テンセグリティ仮想剛性構造の釣合特性に関する数値実験的研究

A study on equilibrium shape of tensegrity structures with virtual stiffness through some numerical experiments

帯屋洋之*・モハメドニザムビンザカリア**・井嶋克志***・川崎徳明****・松尾郁*****

Hiroyuki OBIYA, Muhammad Nizam Bin ZAKARIA, Katsushi IJIMA, Noriaki KAWASAKI and Aya MATSUO

*博(工) 佐賀大学大学院准教授, 工学系研究科都市工学専攻 (〒849-0918 佐賀市本庄町1番地)

**佐賀大学大学院 工学系研究科博士後期課程 (〒849-0918 佐賀市本庄町1番地)

*** 工博 佐賀大学大学院教授, 工学系研究科都市工学専攻 (〒849-0918 佐賀市本庄町1番地)

****佐賀大学大学院技術職員, 工学系研究科都市工学専攻 (〒849-0918 佐賀市本庄町1番地)

*****株式会社横河技術情報 (〒273-0026 千葉県船橋市山野町47-1)

Tensegrity structures give us so much motivation to find a rational form by shape analyses. A tensegrity structure with virtual stiffness has so many equilibrium shapes and it may be hard to obtain a target solution by designation of a set of primary conditions. This study shows the results of some numerical experiments whose aim is to find rational forms of tensegrity structures. Form finding analyses for tensegrity towers in a gravitational field often bring unexpected equilibrium shapes, in such a case; the incremental analysis by compulsory displacement is effective. Moreover, when we consider that a tensegrity structures constructed by virtual elements behaves in an equilibrium system, some solutions are connected each other on equilibrium path. In this paper, load-displacement curves include bifurcation path are also shown and the properties of the equilibrium system are discussed.

Key Words: form finding, tensegrity structures, virtual elements, equilibrium path

1. まえがき

構造物内部の応力や剛性の分布を最適化することによって形状をデザインする「形態創成」の概念は、古くはブラトーの石鹸膜実験やガウディの懸垂曲面にその起源を見ることができる。構造物のカタチをただ人間の感性だけで決めるのではなく、力学的な考察と数学理論によって追求しようとするこの考え方は、その後の計算機性能の進化とともに「形態解析」という構造解析の一分野にまで発展し、現在でも多くの研究者がこの命題に取り組んでいる。

本論文で取り上げるテンセグリティは、その独特な力学システムと造形美から、形態解析の分野においても最も多く取り上げられてきた構造系の一つである。Fuller (1895-1983)によって考案されたこの構造系は、比較的剛な圧縮材(ストラット)と圧縮には抵抗しない柔な引張材(ケーブル)から成る複合構造で「張力材同士は節点を介して接続可能であるが、圧縮材同士の接続はない」という基本ルールによって成立している。また、この基本ルールに加え「自碇式」(内部応力のみによって成立する自己釣合)の条件を満たすものを特に「純粋テンセグリティ」¹⁾として区別する場合もある。この純粋テンセグリティは、構造系としては特異な力学的性質を持っていることが知られて

おり、たとえば、Maxwellの公式の条件より少ない部材数で形態が自立する場合があること、あるいは、安定な拘束条件を与えなくても(極端には外的拘束を全く与えない条件の下でも)安定な釣合系形状が得られること、などについて、これまでに多くの研究がなされている²⁾³⁾。

テンセグリティの形態解析手法としてはForce Density Method⁴⁾⁷⁾が最もよく知られている。この手法によれば、各部材に任意の軸力密度(Force Density=軸力を部材長で除したパラメータ)を指定することにより張力構造の形状を線形解析で求めることができる。しかし、これを純粋テンセグリティに適用した場合には、形状成立要件を満たすような部材間軸力密度比を求めるための予備計算が必要となる。よって、対称性が低いモデルや節点数が多いモデルの場合には、大規模固有値解析など⁷⁾によってこの軸力密度比を求めなければならない。また、Motroらの一連のテンセグリティ研究の中では比較的対称性が低いモデルに対して動的緩和法を適用する試み⁸⁾もなされている。

