変位と変位速度を未知数にした時間領域有限要素法による動的問題 の時間積分アルゴリズムに関する一考察

A study on the formulation of dynamic problems by time domain finite element method using
displacements and velocities as unknowns and its numerical stability

小林俊一*・荒木拓真**・多田恭平***・野瀬 裕華子****・松本樹典†

Shun-ichi Kobayashi, Takuma Araki, Kyohei Tada, Yukako Nose and Tatsunori Matsumoto

*正会員 博士(工学) 金沢大学准教授 理工研究域環境デザイン学系(〒920-1192 石川県金沢市角間町)

**非会員 金沢大学大学院生 自然科学研究科

***非会員 金沢大学学生

****非会員 元金沢大学学生

†正会員 工博 金沢大学教授 理工研究域環境デザイン学系

Time integral algorithm is one of the major factors for numerical stability and precision. Many methods have been proposed to calculate time integration of an equation of motion. The Newmark family of algorithm, such as Newmark's beta method, is popular in practical calculations. In this study, however, some characteristics of FETD (finite element time domain) method with Bubnov-Galerkin formulation are investigated. Period and phase of numerical solutions calculated by a GSSSS (Generalized Single Step Single Solve) algorithm with a cubic interpolation shape function are calculated and summarized. According to the calculated results, numerical damping can be observed, if a time step is around the third of a natural period, eigen values of a transient matrix are complex values, i.e., numerical damping is observed. If a time step exceed a natural period, numerical solutions will be unstable. On the other hand, a time step is less than one third of a natural period, numerical results show good agreement to the analytical solutions.

Key Words : *Finite element time domain method, dynamic problem, Cubic interpolation, Numerical stability, Numerical error, Eigenvalue*

1. はじめに

振動問題を数値解析で解くためには、運動方程式を時間領域で積分していく必要がある。この時間積分アルゴリズムの選択は、数値解法の精度や安定性の根幹に関わる重要な問題である。振動問題を時間域で解くための方法は大まかに以下のように分類できる。

時間領域における内挿表現 一般に物理量の時間変化を時間の関数として多項式で表現する。考えられる物理量としては変位、変位速度、加速度、躍度(加速度の時間微分)があるが、アルゴリズムによって選択する未知量が異なる。また時間ステップについては、1ステップ(つまり時刻 t_i での情報を使って時刻 t_{i+1} での挙動を予測)とする方法、2ステップ以上の複数ステップを用いる方法がある。時間領域で多項式近似を行う際には、数値解析を安定させるためのパラメータを導入することが多く、パラメータの選択によって数値積分アルゴリズムの安定性が変化する。

釣合い式あるいは運動方程式の取り扱い 一般に、ある時間ステップの中で常に釣合い式あるいは運動方程式を満足させられるような近似解を構成することは難しい。したがって、強形式的にみれば、選点法的に時間ステップ内のある時点での釣合い式あ

るいは運動方程式を満足させるか、時間ステップの最後の時点で釣合い式あるいは運動方程式を満足させる方法が考えられる。一方で、時間領域にも重み関数を導入し、時間ステップ内で Galerkin 法を用い、運動方程式に関する時間領域の弱解を求める定式化も可能であり、これを FETD 法 (Finite Element Time Domain Method) と呼ぶこともある。

いずれのアルゴリズムでも、最終的には変位や変位速度等に関する既知の情報を用いて、ある時間経過後の変位や変位速度等を求める形の一次連立方程式の形で整理される。この方程式を状態推移方程式と呼ぶ。状態推移方程式に現れる状態推移行列の固有値を調べることによって、数値解の安定性と精度を評価できる。時間ステップの大きさが数値解析の効率と安定性や精度に大きく関わってくるため、状態推移行列の固有値が時間ステップによってどのように変化するかを定量的に評価することが重要となる。

