線形弾性体の動的破壊進展の 数値解析手法の提案

近藤 真徳¹・小國 健二²

¹非会員 慶應義塾大学大学院 理工学研究科 開放環境科学専攻 (〒 223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1)
E-mail: 0330mk@z6.keio.jp

²正会員 慶應義塾大学准教授 理工学部 システムデザイン工学科 (〒 223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1)
E-mail: oguni@sd.keio.ac.jp

動的破壊進展の問題は固体連続体力学の未解決問題のひとつである。特に、破壊進展速度の支配法則が不明であるため、既存研究の多くは速度依存性の材料パラメータを導入している。本論文では速度依存性の材料パラメータを導入することなく動的破壊進展過程を解析する手法を提案する。提案手法で用いる材料パラメータは、実験で確定的な値を得ることが可能な物理量のみである。提案手法を構成する主要な技術要素は、粒子離散化有限要素法と、新たに提案する「動的破壊進展速度の支配法則に関する作業仮説」である。これらの技術により、動的破壊進展の問題に対して (i) 破壊とそれに伴う変位の不連続の簡便な扱い (ii) 残差力の再配分の仕組み (iii) 速度依存性の人為的パラメータを使わずに新たな破壊面の生成速度を決定する仕組み、が導入される。

Key Words : *dynamic fracture, Hamiltonian dynamics, symplectic integrator, PDS-FEM*

1. はじめに

破壊力学は、固体連続体の中に存在する亀裂周辺の変位場・応力場、その亀裂の進展開始条件、そして亀裂が準静的に進展していく過程を定量的に分析することを主目的とする学問である。破壊力学には 1 世紀近くにわたる知見の蓄積がある。これは、20 世紀初頭に既に存在した実験・計測装置を用いて、材料の破壊実験や光弾性の原理を用いた平面応力場計測など、亀裂周辺の場に関する多くの実験データを得ることができたためである。破壊力学では、これらの実験事実を合理的に説明するために、応力拡大係数に着目した理論体系¹⁾が構築されてきた。

この理論体系に最近 30 年の計算力学の知見、特に、準静的な破壊進展過程の解析における最重要課題である「変位の不連続性」をうまく取り扱う手法が適用されてきた。その結果、固体連続体の中に存在する亀裂の挙動に関して、その準静的な進展過程までは十分な精度で定量的に再現・予測することが可能となっている。

しかし、亀裂は常に準静的に進展していくわけではない。特に脆性破壊においては、亀裂は（弾性波速度の数 10%と表現できる程度の）高速で、かつ、加減速を伴いながら進展する。つまり「亀裂の準静的な進展」はかなり強い仮定である。この強い仮定を外して、亀裂の動的進展過程を定量的に予測・再現することの重要性は、破壊力学の黎明期には既に認識されていたが、亀裂が動的に進展していく過程、動的破壊進展に関する知

見を得るためには、高速度カメラなど時間分解能の高い計測装置の登場を待つ必要があった。動的破壊進展に関する研究が活発に行われるようになったのは、これらの装置が手に入るようになる 1970 年代以降である。

Yoffe²⁾による一定速度で移動する亀裂（有限長さの亀裂の右端が伸長しながら左端で閉じていき、亀裂の長さ自体は変化することなく一定速度で右に移動していく）に関する研究が、動的破壊進展の問題について初期に行われた理論的研究のうち、重要なものである。ここでは応力拡大係数は静的問題と同じであり、変位場にのみ亀裂の移動の影響が現れるという結果が得られている。その後、動的破壊進展の問題については実験・理論の両面で多くの研究が行われた。これらの集大成が 1990 年に出版された Freund³⁾の“Dynamic Fracture Mechanics”である。ここでは、亀裂進展速度の関数として、動的応力拡大係数の漸近値の理論解を定義し、従来の破壊力学と同じ枠組みでエネルギーバランスを考慮することにより、動的破壊進展問題に関する理論を展開している。

動的破壊進展の数値解析のための既存手法のほとんどは有限要素法やその拡張手法を用いている。全ての手法に共通の技術的課題は

- 新たな破壊面の生成速度を支配する仕組み
- 新たな破壊面の生成に伴う残差力の処理の方法

を適切に実装することである。とくに「新たな破壊面が生成される速度を支配する仕組み」については、ほぼす

べての手法で速度依存性の材料パラメータ (Cohesive Element などを用いた手法における速度依存性の破壊強度^{4),5),6),7),8),9)}など) や Cohesive Zone に非線形構成則¹⁰⁾を導入することにより, 動的破壊実験の結果と整合性のある解析結果が生成されている.

本論文では, 線形弾性体の脆性破壊を解析対象とし, ヤング率, ポアソン比, 質量密度, 材料強度と表面エネルギー (材料を劈開して新たな面を生成するために必要なエネルギー) など, いずれも実験で確定することが可能な物理量のみを用いて動的破壊進展の過程を解析する手法を提案する. 提案手法を構成する主要な技術要素は,

- 破壊とそれに伴う変位の不連続の簡便な扱い
- 残差力を亀裂端周辺の節点に再配分する仕組み
- 速度依存性の人為的パラメータを導入することなく, 新たな破壊面の生成速度を支配する仕組みである.

特に, 提案手法の最大の特徴は「場が動的破壊進展速度を自動的に決定する」ことである. 動的破壊進展時のエネルギーバランスを考慮することによって, 材料パラメータに速度依存性を導入することなく, 動的に破壊が進展するときの新たな破壊面の生成速度が自動的に決定される. また, 残差力の再配分も「場」によって自動的に決定される.

2. 動的破壊進展の例題 — 1次元ばね・マスモデル

本論文の提案手法の主要な技術要素のうち,

- 残差力を亀裂端周辺の節点に再配分する仕組み
- 速度依存性の人為的パラメータを導入することなく, 新たな破壊面の生成速度を支配する仕組みの本質を端的に示す 1次元ばね・マスモデルの例題を提示する.

図-1 のような 2 質点系のばね・マスモデルを考える. この系のハミルトニアン H は,

$$\begin{aligned}
 H &= K + U \\
 &= K^{(m_1)} + K^{(m_2)} + U^{(k_1)} + U^{(k_2)} + U^{(k_3)} \\
 &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{u}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{u}_2)^2 + \frac{1}{2} k_1 (u_1)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_2 (u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (u_3 - u_2)^2 \quad (1)
 \end{aligned}$$

で表される. ここで, $K^{(m_\alpha)}$ は α 番目の質点の運動エネルギー, $U^{(k_\alpha)}$ は α 番目のばねのポテンシャルエネルギーである.

「破壊面の生成」を「ばねの切断」に対応させて, 「ばねの切断の開始から終了までの時間の長さ」と「系全体のハミルトニアンの切断前後での変化量」との間の関係を調べる.

以下, 座標系, 質点の質量, ばね定数, 各点における変位は図-1 に示された記号で表現する. それぞれの具体的な数値は, 質点の質量 $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$, ばね定数 $k_1 = k_2 = k_3 = 3 \text{ N/m}$, 各点の変位は右向きが正で, 単位は m とする. 変位 u_3 を固定したときの, このばね・マスモデルの固有角振動数は $\omega_1 = \sqrt{3} [1/\text{sec}]$ および $\omega_2 = 3 [1/\text{sec}]$ である.

このばね・マスモデルの右端に変位 $u_3 = 3 \text{ m}$ を与えたときの静的つり合い状態 ($u_1 = 1 \text{ m}$, $u_2 = 2 \text{ m}$) を初期状態とする. この初期状態に対応するハミルトニアン $H_0 = K_0 + U_0$ は, 式 (1) に初期状態の数値を代入することにより, $H_0 = 4.5 \text{ J}$ が得られる.

この初期状態から, $u_3 = 3 \text{ m}$ を保持したまま, ばね k_2 を切断する. 「ばね k_2 を時間 $\tau [\text{sec}]$ かけて切断する」ことを「ばね定数 k_2 を $k_2 = 3 \text{ N/m}$ から $k_2 = 0 \text{ N/m}$ まで, 時間 $\tau [\text{sec}]$ かけて線形に減少させる」ことで表現する.

2 次の自由振動の固有周期 $\frac{2\pi}{\omega_2} \cong 2.1 \text{ sec}$ よりも十分短い時間ステップ $\Delta t = 10^{-3} \text{ sec}$ を時間積分の刻み幅とする. この Δt は, ばね定数 k_2 をゼロとなるまで減らすのに要する時間 $\tau [\text{sec}]$ の最小単位でもある.

ばねの切断に要する時間 $\tau [\text{sec}]$ を $\tau = \Delta t (= 10^{-3} \text{ sec})$ から $\tau = 10^6 \times \Delta t (= 1000 \text{ sec})$ まで変化させたときの, 切断前後でのハミルトニアン $H [\text{J}]$ を図-2 に示す.

