一般化有限要素法による不連続性の近似に関する比較考察

A comparative study on PU-based finite element methods for approximating strong/weak discontinuities

車谷 麻緒*・寺田 賢二郎**

Mao KURUMATANI and Kenjiro TERADA

*正会員 茨城大学 工学部 都市システム工学科 (〒 316-8511 茨城県日立市中成沢町 4-12-1)

**正会員 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

This paper focuses on approximation properties for strong/weak discontinuities in the PU-based finite element methods. The extended finite element method (X-FEM), which is one of the PU-based FEM, enables us to approximate the discontinuous deformation due to crack/interface with the enrichment functions. In contrast, the finite cover method (FCM), which is also one of the PU-based FEM, is capable of representing discontinuous behavior by defining the multiple sets of finite covers (elements) instead of using the enrichment functions. We examine the properties and the effects of these different PU-based approximations for strong/weak discontinuities in this paper. Section 2 shows two types of approximations of strong/weak discontinuities in the PU-based FEM by taking X-FEM and FCM for instance, and explains the equivalence of them. Several numerical examples are presented to examine the analysis accuracy and efficiency for structures involving a line crack, a branched crack and a material interface in Section 3.

Key Words : *partiton of unity (PU), eXtended FEM (X-FEM), finite cover method (FCM), enrichment, strong/weak discontinuity*

1. はじめに

コンクリートや岩盤のひび割れ、鋼材の疲労き裂など、土木工学が対象とする力学シミュレーションでは、不連続変形のモデル化が必要となるケースは多い。また、計算機性能の向上に伴い、コンクリートのメソスケールや複合材料のミクロスケールにおける複雑な構造を直接的にシミュレートすることも行われている。通常の有限要素法 (FEM) を用いて、これらを精度良くかつ効率的に解析するのは容易ではなく、メッシュを物理境界と適合させないことで、解析モデルの生成から数値解析までを効率化したり、材料破壊に伴うクラックの形成・進展の解析において、解析メッシュの配置とは独立に不連続変形の幾何学的表現を行うといった対処法が挙げられる。

近年、有限要素法 (FEM) におけるプリプロセッシングの煩雑さや不連続変形に伴うリメッシングからの解放を意図して、要素を用いない、あるいは要素の存在を意識しないで解析が可能なメッシュフリー法の研究開発および応用研究が行われている^{1),2)}。なかでも、FEM における PU³⁾ (Partition-of-Unity) 特性に着目して開発された一般有限要素法の研究が最も盛んに行われている。マニフォールド法⁴⁾、有限被覆法 (Finite Cover Method; FCM)⁵⁾、PUFEM⁶⁾、GFEM (Generalized Finite Element Method)⁷⁾、X-FEM (eXtended Finite Element Method)^{8),9)}、Hansbo 法¹⁰⁾などが、PU 法に基づく一般化有限要素法に分類されている。たとえば、X-FEM や GFEM では、図-1 (a) に示すように、エンリッチ関

数と呼ばれる解の特徴を表した関数を付加して、PU 法に基づいて近似を高度化することにより、要素内に変位の不連続性やひずみの不連続性を導入している。一方、有限被覆法や Hansbo 法では、X-FEM や GFEM と同様にエンリッチ関数による近似の高度化が可能ではあるが、図-1 (b) に示すように、不連続境界に対して節点がサポートする近似領域をそれぞれ定義し、これらを重ね合わせることで要素内の不連続性を表現する方法が示されている¹⁴⁾。また、要素内の材料界面におけるひずみの不連続性の近似方法に対しても、X-FEM ではエンリッチ関数による近似が行われ¹¹⁾、FCM や Hansbo 法では境界接合法による近似が主に採用されている^{12),13),14)}。

上で挙げた一般化有限要素法は、各手法の開発経緯や近似概念によって、名称や不連続性の近似方法が異なっているだけであり、たとえば、X-FEM で採用されているエンリッチ関数による不連続性の近似を FCM に導入することは可能である。近年では、不連続変形や複雑な解析対象のモデル化に対して、一般化有限要素法の適用を検討するケースは少なくない。その場合、一般化有限要素法の適用とともに不連続性の近似方法も選択することになり、それぞれの近似方法の特徴・実装性・解析精度・計算効率が整理されていれば、非常に有益な情報となり得るが、それらのデータをまとめた例は見当たらない。

