹¹⁾などに取り組んできた. 著者以外にも, 半直交 wavelet を用いた Goswami¹²⁾ら, 階層依存型切り捨て手法を用いた Schwab らの研究¹³⁾や, 境界要素法による大規模流体解析への応用¹⁴⁾, Poisson 方程式を対象とした境界要素解析における高速多重極法・wavelet 法による高速化効果の相互比較¹⁵⁾, Poisson 方程式の領域積分項を多重相反法で離散化する際に wavelet 基底を適用する試み¹⁶⁾などが報告されている.

前述のように, 境界要素解析のための高速化・効率

† Dedicated to the memory of Prof. Takeshi TAMURA and Prof. Takuo FUKUI

化手法は、係数行列の密行列化による計算効率の悪さが最も深刻である定常問題を対象とするものが大部分であったが、近年では、非定常問題の時間域境界要素解析にもその適用範囲を広げている。wavelet 法においても、Ravnik らのグループは、渦度と流速とを未知量とした境界要素流れ解析において、渦度の輸送方程式および非定常熱伝導方程式に対応する境界要素方程式に対し、Haar wavelet に基づく離散 wavelet 変換を作用させることで、境界要素解析の効率化を図っている¹⁴⁾。また、著者らは、2次元拡散問題の時間域境界積分方程式を対象に、境界積分方程式の離散化に wavelet 基底を用いる方法を提案し、wavelet 基底による離散化は特に離散畳み込み積分計算の効率化に対して有効であると結論付けている¹⁷⁾。同様の検討は2次元スカラー波動問題の時間域境界要素解析でもなされている¹⁸⁾。また、Barmada は、拡散問題の時間域積分方程式を対象に、時間の離散化にのみ wavelet 基底を用いる方法を提案しており¹⁹⁾、著者らは時間だけでなく境界積分方程式の離散化にも適用する定式化を示している²⁰⁾。

なお、wavelet 法に関する既往の研究では、係数成分の切り捨てにより係数行列の保存成分数が減少することで解析時の使用メモリと計算量が削減できることもあり、境界要素解析の効率化を目的とした wavelet 法の効率化性能は、実際の解析での係数行列の保存成分数の大小だけでなく、保存成分数の解析自由度に対する依存性を通じても評価されてきた。特に、Schneider らは、Laplace 問題の wavelet BEM において、階層依存型係数切り捨て手法を採用した場合の保存成分数が $O(N \log N)$ (N : 解析自由度) で推移することを明らかにしている⁶⁾。著者らは、同様の問題において、Beylkin 型係数切り捨て手法を適用した場合の保存成分数が $O(N^{1+\gamma})$ ($0 < \gamma < 1$) の挙動を示すことを明らかにしている¹¹⁾。しかしながら、これらはいずれも Laplace 問題を対象に、境界要素解の漸近収束性を考慮した上で検討されたものであり、非定常問題の時間域境界要素法における同様の検討は未着手のままとまっている。そのため、数値実験結果から離散畳み込み積分計算の効率化に対する実効性は確認されているが、計算時に用いる係数行列の保存成分数に及ぼす離散化条件・自由度や切り捨て基準値の影響については評価されていない。

そこで本研究では、2次元線形拡散問題の時間域積分方程式を Haar wavelet を用いて離散化し、その結果得られる係数行列成分を Beylkin 型切り捨て手法を適用する場合を対象に、係数行列の保存成分数の解析自由度依存性を理論的に明らかにする。なお、同様の評価は、本来であれば近似解の誤差挙動を考慮に入れたものとする必要があるが、今回は最初の検討として、切り捨て基準値を自由度に依存することなく事前に所定の値に定めた場合を考察の対象とする。自由度依存性に関する解析的な評価結果の妥当性については、簡単な数値実験を通して検証する。

2. 2次元拡散問題における時間域境界積分方程式の定式化

拡散問題の支配方程式と境界条件、初期条件は、次式で与えられる。

$$\dot{u}(\mathbf{x}, t) = \kappa \nabla^2 u(\mathbf{x}, t), \quad (\text{in } \Omega), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t)|_{t=0} &= u_0(\mathbf{x}), \quad (\text{in } \Omega), \\ u(\mathbf{x}, t) &= \bar{u}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{on } \Gamma_u), \\ q(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \bar{q}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{on } \Gamma_q), \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 Ω は領域であり、境界 Γ は $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$, $\emptyset = \Gamma_u \cap \Gamma_q$ なる2つの部分境界 Γ_u, Γ_q からなるものとする。なお、 κ は定数であり、 n は境界上の点における外向き法線方向を表す。また、 u は場の変数、 $q = \partial u / \partial n$, $t \geq 0$ は時間であり、 $\nabla = \partial / \partial x_i$, $\dot{u}$ は u の時間微分である。

式 (1), (2) の拡散問題に対応する時間域境界積分方程式は、次式で与えられる¹⁾。

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{\xi}, t)u(\boldsymbol{\xi}, t) + \kappa \int_0^t \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, t)u(\mathbf{x}, \tau) d\Gamma_x d\tau \\ - \kappa \int_0^t \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, t)q(\mathbf{x}, \tau) d\Gamma_x d\tau \\ - \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}, t_0; \boldsymbol{\xi}, t)u_0(\mathbf{x}) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $\boldsymbol{\xi}$ はソース点、 $\mathbf{x}$ は積分点であり、 $c(\boldsymbol{\xi}, t)$ は点 $\boldsymbol{\xi}$ において境界が滑らかな場合には $1/2$ となる。

u^*, q^* は、式 (1) の問題の基本解であり、

$$\begin{aligned} u^*(\mathbf{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, t) &= \frac{H(t-\tau)}{4\pi\kappa(t-\tau)} \exp\left[-\frac{r^2}{4\kappa(t-\tau)}\right], \\ q^*(\mathbf{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, t) &= \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, t) \\ &= -\frac{r}{8\pi\kappa^2(t-\tau)^2} \frac{\partial r}{\partial n} \exp\left[-\frac{r^2}{4\kappa(t-\tau)}\right], \end{aligned} \quad (4)$$

で与えられる。なお、 $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ であり、 $H(\cdot)$ は Heaviside のステップ関数である。

3. 時間域境界積分方程式の離散化における Haar wavelet の適用

3.1 時間に関する離散化

式 (3) の時間域境界積分方程式を離散化して代数的に解くために、まず時間に関する離散化について考える。本研究では、文献¹⁷⁾と同様の離散化を行なう。まず、時間領域として $0 \leq \tau \leq t_L = L\Delta t$ を考え、式 (3) の u と q を次式で近似する。 $t_p = p\Delta t$, $t_{p-1} = (p-1)\Delta t$, $p = 1, 2, \dots, L$ として、後退方向区分一定近似により、

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, \tau) &\approx u(\mathbf{x}, t_p) = u^{(p)}(\mathbf{x}), \quad (t_{p-1} < \tau \leq t_p) \\ q(\mathbf{x}, \tau) &\approx q(\mathbf{x}, t_p) = q^{(p)}(\mathbf{x}), \quad (t_{p-1} < \tau \leq t_p) \end{aligned} \quad (5)$$

であるものとする。

式 (5) を式 (3) に代入し、時刻 $t = t_L$ において時間域境界積分方程式が成り立つものとする。その結果、次の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & c(\boldsymbol{\xi})u^{(L)}(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} Q_L^{*(L)}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi})u^{(L)}(\boldsymbol{x})d\Gamma_x \\ & - \int_{\Gamma} U_L^{*(L)}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi})q^{(L)}(\boldsymbol{x})d\Gamma_x \\ & = \int_{\Omega} u^*(\boldsymbol{x}, 0; \boldsymbol{\xi}, t_L)u_0(\boldsymbol{x})d\Omega_x \\ & - \sum_{p=1}^{L-1} \int_{\Gamma} Q_p^{*(L)}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi})u^{(p)}(\boldsymbol{x})d\Gamma_x \\ & + \sum_{p=1}^{L-1} \int_{\Gamma} U_p^{*(L)}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi})q^{(p)}(\boldsymbol{x})d\Gamma_x, \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、被積分関数 $U_p^{*(L)}$, $Q_p^{*(L)}$ は、区間 $t_{p-1} < \tau \leq t_p$ で基本解 u^* , q^* を積分して、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U_p^{*(L)} &:= \kappa \int_{t_{p-1}}^{t_p} u^*(\boldsymbol{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, t_L)d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} [E_i(\alpha_{L-p+1}) - E_i(\alpha_{L-p})], \\ Q_p^{*(L)} &:= \kappa \int_{t_{p-1}}^{t_p} q^*(\boldsymbol{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, t_L)d\tau \\ &= -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} [e^{-\alpha_{L-p+1}} - e^{-\alpha_{L-p}}], \end{aligned} \quad (7)$$