一方、著者らは、幾何学的非線形構造解析において「要素座標系内における要素挙動に起因する幾何剛性と要素の剛体変位に起因する幾何剛性を完全に分離すれば、要素端方式で定義された要素挙動に整合する厳密な釣合解が得られること」⁹⁾に着目し、等張力石鹸膜要素や線長比例軸力線要素のような仮想に(勝手に)要素端力と要素変形

写真-1 Snelson のテンセグリティタワー¹⁴⁾

の関係性を定義した仮想剛性要素から成立する「仮想剛性構造」（以降、本研究ではこの呼称を用いる）を用いて形態解析を行ってきた^{10)~12)}。このなかでも文献¹²⁾では、圧縮材に剛棒、引張材に2次軸力線（軸力が要素長の2乗に比例する線材要素）から成るテンセグリティ仮想剛性構造を用いれば、比較的安定な反復計算過程のもと純粋テンセグリティの形状が得られることを示している。また、要素の挙動を自由に決めるということは、すなわち、この要素のひずみエネルギーに相当する要素ポテンシャルを任意に定めることと等価となる。その意味においてはMikiら¹³⁾による要素汎関数の考え方もこれに近いのではないかとと思われる。

テンセグリティの形態解析における一つの問題点は「解の数が多い」ことである。一組の初期条件（要素方式における各係数、コネクティビティ、荷重条件）に対して複数の釣合形状が存在し、特に、対称性が低く総自由度も大きいという条件を許容する場合には、幾何学的制約条件により平衡条件マトリックスを圧縮し計算過程の安定化を図ることも困難となる。また、エネルギー状態が低い解が優勢的に現れるとは限らず、複数ある解のうちのどこに収束するかは「やってみないとわからない」というカオティックな状況に直面することとなる。川口ら³⁾は、この複雑なシンプレックスの変形モードを説明するために、最もシンプルな形状のテンセグリティのひとつである“シンプレックス”を対象として、群論を用いた整理を行っている。

また、写真-1に示したスネルソンのテンセグリティタワー¹⁴⁾のように、その形状を定めるためには重力の関与を排除できない場合（斎藤¹⁾によれば、このように純粋テンセグリティの定義をから外れるものを「広義のテンセグリティ」という）には、比較的高いエネルギー状態にある目的解を何の付加条件も与えずに1セットの反復計算で求めることは非常に困難であると考えられる。

本研究では、このように多様に存在するテンセグリティ仮想剛性構造の釣合特性を調べるためにいくつかの数値実験を実施しており、これらの結果から合理的かつ効率的な形態解析のための基礎的知見を得ることを目的としている。以下に本研究における数値実験の概要を示す。

- 文献¹²⁾においては、圧縮材に剛棒を用いていたが、通常のトラス要素¹⁵⁾を用いたほうが、総自由度は大きくなるもののNewtonRaphson法と同等の二次収束性が実現する。ここでは、両モデルの精度と計算効率について比較検討している。

- ある程度、目的解の概形が判っているケースでは、変位制御により制御点の反力がゼロとなる解を探索し、多様に存在する解の中から、ひとつの解に追い込みをかける手法が考えられる。ここでは5層テンセグリティタワーを例題として検討する。
- 軸力線-トラス要素によるテンセグリティ仮想剛性構造は実構造物におけるエラスティカと同様の釣合系を形成する考えることができる。このことを踏まえ、2層テンセグリティタワーの釣合経路の追跡を行うことにより、重力場を考慮する場合としない場合の解の性状について比較・考察する。
- テンセグリティ仮想剛性構造では、対称性に基づく幾何学的制約条件を挿入しなければ、様々な非対称モードへの分岐が観察できる。制御点を1点に集約した2層テンセグリティタワーモデルについて、無重力条件下での分岐経路追跡を実施し、主経路および分岐経路上にある自己釣合解を特定する。