例えば、代表的な時間積分アルゴリズムの1つである Newmark の β 法¹⁾は、物理量として変位、変位速度、加速度を考慮した1ステップ強形式による時間積分アルゴリズムと分類できる。Newmark の β 法の具体的なアルゴリズムは後で簡単に説明するが、パラメータのとり方によって安定性と精度が異なる幾つかの方法がよく知られている。また、時間ステップ $i, i+1$ の寄与

を人工的なパラメータ α で調整し、減衰特性を改良した HHT- α 法²⁾など、Newmark の β 法から発展した方法も実際によく使われている。この他にも多くの時間積分アルゴリズムが強形式を用いて提案されている。詳細については例えば文献³⁾を参照されたい。

さて本論文では、時間領域に関する弱解を利用した時間積分アルゴリズム、すなわち時間領域有限要素法 (FETD 法) に基づく時間積分アルゴリズム、について議論する。このアイデア自体は決して新しいものではないが、先行研究例はあまりみられない。

東平・吉田⁴⁾は時間領域について 2 ステップ、すなわち 3 点 t_i, t_{i+1}, t_{i+2} での変位を用い、時間に関して 2 次の補間関数で変位場を表現して弱形式表現を得る、時間領域有限要素法を提案し、安定性条件について議論している。その結果、時間領域での弱形式を導出する際の重み関数として、補間関数とは異なる関数を用いる Petrov-Galerkin 法に属する方法により、無条件安定を満足する時間積分アルゴリズムを提案している。ただし数値解の安定条件を検討する上では、振動系の減衰特性を無視しても安全側の解を与えenとして、数値解の減衰特性については、具体的な性質が示されていない。

Lee & Kwak⁵⁾は、東平・佐藤と同様に時間領域で 2 ステップ分の変位を用い、時間に関する 2 次の補間関数で変位場を補間した。補間関数として等間隔節点をもつ 2 次のラグランジュ要素の形状関数を使用し、試験関数として形状関数を用いる Bubnov-Galerkin 法によって弱形式表現を求め、時間刻み幅と数値解の周期、および減衰の関係について調べた。その結果、この方法は無条件安定で、時間刻み幅が大きくなると数値減衰が付加されることを報告している。

Golley⁶⁾は、変位と速度を未知数とする 3 次関数による内挿関数を用い、任意の重み関数を用いる重み付き残差法によって 1 ステップで 1 回求解を行う解法について調査し、無条件安定を与えるような重み関数、あるいはテーラー展開と一致するような重み関数を明らかにしている。これによれば、無条件安定やテーラー展開と一致するような重み関数は形状関数とは異なる関数となっており、Petrov-Galerkin 法に基づく弱形式表現に対応している。

Zhou & Tamma⁷⁾は、構造力学問題を解くための時間積分アルゴリズムとして、時間領域での弱解を利用し 1 ステップで 1 回の求解を行う解法について網羅的に調査し、その特性を論じている。時間域での近似表現は Newmark の β 法と同様の安定化パラメータを係数に含む多項式近似で表現する方法を用いている。1 ステップでのアルゴリズムを構築することや、時間領域で形状関数を陽に表現する近似方法ではない点が Lee & Kwak とは異なる。Zhou & Tamma は近似表現に用いる物理量の選択をさまざまに変えた系統的な分析を行

図-1 1 質点系の振動問題 (1 自由度系)

い、安定性条件と近似表現における安定化パラメータの関係と時間積分アルゴリズムの安定性について、状態推移行列の固有値解析の立場から議論している。また、時刻 t_i での変位と変位速度から時刻 t_{i+1} での変位および変位速度を予測する時間積分アルゴリズムでは、状態推移行列の固有値が複素数になることを指摘している。