図-2 から, ばねの切断に要する時間 $\tau [\text{sec}]$ によって, 切断後のハミルトニアン H の値が異なることが分かる.

また, ばねの切断に要する時間 $\tau [\text{sec}]$ を, 最小単位すなわち $\tau = 10^{-3} \text{ sec}$ にしたときのハミルトニアンの変化量 $\Delta H|_{\tau=10^{-3}}$ は,

$$\begin{aligned}
 \Delta H|_{\tau=10^{-3}} &\cong -U_0^{(k_2)} \\
 &= -\frac{1}{2} k_2 (u_2 - u_1)^2 \\
 &= -1.5 \text{ J}
 \end{aligned}$$

である. つまり, 極めて短い時間でばね k_2 を切断した場合に生じるハミルトニアンの変化は, 「ばね k_2 の初期状態におけるポテンシャルエネルギー $U_0^{(k_2)}$ のみが失

図-1 ばね・マスモデル

図-2 ばねの切断に要する時間 τ [sec] とハミルトニアン H [J] との関係

われた」ことに相当する。

一方、ばねの切断に要する時間 τ [sec] を、極めて長く、すなわち $\tau = 1000$ sec にしたときのハミルトニアンの変化量 $\Delta H|_{\tau=1000}$ は、

$$\begin{aligned}\Delta H|_{\tau=1000} &\cong -U_0 \\ &= -\left(U_0^{(k_1)} + U_0^{(k_2)} + U_0^{(k_3)}\right) \\ &= -\frac{1}{2}k_1(u_1)^2 - \frac{1}{2}k_2(u_2 - u_1)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}k_3(u_3 - u_2)^2 \\ &= -4.5 \text{ J}\end{aligned}$$

である。つまり、極めて長い時間ではばね k_2 を切断した場合に生じるハミルトニアンの変化は、「初期状態においてばねに蓄えられていたポテンシャルエネルギー U_0 が全て失われた」ことに相当する。

そして、ばね k_2 の切断に要する時間 τ [sec] が、ばね・マスモデルの 1 次と 2 次の自由振動の固有周期 $\frac{2\pi}{\omega_2} \cong 2.1$ sec から $\frac{2\pi}{\omega_1} \cong 3.6$ sec に近い値のときに、切断後のハミルトニアンの値の急激な変化が見られる（図-2 の横軸は対数スケールであることに注意）。

ばね k_2 の切断に要する時間 τ [sec] の違いによる切断直後の系の状態の違いを図-3 に示す。

ばね k_2 を瞬間的に切断したときには、ばね k_1 , k_3 の伸びが変化する前にばね k_2 の切断が完了する。その結果、切断直後には質点 m_1 , m_2 は運動量をもたず、ばね k_1 とばね k_3 に蓄えられていたポテンシャルエネルギーもそのまま残る。結局、このときに失われるのは切断されたばね k_2 のポテンシャルエネルギーのみである。

ばね k_2 を極めて長い時間をかけて切断したときには、切断が完了するまでの間に、ばね k_1 とばね k_3 の伸びが減少しながら、質点 m_1 , m_2 はゆっくりと（ほとんど静的つり合い状態を保ちながら）移動する。その結

図-3 τ [sec] の違いによる切断直後の系の状態の違い（図の上から、切断前、瞬間的に切断、極めて長い時間をかけて切断、中間の時間をかけて切断、に対応）

果、切断の完了直後には質点 m_1 , m_2 は運動量をもたず、ばね k_1 とばね k_3 の自然長の位置で静止する。つまり、全てのばねのポテンシャルエネルギーが失われ、これが運動エネルギーに変換されることもない。結局、初期状態のハミルトニアン H_0 は全て失われる。

これらの中間の時間、具体的には、1 次と 2 次の自由振動の固有周期近辺の時間をかけてばね k_2 を切断したときには、ばね k_1 とばね k_3 の伸びの減少と、質点 m_1 , m_2 の運動が同時に発生する。そして、ばね k_2 の切断の完了直後の両者（ポテンシャルエネルギーと運動エネルギー）の比率は、ばね k_2 の切断に要する時間 τ [sec] の値により異なる。また、それに応じて、切断の完了直後のハミルトニアンの値も異なったものになる。つまり、ばねの切断に要する時間の長さにより、切断の完了直後の力学的状態、すなわち質点の変位と速度、および系全体のハミルトニアンの値が決定される。

これを連続体の破壊の有限要素解析に置き換えて考えると、それぞれの要素の破壊に要する時間の長さの違いに応じて亀裂生成後の力学的状態が決まり、系全体における運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの分配がなされる、ということになる。つまり、運動の法則に従って運動エネルギーとポテンシャルエネルギーが分配されることで、亀裂端周辺領域での運動量と力の再分配は自動的になされる。

また、多自由度系でのばねの切断は、新たな破壊面の生成に対応する。したがって、ばねの切断前後での系全体のハミルトニアンの変化量が、ばねの切断に要する時間の長さによって変化するということは、新たな破壊面の生成に要する時間の長さ（つまり、動的破壊進展の速度）と、その破壊面の生成前後での系全体のハミルトニアンの変化量との間には何らかの関係があるということを示している。

以上の考察に基づき、動的破壊進展に関して、

脆性的に破壊する線形弾性体の動的破壊進展過程において、新たな破壊面を生成するための表面エネルギーを加えたハミルトニアンが、破壊前後で保存する速度で新たな破壊面は生成される。

という動的破壊進展速度の支配法則に関する作業仮説を提案する。

この作業仮説を1次元2自由度のばね・マスモデルに適用した結果が、本節で記述した例題である。この結果は、動的破壊進展解析の従来手法では別個の問題として扱われてきていた(i)亀裂端付近における残差力の再分配、(ii)新たな破壊面の生成速度、の問題に対して、提案手法が統一した答えを提示する可能性を示唆している。

3. ハミルトン形式でのPDS-FEMの定式化

前節で提案した「動的破壊進展速度の支配法則に関する作業仮説」を、脆性破壊する線形弾性体における動的破壊進展の問題に適用するためには、固体連続体に対して、「破壊とそれに伴う変位の不連続の簡便な扱い」と「ハミルトニアンを定義できる形式での定式化」を導入する必要がある。これを実現するために、固体連続体に対する粒子的描像を与える粒子離散化有限要素法(PDS-FEM: Particle Discretization Scheme Finite Element Method)^{11),12)}のハミルトン形式での定式化を行う。

(1) 問題設定

均質な線形弾性体の微小変形の問題を考える。領域 Ω で表される物体のDirichlet境界 $\partial\Omega$ に変位境界条件 $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ が与えられたとき、変位場 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ に関する境界値問題は、

$$\begin{cases} c_{ijkl}u_{k,lj}(\mathbf{x}) + b_i(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ u_i(\mathbf{x}) = \bar{u}_i(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

となる。ここで $u_i(\mathbf{x})$ は変位場を、 c_{ijkl} は弾性係数を、 $b_j(\mathbf{x})$ は体積力を表す。なお、式(2)以降、下付き添字を用いて表記される式には総和規約を適用する。下付き添字の範囲は解析対象領域 Ω の次元に応じて変化する。

この境界値問題は、 $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ で $u_i(\mathbf{x}) = \bar{u}_i(\mathbf{x})$ を満たす変位場 $u_i(\mathbf{x})$ と、ひずみ場 $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ 、応力場 $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ に関する以下の汎関数を停留させる変分問題と等価である。

$$J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - u_{i,j}) - b_i u_i \right) dV \quad (3)$$

この汎関数の第一変分 δJ は

$$\delta J = \int_{\Omega} (-\delta u_i (\sigma_{ij,j} + b_i) - \delta \varepsilon_{ij} (\sigma_{ij} - c_{ijkl} \varepsilon_{kl}) - \delta \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - u_{i,j})) dV$$

となるので、停留条件 $\delta J = 0$ より、

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + b_i &= 0 & (\text{つり合い式}) \\ \sigma_{ij} &= c_{ijkl} \varepsilon_{kl} & (\text{材料構成則}) \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) & (\text{変位-ひずみ関係}) \end{aligned}$$

が得られる。したがって、与えられた変位境界条件のもとで式(3)の汎関数を停留させる $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ 、 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ の組は、式(2)の境界値問題の解となる。

(2) 粒子離散化手法(PDS — Particle Discretization Scheme)

粒子離散化手法(以下、PDS)では、式(3)の汎関数 $J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ を数値的に評価するために、物理場の空間的離散化に、共役な図形のペアを用いる。

図-4(a)に示すように、解析領域 Ω 内に分散させた点群 $\{\mathbf{x}^\alpha\}$ に対して、Voronoi分割を一意に定めることができる。各点 $\mathbf{x}^\alpha$ に対応するVoronoiブロックを $\tilde{\Phi}^\alpha$ と呼ぶ。