そこで本論文では、一般化有限要素法を用いて、要素内における変位やひずみの不連続性を近似する際の、近似方法・解析精度・計算効率について比較考察する。

(a) Discontinuous approximation in the X-FEM

(b) Discontinuous approximation in the FCM

図-1 一般化有限要素法における変位の不連続性の近似

第2節では、近似の概念や不連続性の近似方法の相違が特徴的なX-FEMとFCMを例に、変位の不連続性とひずみの不連続性に対する近似方法の相違を説明するとともに、それぞれの近似方法の関係性と等価性について述べる。第3節では、クラックによる変位の不連続性を有する例題と材料界面によるひずみの不連続性を有する例題を対象に、一般化有限要素法における不連続性の近似方法の相違による解析精度や計算効率について比較検討する。第4節では、本研究の総括を行う。

2. 一般化有限要素法による不連続性の近似

一般化有限要素法におけるPU法に基づく変位の近似について説明する。ここでは特に、図-1(a)のような不連続変形の近似を採用するX-FEMと、図-1(b)のような不連続変形の近似を採用するFCMに焦点を当て、変位やひずみの不連続性の近似方法の相違や等価性について示す。また、以下では不連続変形の近似に焦点をあてるため、クラック先端での応力場の近似については除外する。クラック先端での応力場の近似に関しては、基本的にはX-FEMによる方法を用いるため、手法による近似特性の相違はない。

図-2 クラック・孔・異種材料を有する弾性体

2.1 支配方程式

図-2に示すような開口クラック・孔・異種材料（介在物）を有する弾性体を対象とする。応力に関するつり合い式、ひずみの適合条件式、弾性体の構成式は次式で表される。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \{ \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \} = \nabla^{(s)} \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$ はCauchy応力テンソル、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は微小ひずみテンソル、 $\mathbf{u}$ は変位ベクトル、 $\bar{\mathbf{b}}$ は単位体積に作用する物体力ベクトル、 $\mathbf{c}$ は弾性係数テンソル、 ∇ はナブラ演算子、 $\nabla^{(s)}$ は勾配テンソルの対称成分をつくる演算子である。

弾性体の全領域 Ω を囲む全境界 Γ は、変位が規定される境界 Γ_u 、表面力が規定される境界 Γ_t 、開口クラックの境界 Γ_c 、孔の境界 Γ_h 、異種材料の境界 Γ_m で構成され、それぞれ次の境界条件が与えられるものとする。

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_c \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_h \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_{[1]} = \mathbf{u}_{[2]} \quad \text{and} \quad \mathbf{t}_{[1]} = -\mathbf{t}_{[2]} \quad \text{on } \Gamma_m \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトル、 $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ で表される $\mathbf{t}$ は表面力ベクトルであり、 $\mathbf{u}_{[1]}$ と $\mathbf{u}_{[2]}$ および $\mathbf{t}_{[1]}$ と $\mathbf{t}_{[2]}$ は異種材料界面 Γ_m における変位ベクトルと表面力ベクトルである。

以上で表される弾性体の境界値問題は、 $\delta \mathbf{u}$ を仮想変位とする次の仮想仕事式（弱形式）と等価である。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \mathbf{c} : \nabla \mathbf{u} \, d\Omega \\ = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (9)$$

図-3 エンリッチ関数による不連続性の近似

2.2 X-FEM による変位の近似

X-FEM では、解の特徴を表したエンリッチ関数を用いたエンリッチメントと呼ばれる要素近似の高度化により、要素内に存在する各種境界で満たすべき変形条件を満足させる。具体的には、図-3 に示すように、クラックであれば変位が不連続になるようヘビサイド関数を、材料界面であればひずみが不連続になるようランプ形の関数をエンリッチ関数とし、PU 近似に基づいて変位の要素近似に反映される。

エンリッチメントを含む、位置 $\mathbf{x}$ における X-FEM による変位の近似は次式で表される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N_e} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{d}_I + \sum_{I \in E} N_I(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) \mathbf{b}_I \quad (10)$$