なお、積分指数関数 E_i および α_{L-p+1} , α_{L-p} は次式の通りである。

$$\begin{aligned} E_i(x) &= \int_x^{\infty} \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta, \quad E_i(\infty) = 0, \\ \alpha_{L-p+1} &:= \frac{r^2}{4\kappa(t_L - t_{p-1})} = \frac{r^2}{4\kappa(L-p+1)\Delta t}, \\ \alpha_{L-p} &:= \frac{r^2}{4\kappa(t_L - t_p)} = \frac{r^2}{4\kappa(L-p)\Delta t}. \end{aligned} \quad (8)$$

3.2 Haar wavelet を用いた境界積分方程式の離散化

次に、Haar wavelet を用いて式 (7) の境界積分方程式を離散化する。式 (7) に含まれる $u^{(p)}(\boldsymbol{x})$, $q^{(p)}(\boldsymbol{x})$ を次の wavelet 級数で近似する。

$$\begin{aligned} u^{(p)}(\boldsymbol{x}) &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \phi_j(\boldsymbol{x})\hat{u}_j^{(p)} + \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{n_s \cdot 2^k} \psi_{k,l}(\boldsymbol{x})\tilde{u}_{k,l}^{(p)} \\ &= \sum_{j=1}^N w_j(\boldsymbol{x})U_j^{(p)} =: \tilde{u}^{(p)}(\boldsymbol{x}), \\ q^{(p)}(\boldsymbol{x}) &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \phi_j(\boldsymbol{x})\hat{q}_j^{(p)} + \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{n_s \cdot 2^k} \psi_{k,l}(\boldsymbol{x})\tilde{q}_{k,l}^{(p)} \\ &= \sum_{j=1}^N w_j(\boldsymbol{x})Q_j^{(p)} =: \tilde{q}^{(p)}(\boldsymbol{x}), \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\phi_j(\boldsymbol{x})$, $\psi_{k,l}(\boldsymbol{x})$ はそれぞれ scaling 関数, wavelet であり、これらをまとめて $w_j(\boldsymbol{x})$ で表わす。 $\hat{u}_j^{(p)}$, $\hat{q}_j^{(p)}$, $\tilde{u}_{k,l}^{(p)}$, $\tilde{q}_{k,l}^{(p)}$ は時刻 t_p での wavelet 展開係数であり、式 (9) では $\hat{u}_j^{(p)}$, $\hat{q}_j^{(p)}$ を $U_j^{(p)}$ で、 $\tilde{u}_{k,l}^{(p)}$, $\tilde{q}_{k,l}^{(p)}$ を $Q_j^{(p)}$ でそれぞれまとめて表している。また、 M は wavelet 展開の最高階層であり、 n_s は scaling 関数の総数である。基底の総数 N は $N = n_s \cdot 2^{M+1}$ となる。

本研究では、wavelet として Haar wavelet⁷⁾を用いる。Haar wavelet は区間一定関数を scaling 関数に持ち、コンパクトサポートで閉じた形で定義可能な唯一の正規直交 wavelet である。scaling 関数 ϕ_j と wavelet $\psi_{k,l}$ は、有界区間 $0 \leq \eta \leq 1$ において n_s 個の scaling 関数を導入した場合、次式で定義できる。

$$\phi_j(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n_s}}, & \frac{j-1}{n_s} \leq \eta \leq \frac{j}{n_s} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (10)$$

$$\psi_{k,l}(\eta) = \begin{cases} \frac{2^{k/2}}{\sqrt{n_s}}, & \frac{2^{-k}(l-1)}{n_s} \leq \eta \leq \frac{2^{-k}l}{n_s} \\ -\frac{2^{k/2}}{\sqrt{n_s}}, & \frac{2^{-k}(l-1/2)}{n_s} \leq \eta \leq \frac{2^{-k}l}{n_s} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (11)$$

ただし、 $j = 1, 2, \dots, n_s$, $k = 0, 1, \dots, M$, $l = 1, 2, \dots, n_s \cdot 2^k$ とする。

なお、式 (11) の wavelet は 1 次のゼロモーメント性を有しており、次式を満足する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{k,l}(\eta)d\eta = 0. \quad (12)$$

ここで、式 (9) を式 (6) に代入し、 w_i ($i = 1, 2, \dots, N$) を重み関数として Galerkin 法を適用する。その結果、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} w_i(\boldsymbol{\xi})\tilde{u}^{(L)}(\boldsymbol{\xi})d\Gamma_{\xi} \\ & + \int_{\Gamma} w_i(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma} Q_L^{*(L)}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi})\tilde{u}^{(L)}(\boldsymbol{x})d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} \\ & - \int_{\Gamma} w_i(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma} U_L^{*(L)}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi})\tilde{q}^{(L)}(\boldsymbol{x})d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} \\ & = \int_{\Gamma} w_i(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Omega} u^*(\boldsymbol{x}, t_0; \boldsymbol{\xi}, t_L)u_0(\boldsymbol{x})d\Omega_x d\Gamma_{\xi} \\ & - \sum_{p=1}^{L-1} \int_{\Gamma} w_i(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma} Q_p^{*(L)}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi})\tilde{u}^{(p)}(\boldsymbol{x})d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} \\ & + \sum_{p=1}^{L-1} \int_{\Gamma} w_i(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma} U_p^{*(L)}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi})\tilde{q}^{(p)}(\boldsymbol{x})d\Gamma_x d\Gamma_{\xi}. \end{aligned} \quad (13)$$

式 (13) において、 $g_{ij}^{(L,p)}$, $h_{ij}^{(L,p)}$, $b_i^{(L)}$ を次式のように定

義すると,

$$\begin{aligned} g_{ij}^{(L,p)} &:= \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} U_p^{*(L)}(x; \xi) w_j(x) d\Gamma_x d\Gamma_{\xi}, \\ h_{ij}^{(L,p)} &:= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} w_i(\xi) w_j(\xi) d\Gamma_{\xi} \\ &\quad + \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} Q_p^{*(L)}(x; \xi) w_j(x) d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} \\ b_i^{(L)} &= \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Omega} u^*(x, t_0; \xi, t_L) u_0(x) d\Omega_x d\Gamma_{\xi}, \end{aligned} \quad (14)$$

式 (13) より次の代数方程式を得る.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^N h_{ij}^{(L,L)} U_j^{(L)} - \sum_{j=1}^N g_{ij}^{(L,L)} Q_j^{(L)} \\ &= b_i^{(L)} - \sum_{p=1}^{L-1} \left[\sum_{j=1}^N \left\{ h_{ij}^{(L,p)} U_j^{(p)} - g_{ij}^{(L,p)} Q_j^{(p)} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

行列とベクトルを用いて表すと,

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}^{(L,L)} \mathbf{U}^{(L)} - \mathbf{G}^{(L,L)} \mathbf{Q}^{(L)} \\ &= \mathbf{b}^{(L)} - \sum_{p=1}^{L-1} \left[\mathbf{H}^{(L,p)} \mathbf{U}^{(p)} - \mathbf{G}^{(L,p)} \mathbf{Q}^{(p)} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

を得る. なお, $\mathbf{G}^{(L,p)}$, $\mathbf{H}^{(L,p)}$, $\mathbf{G}^{(L,L)}$, $\mathbf{H}^{(L,L)}$ はそれぞれ $g_{ij}^{(L,p)}$, $h_{ij}^{(L,p)}$, $g_{ij}^{(L,L)}$, $h_{ij}^{(L,L)}$ を成分に持つ係数行列であり, $\mathbf{b}^{(L)}$ は $b_i^{(L)}$ を成分に持つベクトルである. $\mathbf{U}^{(L)}$, $\mathbf{Q}^{(L)}$ はそれぞれ $U_j^{(p)}$, $Q_j^{(L)}$ を成分に持つベクトルであり, 時刻 $t = t_L$ での境界要素解は式 (16) をこれらの未知成分について解くことで得られる.

4. 係数行列成分の切り捨て手法

wavelet を用いた境界要素解析においては, 式 (15) ないしは (16) の係数行列成分は, その大半が wavelet のゼロモーメント性 (12) により微小な成分となることが予想される. そのため, 使用メモリおよび計算量の削減のために, 微小な係数成分を切り捨てる (保存や乗算の対象としない) こととする. 切り捨て判定規準には Beylkin 型の切り捨て手法を採用し, 係数 $g_{ij}^{(L,L)}$, $h_{ij}^{(L,L)}$, $g_{ij}^{(L,p)}$, $h_{ij}^{(L,p)}$ の大きさと切り捨て基準値とを比較し, 次式を満足する成分を切り捨て成分と判定する. $p = 1, 2, \dots, L$ として,

$$\begin{aligned} &|g_{ij}^{(L,p)}| < \lambda \text{ and } \text{supp} w_i \cap \text{supp} w_j = \emptyset, \\ &|h_{ij}^{(L,p)}| < \lambda \text{ and } \text{supp} w_i \cap \text{supp} w_j = \emptyset, \end{aligned} \quad (17)$$

なお, 基底関数のサポートが重複する ($\text{supp} w_i \cap \text{supp} w_j \neq \emptyset$) 係数成分については, すべて保存するものとする. 式 (17) において, λ は切り捨て基準値である. 解析においては, λ の値は近似解に含まれる離散化誤差と切り捨てに起因する誤差とが同等となるように設定するのが望ましい. なお, 既往の研究¹⁷⁾では, 切り捨て対象成分の閾値は, 被積分関数 $U_p^{*(L)}$, $Q_p^{*(L)}$ を定常問題 (Laplace 問題) の基本解に置き換えて得ら

れた係数成分の絶対最大値で与えた g_{max} , h_{max} と切り捨て基準値 λ との積で与えている. 本研究では, 定常問題では g_{max} , h_{max} とともに $N \gg 1$ のときに一定値に漸近する¹⁰⁾ことを考慮して, 閾値そのものを切り捨て基準値 λ で置き換え, 係数行列の保存成分数の評価を進めることとする.