Voronoi分割 $\{\tilde{\Phi}^\alpha\}$ に対して、その共役図形であるDelaunay分割も一意に定められる。これらのDelaunayブロックを Ψ^β と呼ぶ。 β 番目のDelaunayブロックは、Voronoiブロックの境界の β 番目の頂点に対応するが、図-4(b)に示すように、Delaunayブロックが鈍角三角形(Ω が2次元領域の場合)あるいは鈍角を含む四面体(Ω が3次元領域の場合)のときには、Voronoiブロックの頂点が、対応するDelaunayブロックの外に出る。この状態は、数学的な取り扱いの上では問題ないが、後に述べる固体連続体の粒子的描像において「反転した粒子境界」を作ることに対応し、幾何学的な明解さを阻害することにつながる。

そこで、 Ω が2次元領域の場合は、図-4(c)に示すように、Voronoiブロックの頂点を、Delaunay三角形の重心に移し、かつ、Voronoiブロックの辺がDelaunay三角形の辺の中点を通るようにした図形を新たに定義する。この図形を「重Voronoiブロック」と名付け、 Φ^α

図-4 解析領域 Ω の空間的離散化(2次元の例)

に対応する 垂 Voronoi ブロックを Φ^α と呼ぶ。

Ω が 3 次元領域の場合は, 図-5 (a) に示すような垂 Voronoi ブロックを Φ^α と呼ぶ. 図-5 (a) には垂 Voronoi ブロックを構成する Delaunay 四面体のひとつを取り出した図も示した. そして, 図-5 (b) に示すように, Delaunay 四面体の辺の中点は垂 Voronoi ブロックの境界面と一致する. また, 垂 Voronoi ブロックの稜線は Delaunay 四面体の面の重心 G_{face} を通り, 垂 Voronoi ブロックの頂点は Delaunay 四面体の重心 G_β を通る.

このように定義した垂 Voronoi ブロックと Delaunay 三角形 (四面体) との間にも, Voronoi ブロックと Delaunay 三角形 (四面体) との間にあった 1 対 1 の対応は保存されている. 垂 Voronoi ブロックを用いることで失われたものは「図形の凸性」のみである. 通常の Voronoi 分割ならば, 問題の次元によらず, 全ての Voronoi ブロックの凸性は保証されているが, 図-4 (c) および図-5 (a) に示すように, 垂 Voronoi ブロックは凸図形ではない. ただし, この「凸性の喪失」は今後の理論展開において問題とならないため, 以降の議論では固体連続体の粒子的描像の幾何学的意味の明解さを重視し, 解析領域の空間的離散化には, 垂 Voronoi 分割 $\{\Phi^\alpha\}$ と Delaunay 分割 $\{\Psi^\beta\}$ を用いる.

このようにして定義される図形を用いて空間的に離散化された解析領域上で, 関数の離散化を行う.

関数の離散化の基底として, それぞれの図形の上に立つ特性関数を用いる. すなわち, 垂 Voronoi 分割 $\{\Phi^\alpha\}$ と Delaunay 分割 $\{\Psi^\beta\}$, それぞれに対して,

$$\phi^\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \in \Phi^\alpha) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin \Phi^\alpha) \end{cases} \quad (4)$$

$$\psi^\beta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \in \Psi^\beta) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin \Psi^\beta) \end{cases} \quad (5)$$

を定義する.

これらの基底関数を用いて, 解析対象の物理場に対応する関数を以下のように離散化する.

変位場 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ は, 垂 Voronoi 分割 $\{\Phi^\alpha\}$ 上に立つ特性

図-5 垂 Voronoi ブロックと Delaunay 四面体

関数 $\phi^\alpha(\mathbf{x})$ を用いて, それぞれ

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N u_i^\alpha \phi^\alpha(\mathbf{x}) \quad (6)$$

と離散化される. ここで N は垂 Voronoi ブロックの数を, u_i^α は α 番目の垂 Voronoi ブロックの母点 $\mathbf{x}^\alpha$ の変位を表す.

このような変位場の離散化は, $\mathbf{x}^\alpha$ に対応する垂 Voronoi ブロック Φ^α がそれぞれ変形せずに並進するような変位場, すなわち剛体粒子 Φ^α の並進に対応する.

ひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ と応力場 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, すなわち変位場 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ の勾配に関連する物理場は, Delaunay 分割 $\{\Psi^\beta\}$ 上に立つ特性関数 $\psi^\beta(\mathbf{x})$ を用いて, それぞれ

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{\beta=1}^M \varepsilon_{ij}^\beta \psi^\beta(\mathbf{x}) \quad (7)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{\beta=1}^M \sigma_{ij}^\beta \psi^\beta(\mathbf{x}) \quad (8)$$

と離散化される. ここで M は Delaunay 三角形 (四面体) の数を, ε_{ij}^β および σ_{ij}^β は, β 番目の Delaunay 三角形 (四面体) のひずみおよび応力をそれぞれ表す. このようなひずみ場と応力場の離散化は, 三角形 (四面体) 1 次要素における一様ひずみ場, 一様応力場に対応する.

つまり, PDS とは, 垂 Voronoi ブロックの集合で定義される剛体粒子群の並進運動で表現される変位場に対して, その共役図形である Delaunay 三角形 (四面体) 上で変位の勾配に関する物理量 (ひずみ場・応力場) を平均化して評価する手法である.

なお, 体積力 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ は,

$$b_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N b_i^\alpha \phi^\alpha(\mathbf{x}) \quad (9)$$

で離散化され, 弾性係数 c_{ijkl} が位置 $\mathbf{x}$ の関数 $c_{ijkl}(\mathbf{x})$ であれば

$$c_{ijkl}(\mathbf{x}) = \sum_{\beta=1}^M c_{ijkl}^\beta \psi^\beta(\mathbf{x}) \quad (10)$$

で離散化される.

(3) PDS-FEM の定式化

通常の有限要素法で変位場を離散化するときには, 互いに重なり合う滑らかな形状関数を用いて, 要素内では滑らかな変位場が得られるようになっている. これに対して, PDS によって離散化された変位場は, 式 (6) から分かるように, 互いに重なり合わず, 通常の有限要素法では要素として用いられる Delaunay 三角形 (四面体) Ψ^β 内で不連続となる変位場である.

このような, 剛体粒子の並進に対応する変位場に対して, 粒子間の相互作用, すなわち粒子間の相対位置

の変化によって生じるひずみ場・応力場を正しく評価する手法が存在しないことが、DEM (Distinct Element Method: 個別要素法) をはじめとする粒子系シミュレーションを用いた固体連続体の変形と破壊過程の解析手法に共通する問題点である。

本節では、PDSを有限要素法に組み込んだ手法、PDS-FEM の定式化を行う。具体的には、式 (3) の汎関数 $J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ に、式 (6) から式 (10) のPDSによる離散化を施すことにより、粒子的な変位場を用いて $J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ を数値的に評価する手法を示す。

PDS-FEM の定式化の結果、粒子的に離散化された変位場に対して、粒子間の相互作用を正しく評価できることが示される。すなわち、PDS-FEM が固体連続体の正しい粒子的描像を与え、変形・破壊の問題に対する粒子系シミュレーションツールとして使用可能であることが示される。

式 (3) の汎関数 $J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ に、式 (6) から式 (10) の離散化された関数を代入して得られる離散化された汎関数 $\hat{J}(u_i^\alpha, \varepsilon_{ij}^\beta, \sigma_{ij}^\beta)$ は、

$$\begin{aligned} \hat{J}(u_i^\alpha, \varepsilon_{ij}^\beta, \sigma_{ij}^\beta) = & \sum_{\beta=1}^M \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^\beta c_{ijkl}^\beta \varepsilon_{kl}^\beta \Psi^\beta \right. \\ & \left. - \sigma_{ij}^\beta \left(\varepsilon_{ij}^\beta \Psi^\beta - \sum_{\alpha=1}^N u_j^\alpha \int_{\Psi^\beta} \phi_{,i}^\alpha(\mathbf{x}) \psi^\beta(\mathbf{x}) dV \right) \right] \\ & - \sum_{\alpha=1}^N b_i^\alpha u_i^\alpha \Phi^\alpha \quad (11) \end{aligned}$$

となる。ここで、 Φ^α は α 番目の重 Voronoi ブロックの面積 (体積)、 Ψ^β は β 番目の Delaunay 三角形の面積 (四面体の体積) として用いた。

ε_{ij}^β と σ_{ij}^β に関する $\hat{J}$ の停留条件から、

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial \varepsilon_{ij}^\beta} = 0 \Rightarrow \sigma_{ij}^\beta = c_{ijkl}^\beta \varepsilon_{kl}^\beta \quad (12)$$