これらの既往の研究では、数値的な収束性および位相特性に着目して状態推移行列の性質を調べ、数値的に望ましい性質を与えるような重み関数を選ぶことに主眼が置かれている。いわば望ましい数値積分を与えるような重み関数をうまく見つけることが重要とされている。その一方で、有限要素の形状関数や重み関数の選択の観点から、議論した例はあまり見られない。そこで本論文では、有限要素法で最も基本となる Bubnov-Galerkin 法を用いた時間領域弱解に基づく 1 ステップ 1 求解による時間積分アルゴリズムとして、変位および変位速度を未知数として形状関数の中に陽な形で組み込んだ 3 次関数による内挿表現を用い、時間積分アルゴリズムを定式化と数値解の安定条件と周期および減衰特性について評価したので報告する。

2. 定式化

2.1 時間領域での離散化

時間積分アルゴリズムの特徴を把握するために、図-1 に示す 1 自由度振動系を取り上げて議論する。この振動問題は以下の微分方程式で書ける。

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t), \quad (1)$$

ここに u は変位、 t は時刻、 m は質点の質量、 c は粘性減衰係数、 k はバネ係数である。

時間ステップ幅を h とし、この間の変位場 u を時刻 $\tau = 0$ での変位及び変位速度 $\omega_i = (u_i, \dot{u}_i)$ と時刻 $\tau = h$ での変位及び変位速度 $\omega_{i+1} = (u_{i+1}, \dot{u}_{i+1})$ を用いて、以

図-2 形状関数 $N(\tau)$ の概形 ($N(1,1)$ と $N(1,3)$)

図-3 形状関数 $N(\tau)$ の概形 ($N(1,2)$ と $N(1,4)$)

下の 3 次多項式として表現する。

$$u(\tau) = n_0(\tau) \cdot w_i + n(\tau) \cdot w_{i+1}, \quad (2)$$

$$\dot{u}(\tau) = \dot{n}_0(\tau) \cdot w_i + \dot{n}(\tau) \cdot w_{i+1} \quad (3)$$

ここに、関数 $n_0(\tau)$ と関数 $n(\tau)$ は時間領域に関する形状関数であり、具体的には以下のように定義される。

$$n_0(\tau) = \left(1 - 3\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau}{h}\right)^3, \tau - 2\tau\left(\frac{\tau}{h}\right) + \tau\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \right) \quad (4)$$

$$n(\tau) = \left(3\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{\tau}{h}\right)^3, -\tau\left(\frac{\tau}{h}\right) + \tau\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \right) \quad (5)$$

この内挿表現を用いて、内挿される変位場と速度場を具体的に表したものが以下の式である。

$$\begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} u_i \\ \dot{u}_i \\ u_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここに行列 $[N]$ は各成分がそれぞれ対応する形状関数になっている大きさ 2×4 の行列であり、それぞれの成

分は以下のように表される。

$$N(1,1) = 1 - 3\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau}{h}\right)^3 \quad (7a)$$

$$N(1,2) = \tau - 2\tau\left(\frac{\tau}{h}\right) + \tau\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \quad (7b)$$

$$N(1,3) = 3\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{\tau}{h}\right)^3 \quad (7c)$$

$$N(1,4) = -\tau\left(\frac{\tau}{h}\right) + \tau\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \quad (7d)$$

$$N(2,1) = -\frac{6}{h}\left(\frac{\tau}{h}\right) + \frac{6}{h}\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \quad (7e)$$

$$N(2,2) = 1 - 4\left(\frac{\tau}{h}\right) + 3\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \quad (7f)$$

$$N(2,3) = \frac{6}{h}\left(\frac{\tau}{h}\right) - \frac{6}{h}\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \quad (7g)$$

$$N(2,4) = -2\left(\frac{\tau}{h}\right) + 3\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \quad (7h)$$

形状関数の概形を図-2 および 3 に示す。

2.2 運動方程式の時間領域での弱形式表現

時間領域についても空間域と同様の考え方で運動方程式の弱形式を得ることができる。今回は時間領域について 1 ステップを考えるので、時間領域でのディリクレ境界条件は時刻 t_i における変位および変位速度、ノイマン境界条件は時刻 t_{i+1} における変位および変位速度と考えればよい。さらに時刻 t_i での変位および変位速度は既知量であるので、非斉次ディリクレ境界条件であることに注意する。