2. 仮想剛性要素による形態解析手法

仮想剛性要素の定式化については、既に著者らの既往研究¹²⁾で詳しく述べているので、ここではその概略を示す。

2.1 接線剛性方程式

部材両端に離散化された互いに独立な要素端力の組を要素端力ベクトル $\mathbf{S}$ とし、これと三次元空間に固定された基準座標系との間の平衡条件マトリックスを $\mathbf{J}$ とすれば、基準座標系表示の外力としての節点力ベクトル $\mathbf{U}$ は、

$$\mathbf{U} = \mathbf{J}\mathbf{S} \quad (1)$$

となり、本研究では、この釣合条件式の変分をとった以下の接線剛性方程式を用いる。

$$\delta\mathbf{U} = \mathbf{J}\delta\mathbf{S} + \delta\mathbf{J}\mathbf{S} = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G)\delta\mathbf{u} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{K}_0$ は要素座標系内における要素挙動に起因する接線要素剛性、 $\mathbf{K}_G$ は要素の剛体変位に起因する接線幾何剛性である。また、 $\delta\mathbf{u}$ は基準座標系表示された節点変位ベクトルである。

2.2 要素ポテンシャル関数

要素座標系内における要素挙動を規定するため、要素ポテンシャルを要素長、面積などの要素に関する幾何学量の関数として定義する。要素ポテンシャルを定義することは、要素に「仮想剛性」を設定することと等価であり、ここに任意の関数を定義しても、記述された要素挙動に整合する釣合解が得られることになる。

いま、要素ポテンシャル P に対して、要素の形状を規定する上で互いに独立となる要素寸法の組を $\mathbf{s}$ とすれば、

$$\mathbf{S} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{s}} \quad (3)$$

のように要素端力が得られる。

2.3 線長関数軸力線要素

本研究で用いる線長関数軸力線要素は、著者らの文献¹²⁾と同様に、線材要素の要素ポテンシャルが線長 l のべき乗に比例すると定義する。

$$P = Cl^{n+1} \quad (4)$$

これに式(3)を適用すれば、

$$N = (n+1)Cl^n \quad (5)$$

のように軸力線要素の軸力 N が得られ、これが要素力式となる。 C を要素力係数、 n を要素力次数と呼ぶことにする。 C および n を全要素に亘って一定とした節点外力 $=0$ の系では C の値にかかわらず同一の解が得られる。また、この軸力線要素の方向余弦ベクトルを α とすれば、式(1)は次式のように書き直すことができる。

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} N \quad (6)$$

従って、これに式(1)から式(2)への展開を適用すれば

$$\delta \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \mathbf{k}_T^L \delta \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{k}_T^L = (n+1)Cl^{n-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e} + (n-1)\alpha\alpha^T & -\mathbf{e} - (n-1)\alpha\alpha^T \\ -\mathbf{e} - (n-1)\alpha\alpha^T & \mathbf{e} + (n-1)\alpha\alpha^T \end{bmatrix} \quad (8)$$

となる。 $\mathbf{e}$ は 3×3 の単位マトリックス)

式(5)において、要素力次数 $n=0$ とすれば要素寸法の変化にかかわらず軸力が一定となる定軸力線要素となり、式(8)は、通常のトラス部材の接線幾何剛性と一致する。また、 $n=1$ とした場合は、式(7)は完全に線形となり、Force Density Methodを用いたのと等価な剛性マトリックスになる(この場合 $2C$ が軸力密度に相当する)。 $n \neq 1$ の場合は、非線形式となり反復計算を要することになるが、 n が大きくなるほど、釣合解における全要素の線長が揃う傾向にあることがわかっている¹⁰⁾。本研究では、要素力次数 $=n$ の軸力線要素を「 n 次軸力線」と呼称する。