ここで、 $N_I(\mathbf{x})$ は通常の FEM における節点 I の形状関数、 N_e は要素を構成する節点数（4 節点四辺形要素ならば 4）、 $\mathbf{d}_I$ は節点 I の自由度ベクトル、 $\mathbf{b}_I$ は節点 I の付加自由度ベクトル、 E はエンリッチされる節点集合（図-3 における□）、 $F(\mathbf{x})$ はエンリッチ関数である。

$F(\mathbf{x}) = 0$ であれば、通常の FEM と同じ変位近似となり、 $\mathbf{d}_I$ は節点変位ベクトルとなるが、X-FEM ではエンリッチメントに関する項 $F(\mathbf{x}) \mathbf{b}_I$ が付加されているので、 $\mathbf{d}_I$ は節点変位ベクトルになるとは限らない。節点

(a) Definition of branched crack and enriched nodes

(b) Values of Heaviside and Junction function

図-4 分岐クラックに対するエンリッチ近似の詳細

変位ベクトルを求めるには、 $\mathbf{d}_I$ と $\mathbf{b}_I$ を求めた後に、式 (10) により節点変位ベクトルを求め直す必要がある。

(1) 単一のクラックによる変位の不連続性の近似

分岐や交差がない単一のクラックの場合、クラックの境界で解（変位）が不連続となる特徴を持ったヘビサイド関数をエンリッチ関数に用いて、次式により不連続な変位が近似される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N_e} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{d}_I + \sum_{I \in C} N_I(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_I \quad (11)$$

ここで、 C はエンリッチされる節点集合（図-3 (a) 参照）であり、ヘビサイド関数 $H(\mathbf{x})$ は次のように定義される。

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1 & (y_c \geq 0) \\ -1 & (y_c < 0) \end{cases} \quad (12)$$

ここで、 y_c は図-3 (a) に示すようなクラックに沿った局所座標である。

(2) 分岐クラックによる変位の不連続性の近似

クラックの分岐や交差がある場合は、ヘビサイド関数が複数必要になるのに加えて、クラックの分岐を表す分岐関数が必要となる。ここでは、図-4 に示す単純なクラックの分岐を例に、X-FEM における、分岐クラックによる変位の不連続性の近似について述べる¹⁵⁾。

まず、X-FEM では、図-4 に示すように、クラックの分岐を第 1 クラック（主クラック）と第 2 クラックに分け、メインの第 1 クラックに第 2 クラックが連結していると考え、そして、第 1 クラックに対するヘビサイド関数 $H_1(\mathbf{x})$ が与えられる節点属性 C_1 を先に定義し、次いで第 2 クラックに対するヘビサイド関数 $H_2(\mathbf{x})$ が与えられる節点属性 C_2 を定義する。クラックの分岐

図-5 エンリッチ節点におけるレベルセット関数

点を含む要素では、第1クラックによる不連続性と第2クラックによる不連続性の両方を表現する必要がある。具体的には、図-4(b)に示すように、2つのクラックによって分断される3領域を $-1, 0, +1$ で表すことにすると、分岐関数 $J(\mathbf{x})$ は $H_1(\mathbf{x})$ と $H_2(\mathbf{x})$ を用いて、次のように与えられる¹⁵⁾。

$$J(\mathbf{x}) = \begin{cases} H_2(\mathbf{x}) & \text{for } H_1(\mathbf{x}) = -1 \\ 0 & \text{for } H_1(\mathbf{x}) = +1 \end{cases} \quad (13)$$

以上より、クラックの分岐を有する場合のX-FEM（エンリッチメント）による変位の近似は、ヘビサイド関数 $H_1(\mathbf{x})$ 、 $H_2(\mathbf{x})$ と分岐関数 $J(\mathbf{x})$ を用いて、次式で表される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N_e} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{d}_I + \sum_{I \in C_1} N_I(\mathbf{x}) H_1(\mathbf{x}) \mathbf{a}_I + \sum_{I \in C_2} N_I(\mathbf{x}) H_2(\mathbf{x}) \mathbf{b}_I + \sum_{I \in J_{12}} N_I(\mathbf{x}) J(\mathbf{x}) \mathbf{c}_I \quad (14)$$

ここで、 C_1 と $\mathbf{a}_I$ はヘビサイド関数 $H_1(\mathbf{x})$ によりエンリッチされる節点集合と付加自由度ベクトル、 C_2 と $\mathbf{b}_I$ はヘビサイド関数 $H_2(\mathbf{x})$ によりエンリッチされる節点集合と付加自由度ベクトル、 J_{12} と $\mathbf{c}_I$ は分岐関数 $J(\mathbf{x})$ によりエンリッチされる節点集合と付加自由度ベクトルである（図-4(a)参照）。