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial \sigma_{ij}^\beta} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{ij}^\beta = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} \left(B_j^{\beta\alpha} u_i^\alpha + B_i^{\beta\alpha} u_j^\alpha \right) \quad (13)$$

が得られる。式 (13) 中の $B_i^{\beta\alpha}$ は、

$$\begin{aligned} B_i^{\beta\alpha} &= \frac{1}{\Psi^\beta} \int_{\Psi^\beta} \phi_{,i}^\alpha(\mathbf{x}) \psi^\beta(\mathbf{x}) dV \\ &= \frac{1}{\Psi^\beta} \int_{\partial\Psi^\beta} n_i^\alpha(\mathbf{x}) dS \\ &= \frac{1}{\Psi^\beta} \int_{\partial\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta} n_i^\alpha(\mathbf{x}) dS \quad (14) \end{aligned}$$

である。式 (14) 中では、 Φ^α 上の特性関数 $\phi^\alpha(\mathbf{x})$ の x_i 方向の微分の Ψ^β 上での面積分 (体積分) を、ガウスの発散定理と重 Voronoi ブロックの剛体変位の性質を用いて、 $\partial\Phi^\alpha \cap \Psi^\beta$ 上での Φ^α の外向き法線ベクトル $n_i^\alpha(\mathbf{x})$ の線積分 (面積分) に置き換えている。

そして、式 (14) の $B_i^{\beta\alpha}$ は、通常の有限要素法で用いられる三角形 1 次要素 (四面体 1 次要素) において離散化された変位とひずみの関係を表す B-マトリクスと一致している。これが、PDS-FEM の最も重要な意義である。

PDS で導入した「剛体粒子群の並進に対応する変位場」は、通常の有限要素法の 1 次要素で用いられる「互いに重なり合う線形の形状関数で補間された変位場」とは全く異なる。しかし、PDS-FEM が与える離散化された変位-ひずみ関係は、通常の有限要素法のそれと一致する。このことは、PDS-FEM により粒子的に離散化された変位場に対して、粒子間の相互作用を通常の有限要素法と同じ精度で評価できることを示している。

式 (11) に式 (12) および式 (13) を代入したうえで、 u_i^α に関する $\hat{J}$ の停留条件を求めると、

$$\frac{\partial \hat{J}}{\partial u_i^\alpha} = 0 \Rightarrow \sum_{\gamma=1}^N K_{ik}^{\alpha\gamma} u_k^\gamma - b_i^\alpha \Phi^\alpha = 0 \quad (15)$$

が得られる。ここで、

$$K_{ik}^{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^M B_j^{\beta\alpha} c_{ijkl}^\beta B_l^{\beta\gamma} \Psi^\beta \quad (16)$$

であり、式 (15) は、三角形 (四面体) 1 次要素を用いた通常の有限要素法で得られる剛性方程式と一致する。

(4) ハミルトン形式の PDS-FEM

PDS-FEM の定式化により、固体連続体は重 Voronoi ブロックの剛体粒子群 $\{\Phi^\alpha\}$ で表現された。したがって、PDS-FEM を自然な形で動的問題に拡張すれば、固体連続体の運動の粒子系シミュレーションが実現する。

本節では粒子系シミュレーションの常道に従い、PDS-FEM をハミルトン形式で定式化¹³⁾する。

重 Voronoi 粒子 Φ^α の質量を m^α 、重 Voronoi 粒子の母点 $\mathbf{x}^\alpha$ の並進運動の速度を $\dot{\mathbf{u}}^\alpha$ とすると、系全体の運動エネルギー T は、

$$T(\dot{\mathbf{u}}^\alpha) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m^\alpha \dot{u}_i^\alpha \dot{u}_i^\alpha \quad (17)$$

のように、重 Voronoi 粒子 Φ^α の運動エネルギーの総和で表される。

粒子の運動による固体連続系の変形に対応する系全体のポテンシャルエネルギー V は、式 (16) の剛性マトリクスを用いて、

$$V(\mathbf{u}^\alpha) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N \frac{1}{2} K_{ij}^{\alpha\gamma} u_i^\alpha u_j^\gamma \quad (18)$$

と表される。なお、本節以降では、式 (2) の体積力 $b_i(\mathbf{x})$ は無視して定式化を進める。

運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V に対して、ラグランジアン L は、 $L = T - V$ で定義される。また、これに一般化運動量 p 、一般化変位 q 、一般化速

度 $\dot{q}$ を導入して、ラグランジアン L のルジャンドル変換をとると、 $H = p\dot{q} - L$ により、ハミルトニアン H を定義することができる。本論文が対象としている問題では座標系は運動せず、固定されているため、重 Voronoi 粒子 Φ^α の変位、速度と一般化変位、速度との関係は

$$q_i^\alpha = u_i^\alpha \quad (19)$$

$$\dot{q}_i^\alpha = \dot{u}_i^\alpha \quad (20)$$

となる。したがって、ラグランジアン L は

$$\begin{aligned} L &= T(\dot{q}_i^\alpha) - V(q_i^\alpha) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m^\alpha \dot{q}_i^\alpha \dot{q}_i^\alpha - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N \frac{1}{2} K_{ij}^{\alpha\gamma} q_i^\alpha q_j^\gamma \end{aligned} \quad (21)$$

となり、一般化運動量 p_i^α は

$$p_i^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^\alpha} = m^\alpha \dot{q}_i^\alpha \quad (22)$$

となる。以上より、重 Voronoi 粒子系 $\{\Phi^\alpha\}$ の運動のハミルトニアン H は、

$$\begin{aligned} H &= T(p_i^\alpha) + V(q_i^\alpha) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{(p_i^\alpha)^2}{2m^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N \frac{1}{2} K_{ij}^{\alpha\gamma} q_i^\alpha q_j^\gamma \end{aligned} \quad (23)$$

で与えられる。

この粒子系の運動の時間発展は

$$\dot{q}_i^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha} = \frac{p_i^\alpha}{m^\alpha} = \dot{u}_i^\alpha \quad (24)$$

$$\dot{p}_i^\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_i^\alpha} = -\sum_{\gamma=1}^N K_{ij}^{\alpha\gamma} q_j^\gamma = -\sum_{\gamma=1}^N K_{ij}^{\alpha\gamma} u_j^\gamma \quad (25)$$

となる。

(5) シンプレクティック数値積分法

重 Voronoi 粒子系 $\{\Phi^\alpha\}$ の運動の時間発展の式 (24) および式 (25) を精度よく積分するために、シンプレクティック数値積分法¹⁴⁾を用いる。時刻 t における変位 $\mathbf{u}(t)$ 、運動量 $\mathbf{p}(t)$ を $(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{p}^{(0)})$ とすると、

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{p}^{(0)}) &= [\mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)] \\ \mathbf{u}^{(k)} &= \mathbf{u}^{(k-1)} + \beta_k \Delta t \mathbf{p}^{(k-1)} \\ \mathbf{p}^{(k)} &= \mathbf{p}^{(k-1)} - \alpha_k \Delta t \nabla_u V(\mathbf{u}^{(k)}) \\ k &= 1, \dots, n \\ \mathbf{p}^{(h)} &= \mathbf{p}^{(h-1)} - \beta_{h-n} \Delta t \nabla_u V(\mathbf{u}^{(h-1)}) \\ \mathbf{u}^{(h)} &= \mathbf{u}^{(h-1)} + \alpha_{h-n} \Delta t \mathbf{p}^{(h)} \\ h &= n+1, \dots, 2n \\ [\mathbf{u}(t+2\Delta), \mathbf{p}(t+2\Delta)] &= (\mathbf{u}^{(2n)}, \mathbf{p}^{(2n)}) \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、 α_k, β_k は n 次のシンプレクティック係数である。本論文で後に示す数値解析には、4 次のバイラテラ

ル・シンプレクティック積分を用いた。具体的な係数は

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_4 = (2 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}})/6 \\ \alpha_2 &= \alpha_3 = (1 - 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})/6 \\ \beta_1 &= 0 \\ \beta_2 &= \beta_4 = 1/(2 - 2^{\frac{1}{3}}) \\ \beta_3 &= 1/(1 - 2^{\frac{2}{3}}) \end{aligned} \quad (27)$$

である。

4. 破壊進展解析

PDS-FEM のハミルトン形式での定式化により、線形弾性体の動的挙動に対するハミルトニアン H について、式 (23) の表現が得られた。式 (23) 中の m_α は、 α 番目の重 Voronoi 粒子の質量であり、 $K_{ij}^{\alpha\gamma}$ は、 α 番目と γ 番目の重 Voronoi 粒子の間の相互作用（相対変位により生じる力）を表すマトリクスである。 $K_{ij}^{\alpha\gamma}$ は、式 (14) の重 Voronoi ブロックの境界上での積分を用いて、式 (16) で表される。