5. 係数行列の保存成分数の評価

式 (16) の係数行列 $\mathbf{G}^{(L,p)}$, $\mathbf{H}^{(L,p)}$ ($p = 1, 2, \dots, L$) は, 係数の生成に用いた基底関数 w_i, w_j の階層レベル k_i, k_j に対応する小行列に分割することができる. そのため, $\mathbf{G}^{(L,p)}$, $\mathbf{H}^{(L,p)}$ の保存成分数 $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,p)})$, $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,p)})$ は, 小行列毎に評価した成分数を全階層にわたって和をとることで評価することができる.

ここで, 行列 $\mathbf{G}^{(L,p)}$ または $\mathbf{H}^{(L,p)}$ を行列 $\mathbf{A}$ と表わす. この行列において, 階層レベル (k_i, k_j) に対応する小行列を $\mathbf{A}_{k_i, k_j}$ と定義すると, 切り捨て後の $\mathbf{A}_{k_i, k_j}$ の保存成分数 $\mathcal{N}(\mathbf{A}_{k_i, k_j})$ は次のように評価できる¹⁰⁾.

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}_{k_i, k_j}) \leq C \cdot (2^{k_i} + 2^{k_j} + \gamma 2^{(k_i + k_j)} \delta), \quad (18)$$

ここで, δ は保存される係数成分を生成する際に用いる 2 つの基底のサポート間距離の上限値であり, C は定数, $\gamma > 0$ とする.

係数行列 $\mathbf{A}$ 全体の保存成分数は, 式 (18) を k_i, k_j について和をとることで次式で評価できる.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{A}) &\leq C_0 \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M \mathcal{N}(\mathbf{A}_{k_i, k_j}) \\ &\leq C_1 N \log N + C_2 \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{(k_i + k_j)} \delta, \end{aligned} \quad (19)$$

なお, C_0, C_1, C_2 は定数であり, N は解析自由度 (wavelet 級数展開の項数) であり, $N = n_s \cdot 2^{M+1}$ (n_s : scaling 関数の総数) であることを申し添えておく.

5.1 係数行列成分の近似評価

式 (19) より, 係数行列の保存成分数の漸近評価のためには, 保存される係数成分のサポート間距離の上限値 δ を評価する必要がある. 本研究では, δ を係数行列成分の近似評価式から与える. そこで以下では, 係数行列成分の近似評価式を示す.

近似評価の対象となるのは, 式 (14) の係数行列成分 $g_{ij}^{(L,p)}$, $h_{ij}^{(L,p)}$ ($p = 1, 2, \dots, L$) である. 今, 保存成分数における解析自由度依存性の評価に必要となるのは, 式 (19) において w_i, w_j がともに wavelet で与えられる場合の係数行列保存成分のサポート間距離の上限値 δ である. そのため, ここでは基底関数 w_i, w_j がともに wavelet である場合の近似評価式を考える. 式 (11),

(12) に留意して、近似評価式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} |g_{ij}^{(L,p)}| &\leq \beta_g \cdot 2^{-\frac{3}{2}(k_i+k_j)} \left| \frac{d^2 U_p^{*(L)}}{dr^2} \right|, \\ |h_{ij}^{(L,p)}| &\leq \beta_h \cdot 2^{-\frac{3}{2}(k_i+k_j)} \left| \frac{d^3 U_p^{*(L)}}{dr^3} \right|, \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 β_g, β_h は定数である。

式 (20) に含まれる $U_p^{*(L)}$ の r に関する 2 階および 3 階導関数は、 $m = L - p$ として、

・ $p = L$ のとき

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^2 U_p^{*(L)}}{dr^2} \right| &= \frac{1}{4\pi} \left| \frac{d^2 E_i(\alpha_1)}{dr^2} \right| = \frac{1}{2\pi r^2} (1 + 2\alpha_1) e^{-\alpha_1}, \\ \left| \frac{d^3 U_p^{*(L)}}{dr^3} \right| &= \frac{1}{4\pi} \left| \frac{d^3 E_i(\alpha_1)}{dr^3} \right| \\ &= \frac{1}{\pi r^3} \left[1 + \alpha_1 (1 + 2\alpha_1) \right] e^{-\alpha_1}, \end{aligned} \quad (21)$$

・ $p \neq L$ のとき

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^2 U_p^{*(L)}}{dr^2} \right| &= \frac{1}{4\pi} \left| \frac{d^2 E_i(\alpha_{m+1})}{dr^2} - \frac{d^2 E_i(\alpha_m)}{dr^2} \right| \\ &= \frac{1}{2\pi r^2} \left| (1 + 2\alpha_{m+1}) e^{-\alpha_{m+1}} - (1 + 2\alpha_m) e^{-\alpha_m} \right|, \\ \left| \frac{d^3 U_p^{*(L)}}{dr^3} \right| &= \frac{1}{4\pi} \left| \frac{d^3 E_i(\alpha_{m+1})}{dr^3} - \frac{d^3 E_i(\alpha_m)}{dr^3} \right| \\ &= \frac{1}{\pi r^3} \left| \{1 + \alpha_{m+1} (1 + 2\alpha_{m+1})\} e^{-\alpha_{m+1}} \right. \\ &\quad \left. - \{1 + \alpha_m (1 + 2\alpha_m)\} e^{-\alpha_m} \right|. \end{aligned} \quad (22)$$

で与えられる。

5.2 行列 $\mathbf{G}^{(L,L)}$, $\mathbf{H}^{(L,L)}$ の保存成分数

まず、 $L = p$ の場合における係数行列 $\mathbf{G}^{(L,L)}$, $\mathbf{H}^{(L,L)}$ の保存成分数について考える。なお、行列 $\mathbf{G}^{(L,L)}$, $\mathbf{H}^{(L,L)}$ は解析第 1 ステップに生成される係数行列であり、各時間ステップで解くべき連立一次方程式の係数行列を構成するものである。

(1) 行列 $\mathbf{G}^{(L,L)}$

行列 $\mathbf{G}^{(L,L)}$ の成分 $g_{ij}^{(L,L)}$ の大きさは、式 (20), (21) より、

$$|g_{ij}^{(L,L)}| \leq \frac{\beta_g 2^{-\frac{3}{2}(k_i+k_j)}}{2\pi} \left[\frac{e^{-\frac{r^2}{4\kappa\Delta t}}}{r^2} + \frac{e^{-\frac{r^2}{4\kappa\Delta t}}}{2\kappa\Delta t} \right], \quad (23)$$

で評価できる。すなわち、係数の大きさは $r/\sqrt{4\kappa\Delta t} \ll 1$ の場合には r^{-2} に、 $r/\sqrt{4\kappa\Delta t} \gg 1$ の場合には $e^{-r^2/(4\kappa\Delta t)}$ にそれぞれ比例する。そこで、簡単のために、サポート間距離 r に応じて係数成分の大きさが次

式で評価できるものとする。

$$|g_{ij}^{(L,L)}| \leq \begin{cases} \frac{\beta_{g1} 2^{-\frac{3}{2}(k_i+k_j)}}{2\pi r^2}, & (0 \leq r \leq \epsilon_1 \sqrt{\kappa\Delta t}) \\ \frac{\beta_{g2} 2^{-\frac{3}{2}(k_i+k_j)} e^{-\frac{r^2}{4\kappa\Delta t}}}{4\pi\kappa\Delta t}, & (r > \epsilon_1 \sqrt{\kappa\Delta t}) \end{cases} \quad (24)$$

ここで、 $\beta_{g1}, \beta_{g2}, \epsilon_1$ は正の定数である。

保存対象となる成分は式 (17) より $|g_{ij}^{(L,L)}| \geq \lambda$ を満たすので、係数成分の大きさが式 (24) 第 1 式で評価可能な場合には、

$$r \leq \delta_{g1}, \quad \delta_{g1} := \sqrt{\frac{\beta_{g1}}{2\pi}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{4}(k_i+k_j)}, \quad (25)$$

を満たすこととなる。

$\delta_{g1} \leq \epsilon_1 \sqrt{\kappa\Delta t}$ を考慮すれば、保存成分に関するサポート間距離の上限値が式 (25) で与えられる条件として、基底関数の階層レベル (k_i, k_j) に関する次式を得る。

$$k_i + k_j \geq \frac{4}{3\ln 2} \left[\ln \left(\frac{1}{\epsilon_1 \sqrt{\kappa\Delta t}} \sqrt{\frac{\beta_{g1}}{2\pi}} \right) + \ln \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right]. \quad (26)$$