(3) 異種材料界面によるひずみの不連続性の近似

異種材料界面が要素内に含まれる場合、界面位置でひずみ（変位の空間微分）が不連続となる特徴をエンリッチ関数に持たせる必要がある。X-FEMでは、図-3(b)に示すようなランプ形のエンリッチ関数を用いて、材料界面でのひずみの不連続性を近似する¹¹⁾。具体的には、次式に示すようなレベルセット関数を利用したエンリッチ関数である。

$$R(\mathbf{x}) = \sum_I |f_I| N_I(\mathbf{x}) - \left| \sum_I f_I N_I(\mathbf{x}) \right| \quad (15)$$

ここで、 f_I は図-5に示すような節点におけるレベルセット関数（符号付き距離関数）で、次式で与えられる。

$$f_I(\mathbf{x}_I) = \min |\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_I| \operatorname{sign} \{ \mathbf{n}(\mathbf{x}_p) \cdot (\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_I) \} \quad (16)$$

ここで、 $\mathbf{x}_I$ は節点座標、 $\mathbf{x}_p$ は材料界面の座標、 $\mathbf{n}(\mathbf{x}_p)$ は $\mathbf{x}_p$ での外向き法線ベクトルである。

以上より、材料界面におけるひずみの不連続性を含む変位の近似は次式で与えられる。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N_e} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{d}_I + \sum_{I \in M} N_I(\mathbf{x}) R(\mathbf{x}) \mathbf{b}_I \quad (17)$$

ここで、 M は $R(\mathbf{x})$ によりエンリッチされる節点集合（図-3(b)参照）である。

X-FEMでは、一般に式(10)における $\mathbf{d}$ は節点変位ベクトルとは対応しないが、式(15)の $R(\mathbf{x})$ を採用した場合、節点上で $R(\mathbf{x}_I) = 0$ となり付加自由度の項が消えるので、 $\mathbf{d}$ は節点変位ベクトルに一致する。したがって、材料界面におけるひずみの不連続性を近似する際は、節点変位ベクトルのリカバリーを行う必要はない。

(4) 孔などの自由表面による変位の不連続性の近似

図-3(c)のように、孔などによる自由表面を含む場合、自由表面の外側で変位場がゼロとなるよう、ステップ関数を用いて、次式により不連続な変位が近似される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N_e} N_I(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \mathbf{d}_I \quad (18)$$

ここで、ステップ関数 $S(\mathbf{x})$ は次のように定義される。

$$S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \in \Omega) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin \Omega) \end{cases} \quad (19)$$

ステップ関数を用いることにより、エンリッチ要素における変位の補間近似とその他の要素における変位の補間近似を統一して表記することができる。これにより、孔などの自由表面による変位の不連続性の近似式(18)では、式(10)におけるエンリッチ近似による付加自由度を必要としない。

2.3 FCMによる変位の近似

X-FEMと同様に、FCMも一般化有限要素法のひとつであり、変位の近似式は式(10)と同形式となる。ただし、近似の概念や開発の経緯がX-FEMと異なることから、変位やひずみの不連続性の近似には、X-FEMのそれとは異なる方法がこれまでに採用されている。

(1) 被覆と要素

FCMにおける近似の構成要素について、簡単に説明する。図-6に示すように、FCMでは、節点自由度を中央に持つ「被覆」と呼ばれる近似の基本単位領域が定義される。これは、X-FEMにおける節点のサポート領域に対応している。PU条件を満たす重み関数が定義される被覆を数学被覆といい、これと物体領域の共通領域を物理被覆という。変位などの物理量は物理被覆で定義される。

また、FCMでは、「被覆」同士が重なり合うことにより生成される共通領域を「要素」と呼び、これが一般的なFEMでいうところの要素に対応する。

(a) Multiple set of finite covers for cracks

(b) Cover layers for cracks

(c) Multiple set of finite covers for interfaces

(d) Cover layers for interfaces

図-6 FCM における不連続性の近似方法

(2) クラックによる変位の不連続性の近似

FCM では、物理被覆ごとに変位などの物理量が定義される。図-6 (a) のように、クラックなどの不連続面により物理被覆内の物理領域が二分される場合、それぞれの物理領域を近似するために、2 重の物理被覆が定義される。このような不連続面を考慮した物理被覆の定義を全物理領域で行い「要素」を構成すると、最終的に図-6 (b) のように、不連続面をまたいで層を形成するような解析メッシュとなる。この解析メッシュを用いて離散化方程式を解けば、クラックによる不連続変形が近似される。