ここで試験関数 $y(\tau)$ を導入して弱形式を導出する。この試験関数は斉次ディリクレ境界条件 $y(0) = 0$ および $\dot{y}(0) = 0$ を満足する任意の関数であればよい。今回は Bubnov-Galerkin 法による定式化を行うため、時刻 t_{i+1} の物理量に用いる形状関数式 (5) を用い、以下の試験関数を用いる。

$$y(\tau) = n(\tau) \cdot \eta \quad (8)$$

ここに $\eta = (y_{i+1}, \dot{y}_{i+1})$ は、仮想変位および変位速度である。

運動方程式に試験関数を乗じ、時間 τ について区間 $[0, h]$ で積分をとる。

$$\int_0^h y(\tau) (m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - f) d\tau = 0. \quad (9)$$

そうすると以下の等式を得る

$$\eta \cdot \{Ew_{i+1} - F + E_0w_i\} = 0 \quad (10)$$

ここに、 E_0 、 E は配列 2×2 の行列、 F は配列 2×1 の

ベクトルで以下の通り計算する。

$$E_0 = \int_0^h (mn \otimes \dot{n}_0 + cn \otimes \dot{n}_0 + kn \otimes n_0) d\tau \quad (11)$$

$$E = \int_0^h (mn \otimes \dot{n} + cn \otimes \dot{n} + kn \otimes n) d\tau \quad (12)$$

$$F = \int_0^h n f d\tau \quad (13)$$

ここに記号 $\otimes$ はテンソル積を表す。

行列 E_0 および E の各成分を具体的に計算すると、以下の表現が得られる。ここに行列及び積分演算は数式処理システム Maxima⁸⁾を用いた。

$$E_0(1, 1) = \frac{84m - 35ch + 9kh^2}{70h} \quad (14a)$$

$$E_0(1, 2) = \frac{42m - 42ch + 13kh^2}{420} \quad (14b)$$

$$E_0(2, 1) = -\frac{42m - 42ch + 13kh^2}{420} \quad (14c)$$

$$E_0(2, 2) = \frac{14mh + 7ch^2 - 3kh^3}{420} \quad (14d)$$

$$E(1, 1) = -\frac{84m - 35ch - 26kh^2}{70h} \quad (15a)$$

$$E(1, 2) = \frac{231m + 21ch - 11kh^2}{210} \quad (15b)$$

$$E(2, 1) = \frac{21m - 21ch - 11kh^2}{210} \quad (15c)$$

$$E(2, 2) = -\frac{14mh - kh^3}{105} \quad (15d)$$

さて、ここで仮想変位及び変位速度 η が任意に選べることに注意すると、運動方程式の時間領域における弱形式表現を以下のように得る。

$$E w_{i+1} = F - E_0 w_i \quad (16)$$

この式 (16) では、右辺に既知量である時刻 t_i での変位および変位速度と、外力を時間 τ について区間 $[0, h]$ で積分した量が現れ、左辺は係数行列と時刻 t_{i+1} における未知量が出てきている。したがって、この連立方程式を時間領域で逐次的に解くことによって時間領域での振動系の挙動が評価できることになる。

自由振動問題を検討する場合、外力による項 F は恒等的に 0 であるので、式 (16) は形式的に

$$w_{i+1} = -(E^{-1} E_0) w_i \quad (17)$$

と書ける。この式 (17) のことを状態推移方程式と呼ぶ。この状態推移方程式に現れる行列 $-(E^{-1} E_0)$ の固有値を調べることで、時間積分アルゴリズムの性質を調査できる。

3. 数値実験

ここでは式 (17) による時間積分アルゴリズムの精度を調べるために一連の数値実験を行った結果を示す。用いた振動問題は、初期条件として単位の変位 $u(0) = 1$