なお、 $\ln 2 = \log_e 2$ としている。

一方、係数成分の大きさが式 (24) 第 2 式で評価可能な場合については、 $|g_{ij}^{(L,L)}| \geq \lambda$ より、

$$\begin{aligned} r &\leq \sqrt{4\kappa\Delta t} \\ &\cdot \sqrt{\ln \left(\frac{\beta_{g2}}{4\pi\kappa\Delta t} \cdot \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{3\ln 2}{2} (k_i + k_j)} \end{aligned}$$

となるから、 $k_i + k_j$ について $k_i + k_j = 0$ のまわりで Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} \therefore r &\leq \sqrt{4\kappa\Delta t f_1} - \frac{3\ln 2}{4} \sqrt{\frac{4\kappa\Delta t}{f_1}} \cdot (k_i + k_j), \\ f_1 &= \ln \left(\frac{\beta_{g2}}{4\pi\kappa\Delta t} \cdot \frac{1}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

が成り立つ。そのため、以下では、式 (27) を満たすサポート間距離の上限値 δ_{g2} を次式で近似する。

$$\delta_{g2} \approx \sqrt{4\kappa\Delta t f_1}. \quad (28)$$

式 (25), (28) の結論を整理すると、行列 $\mathbf{G}^{(L,L)}$ において、係数成分の基底関数の階層レベルが k_i, k_j となるブロック小行列 $\mathbf{G}_{k_i, k_j}^{(L,L)}$ の保存成分数におけるサポート間距離の上限値 δ は、

$$\delta = \begin{cases} \delta_{g1}, & (k_i + k_j \geq \omega_{g1}) \\ \delta_{g2}, & (k_i + k_j < \omega_{g1}) \end{cases} \quad (29)$$

のように与えられることとなる。なお、 ω_{g1} は、 $\omega_{g1} \geq 1$ (式 (26) 右辺) を満足する最小の整数である。

式 (29) を用いて、係数行列 $\mathbf{G}^{(L,L)}$ の保存成分数の解析自由度依存性について考察する。

$\omega_{g1} < 0$ の場合には、全てのブロック小行列において $\delta = \delta_{g1}$ となるから、式 (29) を式 (19) に代入して計算

すると、保存成分数 $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)})$ は次式で評価できる。

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)}) &\leq C_1 N \log N + C_2 \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta \\ &\leq C_1 N \log N + C_3(\lambda, \kappa, \Delta t) N^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (30)$$

なお、 C_3 は切り捨て基準値、離散化条件に依存する定数である。この場合、保存成分数を増加因子として $N^{1/2}$ 、 $N \log N$ の 2 つを見出すことができ、最高階層レベル M の増加により解析自由度 N を大きくすると、 $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)}) \sim O(N \log N)$ を示すことができる。

$0 \leq \omega_{g1} \leq M$ の場合には、

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)}) &\leq C_1 N \log N + C_2 \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta \\ &\leq C_1 N \log N + C_2 \left[\sum_{k_i=0}^{\omega_{g1}-1} \sum_{k_j=\omega_{g1}-k_i}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta_{g1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k_i=\omega_{g1}}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta_{g1} + \sum_{k_i=0}^{\omega_{g1}-1} \sum_{k_j=0}^{\omega_{g1}-1-k_i} 2^{(k_i+k_j)} \delta_{g2} \right] \\ \therefore \mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)}) &\leq C_1 N \log N + C_4(\lambda) N^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C_5(\lambda, \kappa, \Delta t) \cdot 2^{1+\omega_{g1}}.\end{aligned}\quad (31)$$

のように評価できる。ここで、 C_4 、 C_5 は切り捨て基準値、離散化条件に依存する定数である。この場合、 ω_{g1} はその定義より最高階層 M に依存しないから、式 (31) 右辺第 3 項は定数項となり、その結果保存成分数の増加因子として $N^{1/2}$ 、 $N \log N$ の 2 つを見出すことができる。そのため、最高層レベル M を大きくすることで解析自由度 N を増加させると、保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)}) \sim O(N \log N)$ で推移する。

また、 $M < \omega_{g1} \leq 2M$ の場合には、 C_6 、 C_7 、 C_8 、 C_9 は切り捨て基準値、離散化条件に依存する定数として、

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)}) &\leq C_1 N \log N + C_2 \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta \\ &\leq C_1 N \log N + C_2 \sum_{k_i=0}^{\omega_{g1}-M-1} \sum_{k_j=0}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta_{g2} \\ &\quad + C_2 \sum_{k_i=\omega_{g1}-M}^M \sum_{k_j=0}^{\omega_{g1}-k_i-1} 2^{(k_i+k_j)} \delta_{g2} \\ &\quad + C_2 \sum_{k_i=\omega_{g1}-M}^M \sum_{k_j=\omega_{g1}-k_i}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta_{g1} \\ \therefore \mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)}) &\leq C_1 N \log N + C_6(\lambda) N^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C_7(\lambda, \kappa, \Delta t) (2M + 3 - \omega_{g1}) \cdot 2^{1+\omega_{g1}} \\ &\leq C_1 N \log N + C_6(\lambda) N^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C_8(\lambda, \kappa, \Delta t) \log N + C_9(\lambda, \kappa, \Delta t),\end{aligned}\quad (32)$$

となる。なお、 $M+1 = \log N - \log n_s$ である。この場合、保存成分数の増加因子は $N^{1/2}$ 、 $\log N$ 、 $N \log N$ の

3 種類が存在しており、最高階層レベル M を大きくすることで N を増加させると、保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)}) \sim O(N \log N)$ の挙動を示す。

なお、 $\omega_{g1} > 2M$ の場合には、全てのブロック小行列 $\mathbf{G}_{k_i, k_j}^{(L,L)}$ において $\delta = \delta_{g2}$ となるから、式 (19) より、

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)}) &\leq C_1 N \log N + C_2 \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta \\ &\leq C_1 N \log N + C_{10}(\lambda, \kappa, \Delta t) N^2,\end{aligned}\quad (33)$$

を得る。ただし、 C_{10} は切り捨て基準値、離散化条件に依存する定数である。この場合には、行列 $\mathbf{G}^{(L,L)}$ の保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)}) \sim O(N^2)$ で推移する。

(2) 行列 $\mathbf{H}^{(L,L)}$

行列 $\mathbf{H}^{(L,L)}$ の成分 $g_{ij}^{(L,L)}$ の大きさは、式 (21)、(22) より、

$$\begin{aligned}|h_{ij}^{(L,L)}| &\leq \frac{\beta_h 2^{-\frac{3}{2}(k_i+k_j)}}{\pi} \left[\frac{e^{-\frac{r^2}{4\kappa\Delta t}}}{r^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-\frac{r^2}{4\kappa\Delta t}}}{4\kappa\Delta t \cdot r} + \frac{r e^{-\frac{r^2}{4\kappa\Delta t}}}{8\kappa^2\Delta t^2} \right],\end{aligned}\quad (34)$$

で評価できる。そこで、係数の大きさは $r/\sqrt{4\kappa\Delta t} \ll 1$ の場合には r^{-3} に、 $r/\sqrt{4\kappa\Delta t} \gg 1$ の場合には $e^{-r^2/(4\kappa\Delta t)}$ にそれぞれ概ね比例するものと考え、簡単のために $|h_{ij}^{(L,L)}|$ がサポート間距離に応じて次式で与えられるものとする。

$$|h_{ij}^{(L,L)}| \leq \begin{cases} \frac{\beta_{h1} 2^{-\frac{3}{2}(k_i+k_j)}}{\pi r^3}, & (r \leq \epsilon_2 \sqrt{\kappa\Delta t}), \\ \frac{\beta_{h2} 2^{-\frac{3}{2}(k_i+k_j)}}{8\pi\kappa^2\Delta t^2} e^{-\frac{r^2}{4\kappa\Delta t}}, & (r > \epsilon_2 \sqrt{\kappa\Delta t}), \end{cases}\quad (35)$$

ここで、 β_{h1} 、 β_{h2} 、 ϵ_2 は正の定数である。

保存対象となる成分は式 (17) より $|h_{ij}^{(L,L)}| \geq \lambda$ を満たすので、係数成分の大きさが式 (35) 第 1 式で評価可能な場合には、

$$r \leq \delta_{h1}, \quad \delta_{h1} := \left(\frac{\beta_{h1}}{\pi} \right)^{1/3} \lambda^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}(k_i+k_j)}, \quad (36)$$

を満たすこととなる。

$\delta_{h1} \leq \epsilon_2 \sqrt{\kappa\Delta t}$ を考慮すれば、保存成分に関するサポート間距離の上限値が式 (36) で与えられる条件として、基底関数の階層レベル (k_i, k_j) について次式を得る。

$$k_i + k_j \geq \frac{2}{\ln 2} \left[\ln \left\{ \frac{1}{\epsilon_2 \sqrt{\kappa\Delta t}} \left(\frac{\beta_{h1}}{\pi} \right)^{1/3} \right\} + \ln \frac{1}{\lambda^3} \right]. \quad (37)$$