クラックの分岐がある場合、図-6 (a) のように、物理被覆内の物理領域が三分されるので、3 つの物理領域を近似するために、3 重の物理被覆が定義される。FCM では、クラックの形態に応じて被覆の定義数が異なるだけであり、X-FEM における式 (13), (14) のように、複数のヘビサイド関数や分岐関数を用いる必要はない。

FCM でも変位の近似式は式 (10) と同形式になるので、X-FEM と同様にヘビサイド関数を用いて不連続変形を近似することは可能である。しかし、FCM では近似の概念に基づいて、上記のような方法により、不連続変形を近似する方法が採用されてきた。また、X-FEM において、自由表面による不連続性を近似する式 (18) をクラックのモデル化に適用すれば、図-6 (b) と同様の解析メッシュとなるので、FCM のような不連続変形の近似を X-FEM でも同様に行うことができる¹⁶⁾。

(3) 異種材料界面によるひずみの不連続性の近似

図-6 (c) のように、異種材料界面が物理被覆内に含まれる場合も物理被覆内の物理領域が二分されるので、クラックの場合と同様に、それぞれの物理領域を近似するために、2 重の物理被覆が定義される。材料界面を考慮した物理被覆の定義を全物理領域で行い「要素」を構成すると、最終的に図-6 (d) のように、それぞれの材料に対して層を形成するような解析メッシュとなる。ただし、このままでは材料ごとに近似領域を定義しただけで、材料界面における変形条件は満たされない。モルタル法のような境界接合を行う必要がある。ここでは、最も基本的で簡易なペナルティ法を採用することになると、弱形式 (9) に境界接合の項が加わり、次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \mathbf{c} : \nabla \mathbf{u} \, d\Omega + \underbrace{\int_{\Gamma_m} \bar{p} \, \delta \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \, d\Gamma}_{\text{Penalty term}} \\ = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 $\bar{p}$ はペナルティ係数、 $\mathbf{g}$ は異種材料境界 Γ_m における相対変位ベクトルである。

FCM でも X-FEM と同様に、式 (17) に示したランプ形の関数を用いたエンリッチ近似により、材料界面による不連続変形を近似することは可能であるが、FCM では上記のような不連続変形を近似する方法が採用されてきた。また、X-FEM において、自由表面による変位の不連続性を近似する式 (18) を材料界面のモデル化に適用すれば、図-6 (d) と同様の解析メッシュとなるので、境界接合法による近似を X-FEM でも同様に行うことができる。

2.4 数値積分と自由表面による不連続性の近似

一般化有限要素法による解析メッシュには、クラックや材料界面などの境界を内部に含んだ要素が定義される。そのため、要素は定型であっても、要素内の積

図-7 不連続性に対する数値積分のための領域分割の例

分領域が任意形状となるので、通常の FEM のような数値積分法をそのまま適用できない。

本論文では、図-7 に示すように、要素内の物理領域（積分領域）を三角形に分割し、面積座標に基づくガウス積分法を適用する。具体的には、クラックの解析には 3 点積分を適用し、異種材料の解析には 4 点積分を適用する。なお、積分点の数をこれ以上増やしても精度に影響しないことを確認している。

以上のように、要素内における物理領域でのみ積分を行うことは、式 (18), (19) で示したステップ関数を用いて、自由表面による変位の不連続性を近似していることと等価である。実際、X-FEM において自由表面による不連続性を表す場合は、ステップ関数を直接用いずに、数値積分により不連続性を近似しており、FCM において不連続性を表す場合も同様に、数値積分により不連続性を近似している。したがって、孔などの自由表面による不連続性の近似に対しては、FCM や X-FEM にかかわらず同様の近似方法となり、解くべき方程式も完全に同じものとなる。