と初速ゼロ $\dot{u}(0) = 0$ の条件を与えた 1 自由度振動系の自由振動問題である。この解析の目的は、振動系の固有周期 T にする 1 ステップの時間幅 h の大きさが、数値解析の安定性および数値解の減衰と周期にどのような影響を与えるのかを定量的に調べることである。さらに既存の方法のうち広く実務に用いられている Newmark の β 法を取り上げ、本論文で定式化した FETD 法による時間積分アルゴリズムとの比較を行う。

3.1 1 自由度振動系運動方程式の標準形

1 自由度振動系運動方程式の標準形は以下のように書ける。

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{f(t)}{m} \quad (18)$$

ここに $f(t)/m$ は質量で正規化された外力項、 ζ は減衰比で次のように定義される。

$$\zeta = \frac{c}{2} \frac{1}{\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega} \quad (19)$$

また ω は非減衰系の円固有振動数であり

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (20)$$

と定義される。

方程式 (18) の固有値は

$$\lambda = -\zeta\omega \pm i\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega. \quad (21)$$

であり、このうち実部が減衰を虚部が振動を表す。

初期条件として $t = 0$ において、単位の変位 $u(0) = 1$ と初速ゼロ $\dot{u}(0) = 0$ を与えた場合の 1 自由度系自由振動の解は

$$u(t) = \exp(-\zeta\omega t) \cdot \cos(\omega' t), \quad (22)$$

となる。ここに ω' は減衰を有する系の円固有振動数であり

$$\omega' = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega. \quad (23)$$

と計算される。

3.2 Newmark の β 法

Newmark の β 法¹⁾ は物理量として変位、変位速度、加速度を考慮した 1 ステップ強形式による時間積分アルゴリズムである。区間 t_i から t_{i+1} の間で加速度が直線的に変化すると仮定し、時刻 t_{i+1} での変位 u_{i+1} と変位速度 $\dot{u}_{i+1}$ を以下のように表す。

$$u_{i+1} = u_n + h\dot{u}_i + 0.5h^2(1 - 2\beta)\ddot{u}_i + \beta h^2\ddot{u}_{i+1} \quad (24a)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + h\{(1 - \gamma)\ddot{u}_i + \gamma\ddot{u}_{i+1}\} \quad (24b)$$

ここに β, γ は安定化パラメータで、後述するようにこのパラメータのとり方によって数値積分アルゴリズムの特性が変化する。これを時刻 t_{i+1} における運動方程式

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = f_{i+1} \quad (25)$$

に代入すると、加速度 $\ddot{u}_{i+1}$ について陽に解ける。ついで、加速度 $\ddot{u}_{i+1}$ を元の近似表現式 (24a), (24b) に代入し

て漸化式としてを解き、時刻 t_{i+1} における変位 u_{i+1} と変位速度 $\dot{u}_{i+1}$ を得る。

安定化パラメータの選択としては無条件中立安定を示す平均加速度法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/4$)、条件付き安定である線形加速度法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/6$) および条件付き安定で精度が良い Royal Road 法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/12$) がよく知られている。

3.3 数値積分アルゴリズムの特性評価

状態推移方程式の固有値解析を行い、特性方程式の主要根 (最大絶対値となる固有値) z が厳密解の固有値 λ をどの程度近似できているかを以下によって評価する。

固有値 λ の振動系では、厳密解は

$$u_{i+1} = (\exp \lambda h) u_i \quad (26)$$

を満たす。これに対して、数値解では

$$u_{i+1} = z u_i \quad (27)$$

と近似できる。

主要根 z の絶対値のことをスペクトル半径と呼び、数値積分アルゴリズムの安定性を評価するために用いる。もしスペクトル半径が 1 よりも大きい場合は、外力がゼロであっても時間の経過と共に振動の絶対値は増加し続けることを意味するので、数値計算は不安定で発散する。したがってアルゴリズムが安定であるための必要条件はスペクトル半径が 1 よりも小さいことである。