破壊は、隣接する重 Voronoi ブロック間の相互作用が失われることであり、破壊が発生した重 Voronoi ブロック境界で式 (14) の線積分（三次元問題では面積分）の値をゼロにすることにより表現される。

以上の扱いにより、線形弾性体における破壊進展（新たな破壊面の生成）と、ばねの切断を伴う多自由度系の挙動とのアナロジーが成立する。そして、1 次元のばね・マスモデルのときと同様に、新たな破壊面の生成に要する時間の長さにより、その破壊面の生成前後での系全体のハミルトニアンの変化量を求めることができる。

以下、本論文で提案する動的破壊進展速度の支配法則に関する作業仮説、「脆性的に破壊する線形弾性体の動的破壊進展過程において、新たな破壊面を生成するための表面エネルギーを加えたハミルトニアンが、破壊前後で保存する速度で新たな破壊面は生成される」を用いて線形弾性体の破壊進展解析を行った結果を示す。

解析対象の形状、載荷条件、破壊面の形状が可能な限り単純になるように問題を設定し、これに速度依存性のない材料パラメータを適用した数値解析を施す。

本論文で提案する「動的破壊進展速度の支配法則に関する作業仮説」により、破壊進展の加速・減速・停止、定常的破壊進展など、動的破壊進展過程において観察される基本的な現象を再現可能であることを示すが、以下の破壊進展解析の目的である。

(1) パラメトリック・スタディ

図-6 に示す、切り欠きを有する薄板の上面と下面に、鉛直方向に一樣な引張荷重を作用させる。薄板の材料

図-6 パラメトリック・スタディの解析対象

表-1 高強度の 4340 鋼の材料特性

ヤング率 E	1.96×10^2 GPa
質量密度 ρ	7.85×10^3 kg/m ³
ポアソン比 ν	0.300
縦波の速さ C_V	5.80×10^3 m/s
横波の速さ C_S	3.10×10^3 m/s
レイリー波の速さ C_R	2.87×10^3 m/s
破断直応力 σ_c	1.855 GPa
表面エネルギー (靱性) G	4.59×10^3 J/m ²

は高強度の 4340 鋼とする。高強度の 4340 鋼は脆性的に破壊する材料である。表-1 にその材料特性を示す。

実際の材料を使って破壊進展実験を行うと、材料の中に存在するわずかな不均質性を作る場の乱れにより、破壊面は必ずしも図-6 に示した対称面と一致するわけではない。PDS-FEM による破壊進展解析は、このようなわずかな不均質性を作る場の乱れによる破壊進展経路の乱れを表現する能力もある¹⁵⁾が、本論文は動的破壊進展速度の支配法則に着目しているため、破壊進展を図-6 に示した対称面上にのみ限定し、図-7 に示す上半分のみを解析対象とする。

境界条件は図-8 のように、上面 ($y = 23.7$ mm) に一様な応力で引張り、底面 ($y = 0$ mm) は y 軸方向に変位ゼロである。底面 ($y = 0$ mm) のうち、 $x = 23.7$ mm は x 軸方向に変位ゼロ、 $z = 0$ mm は z 軸方向に変位ゼロである。図-6 と図-7 の相違点は、図-7 の底面 ($y = 0$ mm) で弾性波が反射するという点である。また、破壊進展は図-6 の対称面に限定されているため、破壊面の分岐やマイクロクラックの生成は起きない。

図-7 の解析対象に、メッシュサイズ (Delaunay 四面

図-7 破壊進展を対称面に限定した解析モデル

図-8 破壊進展を対称面に限定した解析モデルの境界条件

体 1 次要素の辺長の平均) 0.286 mm の均一な空間的離散化を施し、要素数 608166、節点数 112460 の有限要素モデルを作成した。このモデル上面の節点に、破壊進展開始条件が満たされるだけの様な力を y 軸の正の方向に作用させたときの静的つり合い状態における変位場を変位初期条件とし、速度の初期条件を様にゼロとする。時間積分に 4 次のバイラテラル・シンプレクティック数値積分を用いて、破壊進展に伴う変位場・速度場の時間発展を、時間ステップ $\Delta t = 1.0 \times 10^{-8}$ sec で計算した。

破壊面が図-8 の底面 ($y = 0$ mm) に限定されているため、Cohesive Element を用いた先行研究^{4),5),6),7),8),9)}に倣い、底面で y 方向の変位を拘束された節点の節点反力の変更および変位拘束の解放により、破壊を表現する。ただし、新たな破壊面の生成のためには、ふたつの条件が満たされる必要がある。1 つは材料強度の条件であり、もう 1 つはエネルギーバランスの条件である。

底面を構成する Delaunay 四面体 1 次要素の節点反力に基づいて $y = 0$ mm 面に作用する y 軸方向の直応力を計算し、それが破断直応力 (σ_c) を超えた場合、そ

の節点を、新たに破壊面に加える候補とする。これが、材料強度の条件である。

時刻 t で材料強度の条件を満たし、新たに破壊面に加わる候補となる節点が出てきたとする。これらの節点の変位拘束を解放する前、すなわち破壊進展前の系全体のハミルトニアン (H_t) を計算する。次に、破壊面に加わる候補となる節点の変位拘束を時間 τ かけて解放し、破壊進展後の系全体のハミルトニアン ($H_{t+\tau}$) を計算する。このとき、変位拘束を解放するまでの時間 (τ) を変化させ、破壊進展前後のハミルトニアン之差 ($H_t - H_{t+\tau}$) が、新たな破壊面を生成するための表面エネルギー (GS , G は材料を劈開して単位面積の破壊面を生成するために必要な表面エネルギー, S は新たな破壊面の面積) と等しくなるような時間で変位拘束を解放する。

$H_t - H_{t+\tau}$ は、 τ の増加に伴って増加するが、固体連続体の場合も図-2 に示すばね・マスモデルの場合と同様、頭打ちになる。したがって、節点反力が破壊進展に関する材料強度の条件を満たしても、 $H_t - H_{t+\tau} < GS$, つまり、破壊前後のハミルトニアンの変化量が新たな破壊面を生成するために必要なエネルギーに届かない、という状況が生じ得る。新たな破壊面の生成のためのエネルギーバランスの条件は、 $H_t - H_{t+\tau} = GS$ となるような時間 τ が存在することである。

以上の破壊進展条件を用いて、表-1 に示す材料特性を持つ薄板の破壊進展解析を行った。破壊進展の開始は、上面節点の y 軸正の方向に一様な直応力 $\sigma_0 = 2.5 \times 10^8$ Pa に対応する節点力を加えたときであり、その節点力を保持していると、破壊進展は継続した。破壊進展のスナップショットを図-9 に、破壊面先端の位置と破壊面の進展速度との関係を図-10 に、破壊進展開始からの経過時間と破壊面先端の位置との関係を図-11 にそれぞれ示す。

それぞれのグラフの軸は、無次元化されている。破壊面の進展速度 v は各破壊ステップごとに破壊面の面積を解析モデルの厚さ 2.37 mm で割り、それを代表長さとし、破壊面生成時間で割った値とした。このように定義される破壊面の進展速度 v を、レイリー波の速さ C_R で割り無次元量とした。破壊面先端の位置は、破壊面の面積を解析モデルの厚さ 2.37 mm で割った代表長さとして初期亀裂 4.99 mm の和 a [mm] を解析モデルの x 方向の長さ $b = 23.7$ mm で割り無次元量とした。また、時間に関しては、破壊進展開始からの経過時間 t を、解析モデルの x 方向の長さ b とレイリー波の速さ C_R の比 b/C_R で割り無次元量とした。

図-10 には、破壊進展がレイリー波速度の約 30% の速さで開始した後、亀裂長さに対してほぼ線形に加速し、亀裂の長さが試験体の長さの半分を超えた辺りか

図-9 破壊進展のスナップショット (解析モデルを底面から見た図: 赤い部分が破壊面を示す)

図-10 破壊面先端の位置と破壊面の進展速度

図-11 破壊進展の時間と破壊面先端の位置

ら、レイリー波速度の約 70% 付近を中心に、乱れを見せながらほぼ定常的に破壊が進展していく様子が示されている。つまり、速度依存の材料パラメータを導入することなく、動的破壊進展の加速から定常的進展への推移が再現されている。また、Washabaugh et al.¹⁶⁾ など、静的載荷による脆性破壊実験の多くにおいて観測されている実験事実、「破壊面の進展速度がレイリー波速度を超えない」という定性的な性質も再現されている。