3. 不連続性の近似特性に関する比較考察

本節では、簡単な数値実験を通して、前節で示した不連続性に対する近似方法の相違が、解析精度や計算効率に与える影響について比較考察する。はじめに、クラックによる変位の不連続性に関する例題を示した後、異種材料界面によるひずみの不連続性に関する例題を示す。簡単のため、すべて 2 次元平面ひずみ問題を対象とする。

近似方法の相違を比較考察するにあたり、以下では、エンリッチ関数による近似を採用した方法を“X-FEM”，解析メッシュの多重定義による近似を採用した方法を“FCM”と便宜上総称することとする。

図-8 単一クラックに対する例題

表-1 単一クラックの例題における節点数と自由度数

	nodes	DOFs / node		total DOFs
		2	4	
X-FEM	16	12	4	40
FCM	20	20	0	40

3.1 単一クラックによる変位の不連続性

はじめに、単一クラックによる変位の不連続性の近似について、比較考察する。解析対象は、図-8 に示すような、中央左側にクラックを有する構造とする。材料パラメータや境界条件は同図に示す通りとする。

X-FEM と FCM における節点数と自由度数をまとめたものを表-1 に示す。X-FEM では、クラックによる不連続変形を近似するための自由度が、図-8 中の□で示した節点に追加される。三角形 1 次要素では、□で示した節点は 1 節点あたり 4 自由度、それ以外の節点は 1 節点あたり 2 自由度となる。これに対して、FCM では、1 節点あたり自由度はすべて 2 であるが、□で示した位置に節点が追加されることになる。FCM では、不連続変形を近似するために、1 節点あたりの自由度が増えるのではなく、節点が増える。総自由度数はどちらも同じである。

X-FEM と FCM では、クラックによる不連続変形に対して、異なる近似方法を採用しているが、両者の解析結果は図-9 に示す通り、完全に一致する。しかし、X-FEM と FCM では剛性マトリックス、すなわち解くべき方程式が異なるので、ここでは計算効率について比較検討しておく。図-10 に、X-FEM と FCM における全体剛性マトリックスの固有値の分布を示す。固有値は昇順に並べ、各固有値は最大固有値で正規化している。これを見て分かるように、マトリックス（方程式）の性質は、どちらもほぼ同様であり、連立方程式

図-9 単クラックの解析結果（最大主応力分布）

図-10 単クラックの例題における全体剛性行列の固有値

図-11 分岐クラックの例題

の解法に反復解法を用いる場合、どちらの近似の方法を採用しても計算効率に差はほとんど生じない。ただし、FCMでは全体方程式の解ベクトルは節点変位ベクトルと直接対応するが、X-FEMでは式(10)により変位ベクトルをリカバリーする必要がある分だけ計算量は多い。

3.2 分岐クラックによる変位の不連続性

次に、分岐クラックによる変位の不連続性の近似について、比較考察する。解析対象は、図-11に示すよう

(a) Enriched nodes in the X-FEM

(b) Multi-nodes in the FCM

図-12 分岐クラックに対する近似方法の相違（節点・自由度）

な、分岐クラックを有する構造とする。材料パラメータや境界条件は同図に示す通りとする。

最初に、分岐クラックに対する、X-FEMとFCMによる不連続変位の近似の相違についてまとめておく。図-12(a)に示すように、X-FEMでは分岐クラックを第1クラック（主クラック）と第2クラックに分け、第1クラック、第2クラックの順にそれぞれのエンリッチ節点を定義した後、分岐を表すためのエンリッチ節点を定義する。最終的に、図-11中の□には1節点あたり4自由度、■には1節点あたり6自由度のエンリッチ節点が定義される。ただし、図-12(a)で見たように、□と◇の節点は同じ4自由度を有する節点ではあるが、エンリッチ関数が異なるため、これらは区別しておく必要がある。したがって、エンリッチ節点ではない通常の節点を含めて、4種類の節点が必要となる。

一方、FCMではクラックを1と2に分ける必要はなく、クラックにより分断される各物体領域が適切に（不連続に）近似されるように、物理被覆を定義していけばよい。具体的には、図-11中の□には2重の節点（被覆）を、■には3重の節点（被覆）が定義され、図-12(b)に示すように、クラックにより分断される各物理領域が不連続に近似されるように、多重節点における各節点を配置すればよい。図-12(b)の節点配置は一例であり、これ以外のパターンでも構わない。