2.4 圧縮材に用いるトラス要素

本研究では、圧縮材に通常の構造解析で用いるのと同じトラス要素を用いており、これにより剛棒要素を用いた場合¹²⁾に比べ大幅な収束性の改善を図ることができる。以下に一要素に関する接線剛性方程式および要素力式を示す。ここで、 EA は伸び剛性、 δl は要素の伸び、 l_0 は要素無応力長である。

$$\delta \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \left\{ \frac{EA}{l_0} \begin{bmatrix} \alpha\alpha^T & -\alpha\alpha^T \\ -\alpha\alpha^T & \alpha\alpha^T \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{e} - \alpha\alpha^T & -\mathbf{e} + \alpha\alpha^T \\ -\mathbf{e} + \alpha\alpha^T & \mathbf{e} - \alpha\alpha^T \end{bmatrix} \right\} \delta \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$N = \frac{EA}{l_0} \delta l \quad (10)$$

図-1 T群テンセグリティ

図-2 部材間の軸力密度比 (T群テンセグリティ)

3. 軸力線-トラスモデルの精度と収束性について

3.1 精度の検証 —T群テンセグリティ—

仮想剛性要素を用いた形態解析では、実験等によって解析の妥当性を検証することはできない。そこで、本研究で用いるテンセグリティ仮想剛性構造の合理性とこれによる解析の妥当性を検証するため、Force Density Methodによって計算された結果との比較によって精度の検証を行う。

図-1は、著者らの既往研究¹²⁾でも取り上げたT群テンセグリティの要素初期配置とコネクティビティ(a)および釣合形状(b)である。図-2は、頂部正三角形を構成する引張材の軸力密度(=軸力/要素長)を T_t 、頂部正三角形を繋ぐ稜線部の引張材の軸力密度を T_b 、6本の圧縮材の軸力密度を T_s とした時の軸力密度比を T_s/T_d と T_t/T_d の関係として表したものであり、Pandia Raj⁶⁾はこれをForce Density Methodのプリプロセスとして解析的に解いている。この図によれば、著者らの圧縮材に剛棒を用いた計算例¹²⁾、本研究におけるトラス要素を用いた場合、の何れもよく一致しており、両要素共にテンセグリティの形態解析に用いるモデルとしては十分妥当な精度で計算できるといえる。

3.2 収束性の検証 —5層テンセグリティタワー—

次に、圧縮材の要素モデル選定の収束性能への影響を調べるため、T群テンセグリティよりも要素数および節点数が多い5段タワーの自己釣合解を求める計算例により、最大不平衡力の収束状況を比較する。図-3(a)のように圧縮材(初期長さ1m)4本、引張材12本から成るコネクティ

図-3 5層自己釣合テンセグリティタワー

図-4 最大不平衡力の収束状況

ビティを設定し（1層単体を計算すれば4角形シンプレックス型となる），これを図-3(b)のように5層積み重ねた要素初期配置・コネクティビティから，全節点拘束なし，節点力ゼロの条件で形態解析を行うと，図-3(c)のような自己釣合解を得ることができる．なお，ここでは要素初期配置，図-3(b)における圧縮材の水平面に対する傾斜角は $\theta=10^\circ$ ，層間の距離は $d=0.3[\text{m}]$ としており，引張材には式(5)における $C=10$ の2次軸力線を用いている．（ただし，このように均整のとれた自己釣合解を得るためには，傾斜角や層間距離を試行錯誤的に設定して要素初期配置を定めなければならない．このことは次章以降の議論となる．）図-4は，このときの最大不平衡力の収束状況を①圧縮材にトラス要素（ $EA=2 \times 10^9[\text{N}]$ ）を用いた場合（並進方向）②圧縮材に剛棒¹²⁾を用いた場合（並進・回転方向）の二つの場合に関して比較したものである．これによれば，剛棒を用いた場合には着実ではあるものの非常に緩やかな収束過程となっているのに対して，トラス要素を用いた場合は非常に大きな不平衡力を持つ不平衡状態を経ながらも，収束直前には1回の反復で不平衡力が数桁小さくなるというNewtonRaphson法の2次収束性が確認でき，圧倒的に計算効率が高いことがわかる．よって，次章以降の例題では圧縮材にトラス要素を用いることを前提として議論を進める．