本論文で提案する動的破壊進展速度の支配法則に関

する作業仮説において、破壊進展に影響を及ぼし得る材料定数として、破断応力 σ_c 、単位面積当たりの亀裂面を生成するために必要な表面エネルギー G 、ヤング率 E がある。これら3つの材料定数をパラメータとし、3つのうち2つの材料定数は高強度の4340鋼の値を用い、1つだけを高強度の4340鋼の材料定数ではない値に変え、それが破壊進展にどのような影響を及ぼすか検証したパラメトリック・スタディの結果を以下に示す。

a) 破断応力をパラメータとした解析

高強度の4340鋼の破断応力を、 $\sigma_c/5$ 、 $\sigma_c/4$ 、 $\sigma_c/2$ 、 σ_c 、 $5\sigma_c$ に変化させた5つのケースを解析した。破断応力の違いにより、破壊が進展するのに必要な上面 ($y = 23.7 \text{ mm}$) の節点に加える y 軸正方向の一様な直応力に対応する節点力の大きさも異なる。破断応力が σ_c のときの上面の応力 $\sigma_0 = 2.5 \times 10^8 \text{ Pa}$ に対し、 $\sigma_c/5$ 、 $\sigma_c/4$ 、 $\sigma_c/2$ 、 $5\sigma_c$ における上面の応力はそれぞれ $0.80\sigma_0$ 、 $0.88\sigma_0$ 、 $0.92\sigma_0$ 、 $2.0\sigma_0$ とした。それぞれの破断応力について、破壊面先端の位置と破壊面の進展速度との関係を図-12～図-16に示す。全てのケースにおいて、新たな破壊面を生成するための表面エネルギー G は、高強度の4340鋼の物性値 $4.59 \times 10^3 \text{ J/m}^2$ に固定されているため、破断応力の値が増加するという事は、表面エネルギーに対して破断応力が相対的に増えること、すなわち材料が、より脆性的な性質をもつことを意味している。

これを踏まえて図-12～図-16を比較すると、破断応力の値が増加するにつれて、破壊面の進展速度が上

昇することと、破壊面の進展速度の乱れが大きくなること、すなわち破断応力の値の増加に伴い、破壊進展挙動の脆性的な特徴が顕著になっていくことがわかる。破壊進展開始からの経過時間と破壊面の先端の位置との関係を示した図-17も、破断応力の増加に伴う破壊面の進展速度の上昇を示している。

以上の結果は、材料の破断応力と表面エネルギーとのバランスで決まる「破壊進展挙動の脆性的特徴の変化」を表現する能力を、提案手法による数値解析が有することを示している。

一方、この解析結果は提案手法の限界および提案手法を用いた数値解析における注意点も明らかにしている。特に図-16は、破壊進展開始直後からレイリー波速度とほぼ同じ速度で破壊面が進展し、時折、スパイク状にレイリー波速度を上回る速度を示す。図-16に対応する破断応力 $5\sigma_c$ は、この解析対象が実在する材料と比較して極めて脆性的な性質をもつことを示している。このように極めて脆性的な破壊進展挙動を解析する際には、提案手法で用いた時間および空間の離散化の悪影響が顕著に表れる。

破壊進展解析において破壊進展に伴うエネルギーバランスを考慮する際には、静的・動的いずれの場合も、「破壊力学の理論に基づいて得られる亀裂先端周辺の応力場からほぼ解析的に求まるエネルギー解放率」と新たな破壊面を生成するための表面エネルギーの解放率とのバランスを考える^{1),3),17),18),19),20),21),22)}。

図-12 $\sigma_c/5$ の破壊面の進展速度

図-13 $\sigma_c/4$ の破壊面の進展速度

図-14 $\sigma_c/2$ の破壊面の進展速度

図-15 σ_c の破壊面の進展速度

図-16 $5\sigma_c$ の破壊面の進展速度

図-17 破壊進展の時間と破壊面先端位置

これに対して、提案手法では亀裂先端のエネルギー解放率のエクスプリシットな表現は用いていない。その代わりに、「いくつかの要素での破壊面の生成に伴う系全体のハミルトニアンの変化量」を「破壊面の生成に要する時間」で除することにより、破壊面の成長に伴うエネルギー解放率を評価している。つまり、本来は微分で評価されるべきエネルギー解放率を、提案手法では差分で評価していることになる。

上記の破断応力に関するパラメトリック・スタディで、破断応力が $5\sigma_c$ のような極めて脆性的な材料の破壊進展挙動の解析を行う際には、現状の（薄板の厚みをおよそ 10 分割する）要素サイズでは、差分近似の誤差が大きくなったため、図-16 のような激しい乱れとレイリー波速度を超える破壊面の進展速度を示す解析結果が生じたと考えられる。現状の解析モデルの計算には、8 コア (3.07GHz) の OpenMP 並列で 12 時間（実時間）を要している。より細かな要素分割を施して差分近似の影響を定量的に評価するためには、解析コードの高速化が必要である。

b) 表面エネルギーをパラメータとした解析

高強度の 4340 鋼の表面エネルギーを、 $G/10$, G , $10G$ に変化させた 3 つのケースを解析した。表面エネルギーの違いにより、破壊が進展するのに必要な上面 ($y = 23.7$ mm) の節点に加える y 軸正方向の一樣な直応力に対応する節点力の大きさも異なる。表面エネルギーが G のときの上面の応力 $\sigma_0 = 2.5 \times 10^8$ Pa に対し、 $G/10$,

$10G$ における上面の応力はそれぞれ $0.4\sigma_0$, $2.4\sigma_0$ とした。それぞれの表面エネルギーについて、破壊面先端の位置と破壊面の進展速度との関係を図-18 ～図-20 に示す。また、破壊進展開始からの経過時間と破壊面の先端の位置との関係を図-21 に示す。

図-19 と図-20 との比較から、表面エネルギーが G から $10G$ に上昇した場合、破壊面の進展速度が下降することが分かる。一方、図-18 と図-19 との比較からは、表面エネルギーが $G/10$ から G に上昇した場合の破壊面の進展速度の変化は見えにくい。図-21 の $G/10$ と G とを比較すれば、表面エネルギーが G のときの方が、 $G/10$ のときより破壊面の進展速度がわずかに速い（短い時間で破壊面が伸びる）ことが分かる。

破壊の前後で表面エネルギーを含めたハミルトニアンが保存するという作業仮説からは、表面エネルギーが相対的に大きくなると、新たな破壊面を生成するためには、ハミルトニアンの変化量を大きくする、すなわち長い時間をかけて破壊面を進展させる必要がある。したがって、他のパラメータを全て固定した場合には、破壊進展速度は表面エネルギーの単調減少関数であることが予想される。

$G/10$ と G の解析結果どうしの関係は、この予想と矛盾している。

この矛盾が生じた理由の一つは、表面エネルギーが小さいために、破壊が開始するのに必要な上面に加えた応力が小さくて済んだことであると考えられる。ま

図-18 $G/10$ の破壊面の進展速度

図-19 G の破壊面の進展速度

図-20 $10G$ の破壊面の進展速度

図-21 破壊進展の時間と破壊面先端位置

た、表面エネルギー $G/10$ のように、実在する材料の表面エネルギー G に対して極めて小さい表面エネルギーを設定するということは、図-6 に示した対称面 ($y = 0$ mm) の位置に、極めて脆性が高い材料の薄層が存在する材料を破断する問題設定に対応している。この場合、破壊が極めて脆性的に進展することが予想される。実際、図-18 のグラフの激しいスパイクの連なりは、極めて脆性的な破壊進展挙動と解釈することができる。破壊面以外の部分の材料の性質よりも表面エネルギー $G/10$ の極めて脆性が高い薄い層の性質が支配的であるという可能性も考えられる。

c) ヤング率をパラメータとした解析

高強度の 4340 鋼のヤング率を、 $E/5$, E , $5E$, $10E$ に変化させた 4 つのケースを解析した。

ヤング率の変化により、同じ応力レベルに対して解析対象内に発生する弾性ひずみエネルギーと弾性波速度が変化する。その結果として、破壊が進展するのに必要な上面 ($y = 23.7$ mm) 節点に加える y 軸正方向の一様な直応力に対応する節点力の大きさも異なったものになる。ヤング率が E のときの上面の応力 $\sigma_0 = 2.5 \times 10^8$ MPa に対し、 $E/5$, $5E$, $10E$ における上面の応力はそれぞれ $0.4\sigma_0$, $2.0\sigma_0$, $2.4\sigma_0$ とした。それぞれの表面エネルギーについて、破壊面先端の位置と破壊面の進展速度との関係を図-22 ～ 図-25 に示す。