前と同様に、X-FEMとFCMにおける節点数と自由度数をまとめたものを表-2に示す。分岐クラックがあると、X-FEMでは1節点あたり2自由度、4自由度、6自由度の節点がそれぞれ必要となるが、FCMでは節点変位を表す2自由度の節点のみでよい。総自由度数はどちらも同じである。

単クラックの場合と同様に、両者の解析結果は図

表-2 分岐クラックの例題における節点数と自由度数

	nodes	DOFs / node			total DOFs
		2	4	6	
X-FEM	64	42	18	4	180
FCM	90	90	0	0	180

図-13 分岐クラックの解析結果（最大主応力分布）

図-14 分岐クラックの例題における全体剛性行列の固有値

-13 に示す通り，完全に一致する．全自由度数と解析結果は一致するが，両者の全体剛性マトリックスは異なっている．X-FEM と FCM における全体剛性マトリックスの固有値の分布を図-14 に示す．単一クラックの例では，固有値の分布にほとんど違いは見られなかったが，分岐クラックの例では，両者に違いが見られる．実際，反復解法のひとつである共役勾配法を用いてこの例題を解くと，固有値分布の相違により，FCM の方が約 10 % 反復回数が少なくてすみ，計算効率が良い．また，単一クラックの場合と同様に，X-FEM では，式 (10) により変位ベクトルをリカバリーする必要があるが，FCM ではその必要がない分だけ計算量は少ない．

以上をまとめると，クラックに対する節点・自由度の定義方法の相違，および剛性マトリックスの固有値分布や計算過程の相違により，FCM で採用されている変位の不連続性の近似方法の方が，計算量が少なくてすむ可能性が高い．

図-15 異種材料界面に対する例題

	Young's modulus	Poisson's ratio
matrix	20 GPa	0.2
inclusion	50 GPa	0.2

3.3 異種材料界面によるひずみの不連続性

次に，異種材料界面によるひずみの不連続性の近似について，比較考察する．解析対象は，図-15 に示すような，円形の介在物を中央に有する二相構造とする．材料パラメータや境界条件は同図に示す通りとし，解析に使用するメッシュは四角形と三角形のメッシュとする．これらメッシュは，要素境界と材料界面形状とを整合させていない．

異種材料界面に対する不連続ひずみの近似の相違について，X-FEM では材料界面と交差する要素節点がエンリッチ節点となり，1 節点あたり 4 自由度を有する節点が配置される．FCM では，材料界面と交差する要素節点に 2 重節点を定義し，クラックの場合と同様に，材料ごとに物理領域が不連続に近似されるように各節点を配置する．そして，エンリッチ近似ではなく，境界接合法により材料界面での連続性を近似する．境界接合法として様々な方法が挙げられるが，ここでは最も基本的で簡易なペナルティ法を採用する．総自由度数はどちらも同じである．

解析結果を比較したものを図-16 に示す．ここでは参照解として，アイソパラメトリック要素による FEM の解を示している．まず，エンリッチ近似を採用している X-FEM では，四角形メッシュ・三角形メッシュともに参照解とほぼ同じ結果を与えている．これに対し

図-16 異種材料界面の近似方法の相違による解析精度への影響（最大主応力分布）

て、境界接合法による近似を採用している FCM では、導入する境界接合法の特性（ここではペナルティ係数の大小）に依存した結果を与えている。

両者の計算効率を比較した一例として、共役勾配法における反復回数をまとめたものを図-17 に示す。グラフにおいて、FCM における反復回数は X-FEM の反復回数で正規化している。X-FEM で採用しているエンリッチ近似では、新たなパラメータが増えることはなく、またマトリックスの性質が極端に悪化することもないので、通常の FEM には劣るものの安定した計算効率は得られる。しかし、境界接合法による近似を採用すると、パラメータによる影響等を受けやすいので、エンリッチ近似を採用した場合に比べて、安定した計算効率を得るのは容易ではない。

以上より、異種材料界面での不連続ひずみの近似において、境界接合法による近似を採用すると、境界接合法の特性に依存した解析精度・計算効率となるが、X-FEM で採用しているエンリッチ近似を用いれば、安定した解析精度・計算効率を得られる。また、不連続ひずみ