一方、係数成分の大きさが式 (35) 第 2 式で評価可能な場合については、 $|h_{ij}^{(L,L)}| \geq \lambda$ より、

$$\begin{aligned}r &\leq \sqrt{4\kappa\Delta t} \\ &\cdot \sqrt{\ln \left(\frac{\beta_{h2}}{8\pi\kappa^2\Delta t^2} \cdot \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{3 \ln 2}{2} (k_i + k_j)},\end{aligned}$$

となるから、 $k_i + k_j$ について $k_i + k_j = 0$ のまわりで Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} \therefore r &\leq \sqrt{4\kappa\Delta t f_2} - \frac{3\ln 2}{4} \sqrt{\frac{4\kappa\Delta t}{f_2}} \cdot (k_i + k_j), \\ f_2 &= \ln \left(\frac{\beta_{h2}}{8\pi\kappa^2\Delta t^2} \cdot \frac{1}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

が成り立つ。そのため、以下では式 (38) を満たすサポート間距離の上限值 δ_{h2} を次式で近似する。

$$\delta_{h2} \approx \sqrt{4\kappa\Delta t f_2}. \quad (39)$$

式 (36), (39) の結論を整理すると、行列 $\mathbf{H}^{(L,L)}$ において、係数成分の基底関数の階層レベルが k_i, k_j となるブロック小行列 $\mathbf{H}_{k_i, k_j}^{(L,L)}$ の保存成分数におけるサポート間距離の上限值 δ は、

$$\delta = \begin{cases} \delta_{h1}, & (k_i + k_j \geq \omega_{h1}) \\ \delta_{h2}, & (k_i + k_j < \omega_{h1}) \end{cases} \quad (40)$$

のように与えられることとなる。なお、 ω_{h1} は、 $\omega_{h1} \geq$ (式 (37) 右辺) を満足する最小の整数である。

行列 $\mathbf{G}^{(L,L)}$ の場合と同様に、式 (40) を用いて、係数行列 $\mathbf{H}^{(L,L)}$ の保存成分数の解析自由度依存性について調べてみる。

$\omega_{h1} < 0$ の場合には、全てのブロック小行列において $\delta = \delta_{h1}$ となるから、式 (19), (40) より、保存成分数 $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)})$ は次式で評価できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)}) &\leq C_1 N \log N + C_{11} \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta \\ &\leq C_1 N \log N + C_{12}(\lambda, \kappa, \Delta t) N. \end{aligned} \quad (41)$$

ここで、 C_{11}, C_{12} は切り捨て基準値、離散化条件に依存する定数である。この場合、保存成分数の増加因子として $N, N \log N$ の2つを見出すことができ、 M の増加により解析自由度 N を増加させた場合、保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)}) \sim O(N \log N)$ の挙動を示す。

$0 \leq \omega_{h1} \leq M$ の場合には、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)}) &\leq C_1 N \log N + C_{11} \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta \\ &\leq C_1 N \log N + C_{11} \left[\sum_{k_i=0}^{\omega_{h1}-1} \sum_{k_j=\omega_{h1}-k_i}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta_{h1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k_i=\omega_{h1}}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta_{h1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k_i=0}^{\omega_{h1}-1} \sum_{k_j=\omega_{h1}-k_i}^{\omega_{h1}-1-k_i} 2^{(k_i+k_j)} \delta_{h2} \right], \\ \therefore \mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)}) &\leq C_1 N \log N + C_{13}(\lambda) N \\ &\quad + C_{14}(\lambda, \kappa, \Delta t) \omega_{h1} \cdot 2^{1+\omega_{h1}}. \end{aligned} \quad (42)$$

のように評価できる。なお、 C_{13}, C_{14} は切り捨て基準値、離散化条件に依存する定数である。この場合、式 (42) 右辺第3項は定数となり、保存成分数の増加因子として $N, N \log N$ の2種類が考えられる。そのため、 M を大きくすることで解析自由度 N を増加させると、保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)}) \sim O(N \log N)$ で推移する。

また、 $M < \omega_{h1} \leq 2M$ の場合には、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)}) &\leq C_1 N \log N + C_{11} \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta \\ &\leq C_1 N \log N + C_{11} \sum_{k_i=0}^{\omega_{h1}-M-1} \sum_{k_j=0}^M 2^{k_i+k_j} \delta_{h2} \\ &\quad + C_{11} \sum_{k_i=\omega_{h1}-M}^M \sum_{k_j=0}^{\omega_{h1}-k_i-1} 2^{k_i+k_j} \delta_{h2} \\ &\quad + C_{11} \sum_{k_i=\omega_{h1}-M}^M \sum_{k_j=\omega_{h1}-k_i}^M 2^{k_i+k_j} \delta_{h2}, \\ \therefore \mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)}) &\leq C_1 N \log N + C_{15}(\lambda) N \\ &\quad + C_{16}(\lambda, \kappa, \Delta t) (2M + 3 - \omega_{h1}) \cdot 2^{1+\omega_{h1}} \\ &\leq C_1 N \log N + C_{15}(\lambda) N \\ &\quad + C_{17}(\lambda, \kappa, \Delta t) \log N + C_{18}(\lambda, \kappa, \Delta t), \end{aligned} \quad (43)$$

となる。ここで、 $C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}$ は切り捨て基準値、離散化条件に依存する定数である。この場合、保存成分数の増加因子として $N, \log N, N \log N$ の3つが存在しているが、 M を大きくすることで解析自由度 N を増加させると、保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)}) \sim O(N \log N)$ の挙動を示す。

なお、 $\omega_{h1} > 2M$ の場合には、全てのブロック小行列 $\mathbf{H}_{k_i, k_j}^{(L,L)}$ において $\delta = \delta_{h2}$ となるから、式 (19) より、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)}) &\leq C_1 N \log N + C_{11} \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta \\ &\approx C_1 N \log N + C_{19}(\lambda, \kappa, \Delta t) N^2, \end{aligned} \quad (44)$$

を得る。なお、 C_{19} は切り捨て基準値、離散化条件に依存する定数である。この場合には、行列 $\mathbf{H}^{(L,L)}$ の保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)}) \sim O(N^2)$ で推移する。

5.3 行列 $\mathbf{G}^{(L,p)}, \mathbf{H}^{(L,p)}$ の保存成分数

以下では、 $L \neq p$ の場合における係数行列 $\mathbf{G}^{(L,p)}, \mathbf{H}^{(L,p)}$ の保存成分数について考える。なお、行列 $\mathbf{G}^{(L,p)}, \mathbf{H}^{(L,p)}$ は解析第2ステップ以降で逐次生成される係数行列であり、それらは全て式 (16) 右辺の畳み込み積分計算による既知ベクトル計算に用いられる。

(1) 行列 $\mathbf{G}^{(L,p)}$

まず、係数成分 $|g_{ij}^{(L,p)}|$ の大きさを与える式 (20) について考える。 $|d^2 U_p^{*(L)} / dr^2|$ を与える式 (22) において、

$e^{-\alpha_{m+1}}$, $\alpha_{m+1}e^{-\alpha_{m+1}}$ を Taylor 近似により,

$$\begin{aligned} e^{-\alpha_{m+1}} &\approx \left[1 + \frac{r^2}{4\kappa m(m+1)\Delta t}\right] e^{-\alpha_m}, \\ \alpha_{m+1}e^{-\alpha_{m+1}} &\approx \alpha_m e^{-\alpha_m} \\ &\quad - \left[1 - \frac{r^2}{4\kappa m\Delta t}\right] \frac{r^2}{4\kappa m(m+1)\Delta t} e^{-\alpha_m}, \end{aligned} \quad (45)$$

で与えることができるから, $|d^2 U_p^{*(L)}/dr^2|$ は次式で近似できる.

$$\left| \frac{d^2 U_p^{*(L)}}{dr^2} \right| \approx \frac{e^{-\alpha_m}}{8\pi\kappa m(m+1)\Delta t} \left| -1 + \frac{r^2}{2\kappa m\Delta t} \right|. \quad (46)$$

式 (46) は, $r=0$ のとき最大値 $1/(8\pi\kappa m(m+1)\Delta t)$ をとり, $r \rightarrow \infty$ で 0 に収束するから, 次式を満たす正数 ϵ_3 は必ず存在する.

$$\frac{e^{-\alpha_m}}{8\pi\kappa m(m+1)\Delta t} \left| -1 + \frac{r^2}{2\kappa m\Delta t} \right| \leq \frac{e^{-\frac{\alpha_m}{\epsilon_3}}}{8\pi\kappa m(m+1)\Delta t}. \quad (47)$$

よって式 (46) より

$$\left| \frac{d^2 U_p^{*(L)}}{dr^2} \right| \leq \frac{e^{-\frac{\alpha_m}{\epsilon_3}}}{8\pi\kappa m(m+1)\Delta t}, \quad (48)$$