また、この特性方程式の主要根 z から数値解による固有値の近似値 $\bar{\lambda}$ を

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{h} \ln(z) \quad (28)$$

と計算し、 $\exp$ の指数部の変化、厳密解の λh と近似解の $\bar{\lambda} h$ を比較すれば、周期および減衰に関する誤差評価ができる。

数値解の円固有振動数 $\bar{\omega}$ と減衰比 $\bar{\zeta}$ はそれぞれ

$$\bar{\omega} = |\bar{\lambda}| \quad (29)$$

$$\bar{\zeta} = -\frac{\text{Re}(\bar{\lambda})}{|\bar{\lambda}|} \quad (30)$$

と計算できる。

3.4 スペクトル半径と周期および減衰の特性

式 (17) による時間積分アルゴリズムのスペクトル半径を図-4 に示す。無次元時間ステップ h/T が小さい時にはスペクトル半径はほぼ 1 となり数値的な減衰はほとんど見られないが、 h/T が増加するに連れてスペクトル半径が減少し、数値減衰が増加しはじめる。ところが、無次元時間ステップ h/T が 1 を少し越えるあたりでスペクトル半径が 1 を越えるようになり、数値計算は発散する。これは減衰比に関わらずいずれのケー

図-4 提案手法のスペクトル半径 ρ と無次元時間ステップ h/T の関係

図-5 提案手法による減衰および周期のずれ

図-6 提案手法による周期のずれ

スについても成り立つ。したがって、この時間積分アルゴリズムは条件安定であることが分かる。さらに h/T が 1/2 の付近で部分的に急激にスペクトル半径が増加しているが、この部分では特性方程式の根が異なる複素根となっている。これはすでに Zhou and Tamma⁷⁾ が指摘しているとおりである。しかしながら、スペクトル半径の値自身は 1 よりも小さいため、安定性が損なわれているわけではない。

図-7 提案手法による減衰のずれ

次に周期および減衰の特性を図-5 に示す。固有振動数 ω は固有値 λ の絶対値であること、固有周期 T と固有振動数 ω は $2\pi = \omega T$ の関係にあることに注意すれば、図-5 は、複素数である固有値 λ に $h/(2\pi)$ を乗じた量 $\lambda h/(2\pi)$ を複素平面上（横軸：実数、縦軸：虚数）に描いたものであることが分かる。原点を中心にした円は h/T が同じであることを表し、原点から出る一定の傾きの線は減衰比 ζ が同じであることを表す。ここでは、さまざまな固有周期 T と減衰比 ζ を有する系に対して、時間ステップ h をさまざまに変えて数値解析を行った結果を、厳密解の $\lambda h/(2\pi)$ （図中破線）と数値解の $\tilde{\lambda} h/(2\pi)$ （図中実線）とで比較して描いている。厳密解と数値解の比較では、原点からの距離および鉛直上向き軸からの角度の振れに着目する。数値解の方が原点に近づいておれば数値解の固有周期 $\tilde{T}$ が厳密解よりも大きくなっていることが分かり、数値解の方が鉛直上向き軸に振れていれば数値解の減衰が厳密解よりも小さくなっていることが分かる。

図-5 では無次元時間ステップ h/T が 0 から 0.5 の範囲での状況を描いており、原点に近い領域すなわち十分に小さな時間ステップを確保出来る領域では厳密解と数値解はほぼ一致していることが分かる。一方 h/T がおよそ $1/3$ よりも大きくなると鉛直上向き軸からの振れが増加し、数値的な減衰が現れていることが分かる。特に減衰の小さな系でその傾向が目立つ。一方、さらに h/T が大きくなると数値減衰が一時的に減少することも分かる。これは前述のスペクトル半径が部分的に大きくなる領域に対応している。同じ結果を周期の相対的なずれに着目して整理したものが図-6、減衰の相対的なずれに着目して整理したものが図-7 である。