なお、ヤング率が $E/10$ のときのレイリー波速度は 1.29×10^3 m/s、ヤング率が $5E$ のときは 6.43×10^3 m/s、

ヤング率が $10E$ のときは 9.09×10^3 m/s である。

図-24, 図-25 において、 $a/b > 0.7$ で破壊面の進展速度が大きく振動し、レイリー波速度を大きく超える瞬間がある。このような結果が生じた主な原因は、弾性波速度が基準の E のときに比べて、 $5E$ のときで $\sqrt{5}$ 倍、 $10E$ のときで $\sqrt{10}$ 倍になることと、ハミルトニアンの変化率の差分による評価の影響が複合的に作用したと考えられる。例えば図-24 では、 $a/b = 0.7$ の付近で破壊面の進展速度が一瞬ゼロに落ち込み、その後、急激に増加している。これは、破壊面の先端が反射波と干渉して一瞬停止した後に再び破壊進展を開始する際に、ハミルトニアンの変化率の差分近似の誤差により、次の破壊面進展に要する時間が極めて短く評価されたためと考えられる。この点に関しても、更に細かい要素サイズでの解析を行って検証する必要があることと、提案手法に改善の余地があることは認識しつつ、以下では亀裂進展速度がレイリー波の速さ C_R を超えるまでの $a/b < 0.7$ における領域に限って考察する。

破壊進展開始からの経過時間と破壊面の先端の位置との関係を図-26 に示す。 $a/b > 0.7$ の領域では、ヤング率が $5E$ および $10E$ のケースで、前述したような破壊面の進展の急な停止（グラフの傾きの急な減少）と急加速（階段状の変化）が見られる。

ヤング率が相対的に大きくなることは、同じ応力レベルに対して解析対象内に発生する弾性ひずみエネルギーが減少することを示している。例えばヤング率が

図-22 $E/5$ の破壊面の進展速度

図-23 E の破壊面の進展速度

図-24 $5E$ の破壊面の進展速度

図-25 $10E$ の破壊面の進展速度

図-26 破壊進展の時間と破壊面先端位置

E と $10E$ で形状が等しい線形弾性体に等しい応力場が発生しているとき、ヤング率が $10E$ の物体の弾性ひずみエネルギーは、ヤング率が E の物体の弾性ひずみエネルギーの $1/10$ になる。

破壊の前後で表面エネルギーを含めたハミルトニアンが保存するという作業仮説と、ヤング率が相対的に大きくなると系に蓄えられる弾性ひずみエネルギーが減少することを考え合わせると、他のパラメータを全て固定した場合には、(レイリー波速度で無次元化された) 破壊進展速度は、ヤング率の単調減少関数であることが予想される。

図-26 は、ヤング率が E から $10E$ までの領域では、破壊進展速度がヤング率の単調減少関数であることを示しており、作業仮説が正しいことを示している。一方、ヤング率が E のときの方がヤング率が $E/5$ のときよりも破壊進展速度が高く、作業仮説に基づく予想に矛盾している。

この矛盾が生じた理由として、表面エネルギーについてのパラメトリック・スタディでの考察同様、(i) ヤング率が小さい場合に、破壊が開始するのに必要な上面に加えた応力が小さくて済んだこと、(ii) 図-22 のグラフの激しいスパイクの連なりが示す極めて脆性的な破壊進展では、破壊面以外の部分の材料の性質よりも、相対的に極めて脆性が高い薄層の性質が支配的になっていること、が挙げられる。

(2) 静的変位制御による破壊進展実験との比較

提案手法による破壊進展解析の結果と、破壊進展実験の結果とを比較する。比較対象となる動的破壊進展実験は、Kobayashi et al.²³⁾による Homalite-100 の静的変位制御による実験である。静的変位制御による破壊進展では、破壊進展の加速・定常的な進展・破壊進展の停止、の3つの異なるフェーズが存在する。

以下、提案手法により、破壊進展に関する速度依存性の物性値を導入することなく、加速・定常的な進展・停止、の異なるフェーズの再現が可能であることを示す。

a) 解析モデル及び問題設定

Kobayashi et al.²³⁾による Homalite-100 の静的変位制御による動的破壊進展実験では、図-27 に示す切り欠きを有する薄板の上下面に、破壊面の進展方向に沿って線形に減少していく強制変位を与えたときの動的破壊進展に関する計測を行っている。この実験に対して、Kobayashi et al.²³⁾では、解析手法の詳細は不明であるが、本論文で前述したパラメトリック・スタディにおける解析と同様、図-28 に示す破壊面を対称面に限定した解析モデルに、図-29 に示す変位拘束の境界条件を施し、対称面(図-29 で y 軸方向の変位を拘束している $y = 0$ mm の面)上の節点の変位拘束を解くことに

図-27 Kobayashi et al.²³⁾による Homalite-100 の静的変位制御による動的破壊進展実験の概要

図-28 破壊面を対称面に限定した解析モデル

図-29 静的変位制御による破壊進展実験の解析モデルの境界条件

より破壊進展を表現する破壊進展解析を行っている。

本研究でも、Kobayashi et al.²³⁾に倣い、図-27 の実験を、図-29 の境界条件を持つ薄板の下面での Cohesive Element の破壊進展の問題としてモデル化する。

境界条件は図-29 のように、上面 ($y = 127.0$ mm) に x 軸方向に線形に減少する y 軸方向への強制変位 $u(x)$ を与える。底面 ($y = 0$ mm) は y 軸方向に変位ゼロであ

る。底面 ($y = 0$ mm) のうち, $x = 254.0$ mm は x 軸方向に変位ゼロ, $z = 0$ mm は z 軸方向に変位ゼロである。Kobayashi et al.²³⁾では, 薄板の上面に与える y 軸方向の強制変位 $u(x)$ を変えて解析している。 $u(0) = 0.132$ mm としたものを B12, $u(0) = 0.157$ mm としたものを B14, $u(0) = 0.161$ mm としたものを B15 と呼ぶ。

図-28 の解析対象に, メッシュサイズ (Delaunay 四面体 1 次要素の辺長の平均) 0.246 mm の均一な空間的離散化を施し, 要素数 236904, 節点数 49505 の有限要素モデルを作成した。このモデルに図-29 の静的荷重変位拘束の境界条件を与えたときの静的つり合い状態における変位場を変位初期条件とし, 速度の初期条件を一様にゼロとする。物性値として, 表-2 に示す Homalite-100 の材料特性を与え, 時間積分に 4 次のバ

表-2 Homalite100 の材料特性

ヤング率 E	4.65 GPa
質量密度 ρ	1.28×10^3 kg/m ³
ポアソン比 ν	0.345
縦波の速さ C_V	2.39×10^3 m/s
横波の速さ C_S	1.16×10^3 m/s
レイリー波の速さ C_R	1.09×10^3 m/s
破断応力 σ_c	43.3 MPa
表面エネルギー (靱性) G	87.1 J/m ²

イラテラル・シンプレクティック数値積分を用いて, 破壊進展に伴う変位場・速度場の時間発展を, 時間ステップ $\Delta t = 1.0 \times 10^{-7}$ sec で計算した。

b) 提案手法による解析結果と実験結果との比較

破壊面先端の位置と破壊面進展速度との関係を図-30 に, 破壊進展開始からの経過時間と破壊面先端の位置との関係を図-31 にそれぞれ示す。

それぞれのグラフの軸は, 無次元化されている。破壊面の進展速度 v は各破壊ステップごとに破壊面の面積を解析モデルの厚さ 9.525 mm で割り, それを代表長さとし, 破壊面生成時間で割った値とした。このように定義される破壊面の進展速度 v を, 縦波の速さ C_V で割り無次元量とした。破壊面先端の位置は, 破壊面の面積を解析モデルの厚さ 9.525 mm で割った代表長さとし, 初期亀裂 12.5mm の和 a [mm] を解析モデルの x 方向の長さ $b = 254.0$ mm で割り無次元量とした。また, 時間に関しては, 破壊進展開始からの経過時間 t を, 解析モデルの x 方向の長さ b とレイリー波の速さ C_V の比 b/C_V で割り無次元量とした。

図-30 (a)~図-30 (c) より, 提案手法による解析から得られた破壊面の進展速度は, 実験で得られた速度の約 2 倍であることが分かる。この乖離の原因としては, 提案手法で用いているハミルトニアン差分近似の影響の他に, (i) エネルギー散逸を考慮に入れていないこと, (ii) Homalite-100 の材料特性の非線形性を無視し

図-30 破壊面の進展速度の解析結果と実験結果との比較

図-31 破壊進展の時間と破壊面先端位置

ていること, (iii) 実験条件と解析モデルの設定の不一致, などを挙げることができ, 提案手法にはまだ多くの改善の余地があることは明白である.