となり, 式 (20) より $|g_{ij}^{(L,p)}|$ は次式で評価できる.

$$|g_{ij}^{(L,p)}| \leq \frac{\beta_{g3} \cdot 2^{-\frac{3}{2}(k_i+k_j)}}{8\pi\kappa m(m+1)\Delta t} e^{-\frac{\alpha_m}{\epsilon_3}}. \quad (49)$$

なお, 係数行列の切り捨て対象成分は, $|g_{ij}^{(L,p)}| < \lambda$ を満たすものとなる. そのため, 係数成分の生成に用いる wavelet 基底の階層レベルの組み合わせが (k_i, k_j) となる係数成分からなる小行列 $\mathbf{G}_{k_i, k_j}^{(L,p)}$ において,

$$\begin{aligned} \max_r |g_{ij}^{(L,p)}| &\leq \max_r \frac{\beta_{g3} \cdot 2^{-\frac{3}{2}(k_i+k_j)}}{8\pi\kappa m(m+1)\Delta t} e^{-\frac{r^2}{4\epsilon_3\kappa m\Delta t}} \\ &= \frac{\beta_{g3} \cdot 2^{-\frac{3}{2}(k_i+k_j)}}{8\pi\kappa m(m+1)\Delta t} < \lambda, \end{aligned}$$

を満足するものについては, 保存対象成分が存在しない. 言い換えれば, 保存対象となる係数行列成分が存在するのは, 次式を満たす階層レベル (k_i, k_j) の組み合わせの小行列 $\mathbf{G}_{k_i, k_j}^{(L,p)}$ に限定されることとなる.

$$k_i + k_j \leq \frac{2}{3\ln 2} \ln \left[\frac{\beta_{g3}}{8\pi\kappa m(m+1)\Delta t} \cdot \frac{1}{\lambda} \right]. \quad (50)$$

なお, ω_{g2} は, $\omega_{g2} \leq$ (式 (50) 右辺) を満たす最大の整数とし, $m \rightarrow \infty$ で $\omega_{g2} \rightarrow -\infty$ となることを申し添えておく.

ここで, 小行列 $\mathbf{G}_{k_i, k_j}^{(L,p)}$ の保存成分におけるサポート間距離の上限値 δ_{g3} を式 (49) および $|g_{ij}^{(L,p)}| \geq \lambda$ より評価すると,

$$\begin{aligned} \delta_{g3} &= \sqrt{4\epsilon_3\kappa m\Delta t} \cdot \sqrt{f_3 - \frac{3}{2} \ln 2(k_i + k_j)} \\ &\approx \sqrt{4\epsilon_3\kappa m\Delta t f_3}, \end{aligned} \quad (51)$$

で与えることができる. なお, f_3 は次式で定義する.

$$f_3 = \ln \left(\frac{\beta_{g3}}{8\pi\kappa m(m+1)\Delta t} \cdot \frac{1}{\lambda} \right). \quad (52)$$

以上の結果を踏まえ, 行列 $\mathbf{G}^{(L,L)}$ の場合と同様に, 式 (19) を用いて係数行列 $\mathbf{G}^{(L,p)}$ の保存成分数を評価する.

まず, $\omega_{g2} < 0$ の場合について考える. この場合, 基底関数のサポートが重複する成分以外は保存の対象とはならない. そのため, 行列 $\mathbf{G}^{(L,p)}$ の保存成分数は,

$$\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,p)}) \leq C_1 N \log N, \quad (53)$$

で推移する.

$0 \leq \omega_{g2} \leq 2M$ の場合には,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,p)}) &\leq C_1 N \log N \\ &\quad + \bar{C}_2(\lambda, \kappa, m, \Delta t)(\omega_{g2} + 1) \cdot 2^{1+\omega_{g2}}, \end{aligned} \quad (54)$$

のように評価できる. ここで, $\bar{C}_2$ は $m = L - p$ の値, 離散化条件, 切り捨て基準値に依存する定数である. この場合, 保存成分数の増加因子は $N \log N$ のみであり, 式 (54) 右辺第 2 項は定数となる. そのため, 最高階層レベル M を大きくすることで解析自由度 N を増加させると, 保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,p)}) \sim O(N \log N)$ で推移する.

また, $M < \omega_{g2} \leq 2M$ の場合には,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,p)}) &\leq C_1 N \log N \\ &\quad + \bar{C}_3(\lambda, \kappa, m, \Delta t)(2M + 2 - \omega_{g2}) \cdot 2^{1+\omega_{g2}} \\ &\leq C_1 N \log N + \bar{C}_4(\lambda, \kappa, m, \Delta t) \log N \\ &\quad + \bar{C}_5(\lambda, \kappa, m, \Delta t), \end{aligned} \quad (55)$$

となる. ここで, $\bar{C}_3$, $\bar{C}_4$, $\bar{C}_5$ はいずれも m の値, 離散化条件, 切り捨て基準値に依存する定数である. この場合, 保存成分数の増加因子は $\log N$, $N \log N$ の 2 種類となっており, M を大きくすることで解析自由度 N を増加させると, 保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,p)}) \sim O(N \log N)$ の挙動を示すことが予想される.

なお, $\omega_{g2} > 2M$ の場合には, 全てのブロック小行列 $\mathbf{G}_{k_i, k_j}^{(L,p)}$ において $\delta = \delta_{g3}$ となるから, 式 (19) より,

$$\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,p)}) \leq C_1 N \log N + \bar{C}_6(\lambda, \kappa, m, \Delta t) N^2, \quad (56)$$

を得る. ただし, $\bar{C}_6$ は m の値, 離散化条件, 切り捨て基準値に依存する定数である. この場合, 行列 $\mathbf{G}^{(L,p)}$ の保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,p)}) \sim O(N^2)$ で推移する.

(2) 行列 $\mathbf{H}^{(L,p)}$

まず, 行列 $\mathbf{G}^{(L,p)}$ の場合と同様に, 式 (22) 第 1 式において,

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1}^2 e^{-\alpha_{m+1}} - \alpha_m^2 e^{-\alpha_m} \\ \approx -\frac{r^2}{4\kappa m\Delta t} \left(2 - \frac{r^2}{4\kappa m\Delta t} \right) \frac{e^{-\alpha_m}}{4\kappa m(m+1)\Delta t}, \end{aligned} \quad (57)$$

なる Taylor 近似を導入し、あわせて式 (45) を代入して整理すると、次式を得る。

$$\left| \frac{d^3 U_p^{*(L)}}{dr^3} \right| \approx \frac{re^{-\alpha_m}}{16\pi\kappa^2 m^2(m+1)\Delta t} \left| -3 + \frac{r^2}{2\kappa m \Delta t} \right|. \quad (58)$$

なお、式 (58) 右辺は $r = 0$, $r = \sqrt{6\kappa m \Delta t}$ で 0, $r = \sqrt{2(3-\sqrt{6})\kappa m \Delta t}$ で最大値をとり、 $r \rightarrow \infty$ で 0 に収束する関数となっている。そのため、式 (58) は、 r が非常に小さい場合において係数 $h_{ij}^{(L,p)}$ は切り捨て対象成分となることを示唆している。しかし、 r が非常に小さい係数成分の大半は、当該の係数計算の際に用いる基底関数のサポートが重複するものであり、サポートが重複する係数行列成分は式 (17) より保存の対象となる。よって以下では、簡単のために式 (58) 右辺を次式で近似する。

$$\left| \frac{d^3 U_p^{*(L)}}{dr^3} \right| \approx \frac{\epsilon_4 \sqrt{\kappa m \Delta t} \cdot e^{-\frac{\alpha_m}{\epsilon_5}}}{16\pi\kappa^2 m^2(m+1)\Delta t}. \quad (59)$$

なお、 ϵ_4 , ϵ_5 は、次式を満足するように定めた正数である。

$$\begin{aligned} \frac{re^{-\alpha_m}}{16\pi\kappa^2 m^2(m+1)\Delta t} \left| -3 + \frac{r^2}{2\kappa m \Delta t} \right| \\ \leq \frac{\epsilon_4 \sqrt{\kappa m \Delta t} \cdot e^{-\frac{\alpha_m}{\epsilon_5}}}{16\pi\kappa^2 m^2(m+1)\Delta t}. \end{aligned} \quad (60)$$

式 (20), (59) より、係数成分の大きさ $|h_{ij}^{(L,p)}|$ は次式で評価できる。

$$|h_{ij}^{(L,p)}| \leq \frac{\beta_{h3} \cdot \sqrt{\kappa m \Delta t} \cdot 2^{-\frac{3}{2}(k_i+k_j)}}{16\pi\kappa^2 m^2(m+1)\Delta t} e^{-\frac{\alpha_m}{\epsilon_5}}. \quad (61)$$