次に、提案手法の特性を Newmark の β 法と比較してみる。無条件安定である平均加速度法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/4$) のスペクトル半径を図-8 に、減衰および周期のずれを図-9 に示す。同数値解析結果を周期の相対的なずれ、減衰の相対的なずれで整理しなおしたものを図-10、図-15 に示す。

図-8 Newmark の β 法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/4$) によるスペクトル半径 ρ と無次元時間ステップ h/T の関係

図-9 Newmark の β 法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/4$) による減衰および周期のずれ

図-10 Newmark の β 法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/4$) による周期のずれ

図-11 に示す。

また同様に条件付き安定である線形加速度法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/6$) についてもスペクトル半径を図-12 に、減衰および周期のずれを図-13 に示す。同数値解析結果を周期の相対的なずれ、減衰の相対的なずれで整理しなおしたものを図-14、図-15 に示す。

図-9 と図-13 を比較すれば、線形加速度法は安定条件を満たしている範囲では平均加速度法よりも周期、減

図-11 Newmark の β 法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/4$) による減衰のずれ

図-14 Newmark の β 法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/6$) による周期のずれ

図-12 Newmark の β 法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/6$) によるスペクトル半径 ρ と無次元時間ステップ h/T の関係

図-15 Newmark の β 法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/6$) による減衰のずれ

図-13 Newmark の β 法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/6$) による減衰および周期のずれ

図-16 応答波形の例 (固有周期 $T = 1$, 減衰比 $\zeta = 0.05$, 無次元時間ステップ $h/T = 0.1$)

衰特性とも優れた数値解析結果を出していることが分かる。

また提案手法の周期と減衰特性 (図-5 参照) と Newmark の β 法の周期と減衰特性を比較すると、今回図化した無次元時間ステップ h/T が 0 から 0.5 程度の範囲では、提案手法は周期や減衰特性について、平均加速度法や線形加速度法よりも優れた特性を示すことが分

かる。

3.5 応答波形

最後に、減衰比 $\zeta = 0.05$ の弱い減衰を持つ 1 自由度振動系について、得られる応答波形についても見ておく。スペクトル半径の図-4 を参考に、無次元時間ス

図-17 応答波形の例 (固有周期 $T = 1$, 減衰比 $\zeta = 0.05$, 無次元時間ステップ $h/T = 1.2$)

図-18 応答波形の例 (固有周期 $T = 1$, 減衰比 $\zeta = 0.05$, 無次元時間ステップ $h/T = 1.8$)

ステップ h/T を 0.1, 1.2, 1.8 としたときの応答波形をそれぞれ図-16, 17, 18 に示す。前者 2 つは安定条件を満足しているケースで、 $h/T = 0.1$ 程度を確保すれば応答波形は厳密解とほぼ一致していることが分かる。一方、 $h/T = 1.2$ では当然予想されたことではあるが、固有周期よりも長い時間ステップで計算しているために計算自体は発散していないが、波形の再現は困難である。また最後のケースは安定条件を満足できていないケースであるが、やはり数値解析が発散していることが分かる。

4. 結論

本論文で得られた結論をまとめると以下のとおりである。

振動問題を数値解析で解くために必要となる時間積分アルゴリズムを FETD 法 (Finite Element Time Domain Method 時間領域有限要素法) の考え方に基づいて検討した。時間領域で形状関数と試験関数を導入し、Bubnov-Galerkin 法に基づいて運動方程式の弱形式を計算することで状態推移方程式を導出した。また

GSSSS (Generalized Single Step Single Solve 1 ステップ解法) を実現するために 3 次内挿関数を形状関数として導入し、変位と変位速度を未知量とする時間域の離散化を行った。