図-17 異種材料界面の近似方法の相違による計算効率への影響（共役勾配法における反復回数）

の近似に対して式 (15) のエンリッチ関数を採用した場合、節点上で付加自由度の項が消えるので、クラックによる不連続変位の近似とは異なり、式 (10) により変位ベクトルをリカバリーする必要がない。リカバリー計算が不要となることも、材料界面に対するエンリッチ近似のメリットのひとつである。

4. おわりに

一般化有限要素法の大きな特徴は、有限要素メッシュとは独立に、変位やひずみの不連続性を近似できることである。不連続性の近似方法はひとつではなく、X-FEM ではエンリッチメントと呼ばれる関数近似が採用されており、FCM では解析メッシュを多重にして不連続性を近似する方法が主に採用されている。不連続変形や複雑な解析対象のモデル化に対して、一般化有限要素法の適用を検討する際、不連続性の近似方法も選択することになる。それぞれの近似方法の特徴や解析精度・計算効率が整理されていれば、非常に有益な情報となり得るので、それらの情報を整理しておく必要がある。

本論文では、まず、近似の概念や不連続性の近似方法の相違が特徴的な X-FEM と FCM を例に、変位の不連続性とひずみの不連続性に対する近似方法の相違を説明するとともに、それぞれの近似方法の関係性と等価性について述べた。そして、数値解析例として、単一クラックと分岐クラックおよび異種材料界面を有する問題を取り上げ、不連続性に対する近似方法の相違が解析結果や計算効率に与える影響について比較考察した。クラックによる不連続変位の近似については、X-FEM で採用されているヘビサイド関数によるエンリッチ近似よりも、FCM で採用されている多重節点による方法の方が、節点および自由度の定義、計算過程の簡便さ、計算効率においてメリットが多いことを示した。また、異種材料界面による不連続ひずみの近似につい

ては、FCM で採用されている境界接合法による近似よりも、X-FEM で採用されているエンリッチ近似の方が、安定した解析精度・計算効率が得られることを示した。

参考文献

- 1) 土木学会 応用力学委員会 計算力学小委員会 (編) : 国際セミナー「土木工学における計算力学手法の新展開」セミナーテキスト, 2005.
- 2) 日本計算工学会 (編), 鈴木克幸, 長嶋利夫, 萩原世也 (著) : メッシュフリー解析法, 丸善, 2006.
- 3) I. Babuška and J.M. Melenk: The partition of unity method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.40, pp.727–758, 1997.
- 4) G.-H. Shi: Manifold method of material analysis, *Transactions of the 9th Army Conference On Applied Mathematics and Computing*, Report, No.92–1, U.S. Army Research Office, pp.52–204, 1991.
- 5) K. Terada, M. Asai and M. Yamagishi: Finite cover method for linear and nonlinear analyses of heterogeneous solids, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.58, pp.1321–1346, 2003.
- 6) J.M. Melenk and I. Babuška: The partition of unity finite element method: Basic theory and applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol.139, pp.289–314, 1996.
- 7) T. Strouboulis, I. Babuška and K. Copps: The design and analysis of the Generalized Finite Element Method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol.181, pp.43–69, 2000.
- 8) T. Belytschko and T. Black: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.43, pp.601–620, 1999.
- 9) N. Moës, J. Dolbow and T. Belytschko: A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.46, pp.131–150, 1999.
- 10) A. Hansbo and P. Hansbo: A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol.193, pp.3523–3540, 2004.
- 11) N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud and J.-F. Remacle: A computational approach to handle complex microstructure geometries, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol.192, pp.3163–3177, 2003.
- 12) A. Hansbo and P. Hansbo: An unfitted finite element method, based on Nitsche’s method, for elliptic interface problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol.191, pp.5537–5552, 2002.
- 13) J. Mergheim, E. Kuhl and P. Steinmann: A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.63, pp.276–289, 2005.
- 14) M. Kurumatani, K. Terada: Finite cover method with multi-cover-layers for the analysis of evolving discontinuities in heterogeneous media, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.79, pp.1–24, 2009.
- 15) C. Daux, N. Moes, J. Dolbow, N. Sukumar and T. Belytschko: Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.48, pp.1741–1760, 2000.
- 16) J.-H. Song, P.M.A. Areias and T. Belytschko: A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.67, pp.868–893, 2006.

(2012 年 3 月 8 日 受付)