なお、切り捨て対象成分については $|h_{ij}^{(L,p)}| < \lambda$ となるため、係数成分の生成に用いる wavelet 基底の階層レベルの組み合わせが (k_i, k_j) となる係数成分からなる小行列 $\mathbf{H}_{k_i, k_j}^{(L,p)}$ において、

$$\begin{aligned} \max_r |h_{ij}^{(L,p)}| &\leq \max_r \frac{\beta_{h3} \cdot \sqrt{\kappa m \Delta t} \cdot 2^{-\frac{3}{2}(k_i+k_j)}}{16\pi\kappa^2 m^2(m+1)\Delta t} e^{-\frac{\alpha_m(r)}{\epsilon_5}} \\ &= \frac{\beta_{h3} \cdot \sqrt{\kappa m \Delta t} \cdot 2^{-\frac{3}{2}(k_i+k_j)}}{16\pi\kappa^2 m^2(m+1)\Delta t} < \lambda, \end{aligned}$$

を満足するものについては、保存対象成分が存在しない。すなわち、保存対象となる係数行列成分が存在するのは、次式を満たす階層レベル (k_i, k_j) の組み合わせの小行列 $\mathbf{H}_{k_i, k_j}^{(L,p)}$ に限定されることとなる。

$$k_i + k_j \leq \frac{2}{3 \ln 2} \ln \left[\frac{\beta_{h3} \cdot \sqrt{\kappa m \Delta t}}{16\pi\kappa^2 m^2(m+1)\Delta t} \cdot \frac{1}{\lambda} \right]. \quad (62)$$

なお、 ω_{h2} は、 $\omega_{h2} \leq$ (式 (62) 右辺) を満たす最大の整数とし、 $m \rightarrow \infty$ で $\omega_{h2} \rightarrow -\infty$ となる。

ここで、小行列 $\mathbf{H}_{k_i, k_j}^{(L,p)}$ の保存成分におけるサポート間距離の上限値 δ_{h3} を式 (61) および $|h_{ij}^{(L,p)}| \geq \lambda$ より

評価すると、

$$\begin{aligned} \delta_{h3} &= \sqrt{4\epsilon_5 \kappa m \Delta t} \cdot \sqrt{f_4 - \frac{3}{2} \ln 2(k_i + k_j)} \\ &\approx \sqrt{4\epsilon_5 \kappa m \Delta t} f_4, \end{aligned} \quad (63)$$

で与えることができる。なお、 f_3 は次式で定義する。

$$f_4 = \ln \left(\frac{\beta_{h3} \cdot \sqrt{\kappa m \Delta t}}{16\pi\kappa^2 m^2(m+1)\Delta t} \cdot \frac{1}{\lambda} \right). \quad (64)$$

以上の考察に基づき、行列 $\mathbf{H}^{(L,L)}$ の場合と同様に、式 (19) を用いて係数行列 $\mathbf{H}^{(L,p)}$ の保存成分数を評価する。

まず、 $\omega_{h2} < 0$ の場合について考える。この場合、基底関数のサポートが重複する成分以外は保存の対象とはならない。そのため、行列 $\mathbf{H}^{(L,p)}$ の保存成分数は、 $\mathbf{G}^{(L,p)}$ と同様、

$$\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,p)}) \leq C_1 N \log N, \quad (65)$$

で推移する。

$0 \leq \omega_{h2} \leq 2M$ の場合には、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,p)}) &\leq C_1 N \log N \\ &+ \bar{C}_7(\lambda, \kappa, m, \Delta t)(\omega_{h2} + 1) \cdot 2^{1+\omega_{h2}}, \end{aligned} \quad (66)$$

のように評価できる。ここで、 $\bar{C}_7$ は m の値、離散化条件、切り捨て基準値に依存する定数である。この場合、式 (66) 右辺第 2 項は定数となり、保存成分数の増加因子は $N \log N$ のみとなる。そのため、 M を大きくすることで解析自由度 N を増加させると、保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,p)}) \sim O(N \log N)$ で推移する。

また、 $M < \omega_{h2} \leq 2M$ の場合には、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,p)}) &\leq C_1 N \log N \\ &+ \bar{C}_8(\lambda, \kappa, m, \Delta t)(2M + 2 - \omega_{h2}) \cdot 2^{1+\omega_{h2}} \\ &\leq C_1 N \log N + \bar{C}_9(\lambda, \kappa, m, \Delta t) \log N \\ &+ \bar{C}_{10}(\lambda, \kappa, m, \Delta t), \end{aligned} \quad (67)$$

となる。ただし、 $\bar{C}_8$, $\bar{C}_9$, $\bar{C}_{10}$ はいずれも m の値、離散化条件、切り捨て基準値に依存する定数である。この場合、保存成分数の増加因子には $\log N$, $N \log N$ の 2 種類があり、最高階層レベル M を大きくすることで N を増加させると、保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,p)}) \sim O(N \log N)$ の挙動を示す。

なお、 $\omega_{h2} > 2M$ の場合には、全てのブロック小行列 $\mathbf{H}_{k_i, k_j}^{(L,p)}$ において $\delta = \delta_{h3}$ となるから、式 (19) より、

$$\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,p)}) \leq C_1 N \log N + \bar{C}_{11}(\lambda, \kappa, m, \Delta t) N^2, \quad (68)$$

を得る。なお、 $\bar{C}_{11}$ は m の値、離散化条件、切り捨て基準値に依存する定数である。この場合には、行列 $\mathbf{H}^{(L,p)}$ の保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,p)}) \sim O(N^2)$ で推移する。

図-1 解析対象とした例題.

6. 評価結果の妥当性の検討

6.1 解析条件

本研究で示した係数行列保存成分数の評価結果の妥当性を検討する目的で、図-1 に示す例題を対象とした時間域境界要素解析を行なった。解析においては、正方形領域各辺上に3個の scaling 関数を配置し、wavelet 級数の最高階層レベル M を $M = 2 \sim 9$ (自由度に換算して $N = 96 \sim 12288$) の範囲に設定して境界上の離散化を行なった。また、時間の離散化については、時間ステップ幅を $\Delta t = 0.01$ 、解析ステップ数を最大 100 ステップに設定した。なお、 $\kappa = 1$ とし、切り捨て基準値 λ は、 $\lambda = 1.0 \times 10^{-4}$, 1.0×10^{-6} , 1.0×10^{-8} の3通りに設定して解析を行なった。

6.2 $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)})$, $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)})$ の挙動

まず、行列 $\mathbf{G}^{(L,L)}$ の保存成分数 $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)})$ と解析自由度との関係を図-2(a) に示す。最高階層レベル M が小さい段階では、保存成分数は $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)}) \sim O(N^2)$ で推移し、式 (33) と矛盾のない結果となっていることがわかる。しかし、切り捨て基準値を大きく設定したもののほど、小さい解析自由度の段階から保存成分数の増加割合が鈍化し始め、当該の問題では増加因子 $N^{1/2}$, $\log N$ の影響が発現したものと考えられる。さらに解析自由度を大きく設定すると、 $O(N \log N)$ の挙動が支配的となり、所定の切り捨て基準値 λ の下では、十分大きな N に対して $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,L)}) \sim O(N \log N)$ の挙動を示しており、5.2(1) 節の考察結果と整合する。

次に、行列 $\mathbf{H}^{(L,L)}$ の保存成分数 $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)})$ と解析自由度との関係を図-2(b) に示す。解析結果より、行列 $\mathbf{H}^{(L,L)}$ の保存成分数は行列 $\mathbf{G}^{(L,L)}$ と同様の傾向を示していることがわかる。解析自由度が小さい領域こそ $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)}) \sim O(N^2)$ を示すが、切り捨て基準値 λ の値が大きいものほど、より小さな自由度から保存成分数の増加割合が鈍化し始め、当該の問題では増加因子 N , $\log N$ の影響が発現したものと考えられる。さらに大きな解析自由度に設定すると、保存成分数の増加割合が $O(N \log N)$ に支配されるようになり、 $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,L)}) \sim O(N \log N)$ の挙動を示すことが分かる。この挙動は、式 (41)–(44) の漸近評価結果と概ね矛盾の

(a) 行列 $\mathbf{G}^{(L,L)}$ の保存成分数.

(b) 行列 $\mathbf{H}^{(L,L)}$ の保存成分数.

図-2 係数行列 $\mathbf{G}^{(L,L)}$, $\mathbf{H}^{(L,L)}$ の保存成分数と解析自由度 N との関係.