導出された状態推移方程式の固有値解析を行い、時間積分アルゴリズムの数値的な安定性と数値解の特性 (周期や減衰のずれ) について検討した。特性評価には 1 自由度系単振動の自由振動問題を取り上げて、数値解と厳密解を比較しその特性を調査した。その結果、提案する手法は条件付き安定で、大まかに言って 1 ステップの時間幅が自由振動系の固有周期を超えれば数値解は発散する傾向が見られた。また 1 ステップの時間幅が固有周期の大体 $1/2$ 付近では、状態推移方程式の固有値が複素数になるために、位相差が数値的に加わる。1 ステップの時間幅が固有周期の大体 $1/3$ よりも小さくなれば、数値解は振幅・位相ともほぼ厳密解と一致し正確な計算が可能であることが分かった。

これを従来から広く利用されている Newmark の β 法と比較した所、本提案手法は数値的な安定性については無条件安定の平均加速度法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/4$) よりも劣るが、条件安定の線形加速度法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/6$) よりも優れており、より大きな無次元時間ステップに対して安定性条件を満たすことが分かった。また本提案手法は安定条件を満たす範囲では、平均加速度法や条件安定解法である線形加速度法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/6$) よりも優れた周期および減衰特性を示し、理論解とのずれが小さなことも分かった。

今後の課題としては、地盤振動解析では不要となる高周波数領域の波に対して大きな数値減衰が自動的に付与され、無条件安定を示すような、実務上望ましい時間積分アルゴリズムが FETD 法によって構築できるかどうかを検討したいと考えている。今回は時間領域で変位や変位速度等を内挿しているという物理的な意味付けを明確にするために、Bubnov-Galerkin 法による形状関数を明示的に用いた定式化を行った。一方、移流項を持つ問題に有限要素法を適用する場合は Bubnov-Galerkin 法では、安定性に問題が生じることはよく知られている (例えば文献⁹⁾¹⁰⁾)。時間領域の離散化においても、時間が一方向に増加していく性質を考えれば、移流項を持つ問題と同じような性質を示すことは想像に難くないので、Petrov-Galerkin 法に基づく検討が必要であると考えられる。従来から Newmark の β 法、HHT- α 法や Zhou & Tamma⁷⁾ が示した FETD 法による時間積分アルゴリズム構築法に見られるように、状態推移方程式の固有値解析によってさまざまな時間積分アルゴリズムが検討されてきたが、これを Petrov-Galerkin 法の立場から整理し、内挿関数や重み関数の選択と数値的な精度・安定性の関係を具体的に検討し、数値的な安定性を付与する安定化パラメータの力学的な意味付けや解釈を再検討したいと考えている。さらに同様の手法

を複数ステップを利用した時間積分アルゴリズムに展開した場合についても検討が必要である。

参考文献

- 1) N.M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 85, No. 7, pp. 67–94, 1959.
- 2) H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, and R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 5, No. 3, pp. 283–292, 1977.
- 3) 日本機械学会. 数値積分法の基礎と応用. コンピュータダイナミクスシリーズ. コロナ社, 2003.
- 4) 東平光生, 吉田望. 時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法による地盤振動解析. 土木学会論文集, No. 410/I-12, pp. 395–404, 1989.
- 5) D.I. Lee and B.M. Kwak. A direct integration method of elastodynamics using finite element time discretization. *Computers & structures*, Vol. 47, No. 2, pp. 201–211, 1993.
- 6) B.W. Golley. A weighted residual development of a time-stepping algorithm for structural dynamics using two general weight functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42, No. 1, pp. 93–103, 1998.
- 7) X. Zhou and K.K. Tamma. Design, analysis, and synthesis of generalized single step single solve and optimal algorithms for structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 59, No. 5, pp. 597–668, 2004.
- 8) Maxima. Maxima, a computer algebra system. version 5.25.1, 2011.
- 9) J. Donea. A taylor–galerkin method for convective transport problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, No. 1, pp. 101–119, 1984.
- 10) 日本数値流体力学有限要素法研究委員会. 有限要素法による流れのシミュレーション. シュプリンガー・ジャパン, 1998.

(2012 年 3 月 8 日 受付)