一方, 図-30 (a)~図-30 (c) で破壊進展の停止位置に着目すると, 提案手法による解析は, B12 では実験結果とほとんど一致する位置での破壊面先端の停止を示し, B14, B15 ではそれぞれ約 6.6%, 10%の相対誤差での一致を示している. 図-31 のように破壊進展の経過時間と破壊面先端位置との関係でまとめた解析結果も, 境界に与えた強制変位の値が小さい B12 の破壊面先端の停止位置が B14, B15 より手前であることを示している. また, 図-31 は, B12, B14, B15 と, 強制変位の値の増加に伴い破壊進展速度が増す(グラフの傾きが急になる)という, 直観に従う解析結果も示している.

破壊進展の停止は, 静的変位拘束による破壊進展実験の特徴の一つであり, 速度依存性をもつ物性値を用いない数値解析では再現することが難しい現象である. 提案手法による解析結果が, 破壊進展の停止位置について実験結果と良好に一致する結果を生成したことは, 肯定的に評価して良い提案手法の性能のひとつである.

5. 結論

粒子離散化有限要素法 (PDS-FEM: Particle Discretization Scheme Finite Element Method) をハミルトン形式で定式化し,

脆性的に破壊する線形弾性体の動的破壊進展過程において, **新たな破壊面を生成するための表面エネルギーを加えたハミルトニアンが**, 破壊前後で保存する速度で新たな破壊面は生成される.

という, 動的破壊進展速度の支配法則に関する作業仮説に基づいて, 線形弾性体の動的破壊進展の数値解析手法を提案した.

提案手法では, 新たな破壊面生成前後の力学的状態が場の支配方程式に従って自動的に決定されるため, 破壊面近傍での残差力の再配分を人為的に行う必要はない. また, 速度に依存した材料定数を用いることなく, 新たな破壊面の生成速度も場の力学的状態によって自動的に決定される.

実験で確定できる物理量である破断応力, 表面エネルギー, ヤング率をパラメータとして, 荷重制御による動的破壊進展問題のパラメトリックスタディを行い, これらの材料定数が亀裂進展速度に与える影響を検証した. その結果,

- 表面エネルギーに対する破断応力の相対的な増加

- 表面エネルギーに対するヤング率の相対的な減少

により破壊面の進展速度が上昇する, という直観に即した現象を再現する能力を提案手法が有することが確認できた.

また, 静的変位制御による動的破壊進展実験の結果と提案手法による解析結果を比較し, 破壊面の進展速度の定量的不一致など, 提案手法に改善の余地が多くあることを明らかにした. 一方, 提案手法は, 破壊面の進展の加速, 定常的進展, 進展の停止, の異なるフェーズを再現することが可能であるという, 肯定的に評価して良い性質を有することも明らかとなった.

本論文で示した数値解析例では, PDS-FEM の特徴の一つ「破壊とそれに伴う変位の不連続の簡便な扱い」, 具体的には「要素内で生じた破壊を, 要素剛性マトリクスの成分を適切に除去することにより表現する仕組み」は使用していない. PDS-FEM は, 固体連続体の粒子的描像を与えることにより, ハミルトニアンを定義して粒子系シミュレーションを行うために用いられている. 破壊面は解析領域の外側の境界にのみ限定され, 破壊は境界上での Cohesive Element 的な扱いで表現されている. これは, 本論文の提案手法の核である「動的破壊進展速度の支配法則に関する作業仮説」の性質を検証するために, 可能な限り単純な問題設定として, 薄板の対称面上に破壊面を限定し, パラメトリック・スタディで変化させるパラメータ以外の要因の差異を排除するためである. また, 比較対象となる動的破壊進展実験の設定に合わせる必要もあったためである.

PDS-FEM の要素内破壊の表現能力を発揮した動的破壊進展問題の解析が, 本論文の次のステップとなる.

参考文献

- 1) Broek, D.: *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, 3rd ed., Martinus Nijhoff Publishers, 1982.
- 2) Yoffe, E. H.: The moving griffith crack, *Philosophical Magazine*, Vol.42, pp.739-750, 1951.
- 3) Freund, L. B.: *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, 1990.
- 4) Daphalapurkar, N. P., Lu, H., Coker, D. and Koman-duri, R.: Simulation of dynamic crack growth using the generalized interpolation material point (GIMP) method, *International Journal of Fracture*, Vol.143, pp.79-102, 2007.
- 5) Ruiz, G., Pandolfi, A. and Ortiz, M.: Three-dimensional cohesive modeling of dynamic mixed-mode fracture, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.52, pp.97-120, 2001.
- 6) Zhou, F., Molinari, J. F. and Shioya, T.: A rate-dependent cohesive model for simulating dynamic crack propagation in brittle materials, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.72, pp.1383-1410, 2005.
- 7) Chandar, K. R.: Dynamic fracture of nominally brittle materials, *International Journal of Fracture*, Vol.90, pp.83-102, 1998.

- 8) Hao, S., Liu, W. L., Klein, P. A. and Rosakis, A. J.: Modeling and simulation of intersonic crack growth, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.41, pp.1773-1799, 2004.
- 9) Xu, X. P. and Needleman, A.: Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.42, No.9, pp.1397-1434, 1994.
- 10) 岩田暁, 車谷麻緒, 寺田賢二郎, 岡澤重信, 樫山和男: 高速引張载荷を受けるコンクリートのメソスケール破壊シミュレーション, 応用力学論文集, Vol.12, pp.311-319, 2009.
- 11) Hori, M., Oguni, K. and Sakaguchi, H.: Proposal of FEM implemented with particle discretization for analysis of failure phenomena, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol.53, No.3, pp.681-703, 2005.
- 12) 小國健二, 堀宗朗, 坂口秀: 破壊現象の解析に適した有限要素法の提案, 土木学会論文集, No.766/I-68, pp.203-217, 2004.
- 13) Wijerathne, M. L. L., Sakaguchi, H., Oguni, K. and Hori, M.: 3D dynamic crack propagation analysis with PDS-FEM, *JAMSTEC-R IFREE Special Issue*, 2009.
- 14) Casetti, L.: Efficient symplectic algorithms for numerical simulations of Hamiltonian flows, *Physica Scripta*, Vol.51, pp.29-34, 1995.
- 15) Oguni, K., Wijerathne, M. L. L., Okinaka, T. and Hori, M.: Crack propagation analysis using PDS-FEM and comparison with fracture experiment, *Mechanics of Materials*, Vol.41, pp.1242-1252, 2009.
- 16) Washabaugh, P. D. and Knauss, W. G.: A reconciliation of dynamic crack velocity and Rayleigh wave speed in isotropic brittle solids, *International Journal of Fracture*, Vol.65, pp.97-114, 1994.
- 17) Sharon, E., Gross, S. P. and Fineberg, J.: Energy dissipation in dynamic fracture, *Physical Review Letters*, Vol.76, pp.2117-2120, 1996.
- 18) Shih, C. F., Moran, B. and Nakamura, T.: Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body, *International Journal of Fracture*, Vol.30, pp.79-102, 1986.
- 19) Li, F. Z., Shih, C. F. and Needleman, A.: A comparison of methods for calculating energy release rates, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.21, No.2, pp.405-421, 1985.
- 20) Mcmeeking, R. M.: Crack tip energy release rate for a piezoelectric compact tension specimen, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.64, pp.217-244, 1999.
- 21) Yeoh, O. H.: Relation between crack surface displacements and strain energy release rate in thin rubber sheets, *Mechanics of Materials*, Vol.34, pp.459-474, 2002.
- 22) Xie, Y. J., Xu, H. and Li, P. N.: Crack mouth widening energy-release rate and its application, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol.29, pp.195-203, 1998.
- 23) Kobayashi, A. S., Emery, A. F. and Mall, S.: Dynamic finite element and dynamic photoelastic analysis of crack arrest in Homalite-100 plates, *Fast Fracture and Crack Arrest, ASTM STP*, Vol.627, pp.95-108, 1977.

(2012. 3. 19 受付)

A PROPOSAL OF NUMERICAL ANALYSIS METHOD FOR DYNAMIC CRACK PROPAGATION IN LINEARLY ELASTIC SOLIDS

Masanori KONDO and Kenji OGUNI

Dynamic crack propagation is one of the unsolved problems in the field of continuum solid mechanics. Especially, lack of governing mechanism of dynamic crack propagation velocity makes the problem difficult. Most of the existing numerical analysis methods for dynamic crack propagation introduce rate dependent material parameters.

A numerical analysis method for dynamic crack propagation without rate dependent material parameters is proposed in this paper. All the material parameters used in the proposed method can be experimentally determined. The major technical elements in the proposed method are PDS-FEM (Particle Discretization Scheme Finite Element Method) and newly proposed "working hypothesis on the governing mechanism of dynamic crack propagation." These technical elements introduce (i) simple treatment of fracture and corresponding discontinuity in displacement field, (ii) mechanism for re-distribution of residual nodal force, and (iii) governing mechanism for crack propagation velocity without rate dependent artificial material parameters.