ないものであり、本論文で示した方法による評価結果が妥当であると判断できる。

6.3 $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{(L,p)})$, $\mathcal{N}(\mathbf{H}^{(L,p)})$ の挙動

本節では、離散量み込み積分計算に用いられる係数行列 $\mathbf{G}^{(L,p)}$, $\mathbf{H}^{(L,p)}$ ($L \neq p$) の保存成分数の解析自由度依存性について検討する。 $m = L - p$ とし、 $m = 9, 49, 99$ の場合における係数行列 $\mathbf{G}^{(L,L-m)}$, $\mathbf{H}^{(L,L-m)}$ の保存成分数と解析自由度との関係を図-3 ($m = 9$, 解析第 10 ステップで作成), 図-4 ($m = 49$, 解析第 50 ステップで作成), 図-5 ($m = 99$, 解析第 100 ステップで作成) に示す。

前節の考察から、定数 ω_{g2} , ω_{h2} とともに、切り捨て基準値 λ が大きいほど、 m の値が大きいほど小さな値を示す。 m の値は解析の時間ステップが大きくなるほど大きくなるため、係数行列の作成時間ステップが進行するほど ω_{g2} , ω_{h2} の値は小さくなる。保存成分数は、小自由度で $O(N^2)$ だったものが、最高階層レベル M の増加による解析自由度の増加とともにその増加割合が鈍化する。さらに自由度を大きくすると、全ての係数行列ブロック $\mathbf{G}_{k_i,k_j}^{(L,p)}$, $\mathbf{H}_{k_i,k_j}^{(L,p)}$ において式 (50) または (62) を満足しなくなり、保存成分数は $O(N \log N)$ で推

(a) 行列 $\mathbf{G}^{(L, L-m)}$ の保存成分数.

(b) 行列 $\mathbf{H}^{(L, L-m)}$ の保存成分数.

図-3 行列 $\mathbf{G}^{(L, L-m)}$, $\mathbf{H}^{(L, L-m)}$ の自由度依存性 (解析第 10 ステップで生成, $m = L - p = 9$).

移することが予想される. なお, 小自由度での $O(N^2)$ の挙動は, λ を大きくする, または $m = L - p$ の値を大きくすると発現しなくなることも容易に予想できる.

図-3-図-5 の解析結果は, 概ね前節での考察結果と同様となっていることが分かる. m が小さい設定のもとでは, 小自由度の領域では保存成分数が概ね $O(N^2)$ で推移しているが, m を大きく設定することで発現なくなり, 速やかに $O(N \log N)$ なる挙動へ移行することが分かる. 移行過程においては, 当該の問題では増加因子 $\log N$ の影響が発現したものと考えられる. $O(N \log N)$ への移行のタイミングは, 切り捨て基準値 λ が大きいほど, m の値が大きいほど, 自由度がより小さい段階となっており, この点についても理論的な評価結果と整合するものとなっている.

以上の結果から, 本論文で示した係数行列保存成分数の評価結果が, 実際の解析結果と大きく矛盾のない, 妥当なものであると結論付けることができる.

7. おわりに

本研究では, 2 次元拡散問題の時間域境界要素法において, Haar wavelet を用いて境界積分方程式を離散

(a) 行列 $\mathbf{G}^{(L, L-m)}$ の保存成分数.

(b) 行列 $\mathbf{H}^{(L, L-m)}$ の保存成分数.

図-4 行列 $\mathbf{G}^{(L, L-m)}$, $\mathbf{H}^{(L, L-m)}$ の自由度依存性 (解析第 50 ステップで生成, $m = L - p = 49$).

化し, その結果得られる微小な係数行列成分を Beylkin 型手法に基づき切り捨てる場合を対象に, 係数行列の保存成分数における解析自由度依存性について考察し, 簡単な解析例を通してその妥当性について検証した.

解析自由度に依存しない所定の切り捨て基準値 λ の設定の下で係数行列の切り捨てを実行した結果, 行列 $\mathbf{G}^{(L, L)}$, $\mathbf{H}^{(L, L)}$ の保存成分数はともに $O(N \log N)$ に漸近するような挙動を示し, $O(N^2)$ の挙動は小自由度の場合に限定されることがわかった. 対象とする問題や離散化条件, 切り捨て条件によっては, $O(N^2)$ から $O(N \log N)$ への移行過程においてこれらの増加率よりも低い増加傾向を示すことがわかり, これは保存成分数の他の増加因子 ($N^{1/2}$, N , $\log N$) の挙動が発現したものと考えられる.

一方, 離散畳み込み積分計算に用いられる係数行列 $\mathbf{G}^{(L, p)}$, $\mathbf{H}^{(L, p)}$ の保存成分数は, $\mathbf{G}^{(L, L)}$, $\mathbf{H}^{(L, L)}$ と同様の傾向を示すが, $m = L - p$ の値が大きくなるほど, より小さい自由度の段階から $O(N \log N)$ の挙動を示すことがわかった. $O(N \log N)$ への移行過程においては, 対象とする問題や離散化条件, 切り捨て条件に依存して, $O(N \log N)$ よりも低い増加傾向を示すことがあり, $\mathbf{G}^{(L, L)}$, $\mathbf{H}^{(L, L)}$ と同様, 保存成分数の他の増加

(a) 行列 $\mathbf{G}^{(L, L-m)}$ の保存成分数.

(b) 行列 $\mathbf{H}^{(L, L-m)}$ の保存成分数.

図-5 行列 $\mathbf{G}^{(L, L-m)}$, $\mathbf{H}^{(L, L-m)}$ の自由度依存性 (解析第 100 ステップで生成, $m = L - p = 99$).

因子 $(\log N)$ の挙動が発現したものと推察される.

なお, 本研究では, 切り捨て基準値 λ は所定の値を事前に与えて解析をするものと仮定した上で, 保存成分数の自由度依存性について考察した. しかし, 実際の境界要素解においては, 解析自由度や時間刻み幅, 解の評価時刻などにより離散化誤差が変動することが予想されるため, できるだけ効率的かつ合理的に解析を進めるためには, 切り捨て基準値はこれら影響を受ける量の関数として与えることが望ましい. しかし, 切り捨て基準値が離散化条件に依存して可変となる場合の保存成分数の評価は未検討である. また, 係数行列 $\mathbf{G}^{(L, p)}$, $\mathbf{H}^{(L, p)}$ の保存成分数における時間ステップ依存性についても未検討となっている. そのため, これらの点については今後の検討課題としたい.

参考文献

- 田中正隆, 中村正行, 松本敏郎著: 境界要素法 (計算力学と CAE シリーズ), 培風館, 1991.
- Nishimura, N.: Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Appl. Mech. Rev.*, Vol.55, No.4, pp.299–324, 2002.
- 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法. 京都大学学術出版会, 2000.
- Liu, Y.: Fast multipole boundary element method. Cambridge University Press, 2009.
- Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V.: Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol.44, pp.144–183, 1991.
- Schneider, R.: Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur effizienten Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme. B.G.Teubner, Stuttgart, 1998.
- Koro, K., Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engrg. Anal. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149–164, 2001.
- Bucher, H.F., Wrobel, L.C., Mansur, W.J., Magluta, C.: A novel approach to applying fast wavelet transforms in the boundary element method. *Electronic J. Bound. Elems.*, Vol.BETE9 2001, No.2, pp.187–195, 2002.
- 紅露一寛, 阿部 和久, 田崎 浩章: 離散 wavelet 変換による選点法境界要素解析の効率化. 土木学会応用力学論文集, Vol.2, pp.153–162, 1999.
- Koro, K., Abe, K.: A practical determination strategy of optimal threshold parameter for matrix compression in wavelet BEM. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.57, pp.169–191, 2003.
- 紅露一寛, 阿部和久: Wavelet BEM における Beylkin 型係数切り捨て手法の行列圧縮効果に関する検討. 土木学会応用力学論文集, Vol.6, pp.301–310, 2003.
- Goswami, J.C., Chan, A.K. & Chui, C.K.: On solving first-kind integral equations using wavelets on a bounded interval. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol.43, No.6, pp.614–622, 1995.
- von Petersdorff, T. & Schwab, C.: Wavelet approximations for first kind boundary integral equations on polygons. *Numer. Math.*, Vol.74, pp.479–519, 1996.
- Ravnik, J., Škerget, L., Hriberšek, M.: The wavelet transform for BEM computational fluid dynamics. *Engrg. Anal. Bound. Elems.*, Vol.28, pp.1303–1314, 2004.
- Ravnik, J., Škerget, L., Žunič, Z.: Comparison between wavelet and fast multipole data sparse approximations for Poisson and kinematics boundary-domain integral equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.198, pp.1473–1485, 2009.
- Perrey-Debain, E., ter Morsche, H.G.: B-spline approximation and fast wavelet transform for an efficient evaluation of particular solutions for Poisson's equation. *Engrg. Anal. Bound. Elems.*, Vol.26, pp.1–13, 2002.
- 紅露一寛, 五十嵐和希, 阿部和久: 拡散問題を対象とした時間域境界積分方程式法における wavelet 基底の適用とその計算効率. 計算数理工学論文集, Vol.9, pp.73–78, 2009.
- 紅露一寛, 菅波祐太, 古川 陽, 阿部和久: 2次元スカラー波動方程式のための非直交スプライン wavelet を用いた時間域境界要素法. 土木学会応用力学論文集, Vol.13, pp.241–252, 2010.
- Barmada, S.: Improving the performance of the boundary element method with time-dependent fundamental solutions by the use of a wavelet expansion in the time domain. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.71, pp.363–378, 2007.
- 紅露一寛, 佐藤鉄太郎, 阿部和久: 時間・空間の離散化に wavelet 基底を用いた境界要素法による線形拡散解析. 計算数理工学論文集, Vol.10, pp.81–86, 2010.

(2011 年 3 月 8 日 受付)