4. 重力下にあるテンセグリティタワーの形状決定

第1章でも述べたように，テンセグリティ仮想剛性構造は一組の初期条件（要素力式における各係数，コネクティビティ，荷重条件）に対して複数の釣合形状を持ち，しかもその数が2つ，3つではなく，特に節点数が多く自由度が大きいモデルには，無数と言ってもよいほど多くの釣合解が存在する．しかも，実構造の初期形状として採用できる有意な解は一つである場合がほとんどであり，この形状を得るためには要素初期配置を試行錯誤的に探るか，何らかの「解の追いこみ」をかける工夫をしなければならない．

本章では，前章の計算例と同じコネクティビティと同じ仮要素を用いた5層テンセグリティタワーモデルに対して，最下層の4つの節点に安定な拘束条件を与えて，全節点に $0.3[\text{N}]$ の鉛直下向荷重（自重に相当するものと考えている）が作用するという条件下で，全節点が拘束点より上方で5層タワーとして自立している解（スネルソンのタワー¹⁴⁾をモチーフとしている）を目的解と定めることにする．なお，ここでは圧縮材に $EA=2 \times 10^9[\text{N}]$ のトラス要素，引張材に式(5)における $C=10$ の2次軸力線を用いている．

そこでまず，要素初期配置が収束解の形状に及ぼす影響について調べるため，前章，図-3における要素初期配置を定める各パラメータを変化させ，網羅的に幾何学的非線形解析を行った．傾斜角 θ を 3° 刻みで 0° から 90° まで，層間距離 d を $0.3[\text{m}]$ 刻みで $0[\text{m}]$ から $9[\text{m}]$ までの $30 \times 30 = 900$ 通りの要素初期配置から一括荷重による計算を行ったところ，実に285通りの釣合解が得られた．図-5は，このときの解が持つ全ポテンシャルエネルギー Π

$$\Pi = U + P - V \quad (11)$$

U : トラス材のひずみエネルギー

P : 軸力線の要素ポテンシャル

V : 外力のポテンシャル損失

とその解の発現率（全試行に対するその解が得られる頻度）の関係を調べ，発現率が1%以上の解を抽出したものである．さらに，図-6は発現率2%以上の解の形状(側面図)であり，図中青のドットは鉛直方向拘束点，ピンクのドットは全方向拘束点，緑のドットはクラウン部の4つの節点群（うまく目的解が得られた時には最上層に位置するはずの節点）である．これによれば，一番発現率の高い解は比較的全ポテンシャルエネルギーの高いH（9.3%）の解であり，また，一番全ポテンシャルエネルギーが低い（全285解の中でも最小）Aの解（全節点が拘束点より下に垂れ下がった形状）の発現率は全体の3番目（4.0%）という結果となった．よって，必ずしもエネルギーの低い解が卓越して発現するとは限らず，エネルギーと発現率の間には明確な相関性を見出せない．むしろ，形状のプロポーション，対称性，連続性といったもののほうが発現率との相関性が高いようにも見える．一方，この計算例の目的解であるCの解（全ポテンシャルエネルギー $180.59[\text{J}]$ ）の発現率は高々4.4%であり，やはり，試行錯誤的に要素初期配置を変更しながらこれを求めるのは非常に効率が悪い．

図-5 釣合解の発現率と全ポテンシャルエネルギー

図-6 重力下にあるテンセグリティタワーの形状

そこで、この例題の場合における効率的な「解の追い込み」の手法を提示すれば、たとえば、

- ① 拘束点と上下対称の位置関係にあるクラウン部節点（図-6の各変形図では緑のドットで示している点）を制御点として、ここに圧縮材の初期長さ5本分に相当する上方5[m]程度の強制変位を与える。
- ② 制御点の反力の符号が反転するまで徐々に制御点変位を下にさげる。
- ③ 制御点の拘束を解除する。

という手順が考えられ、これにより、図-6のCと全く同一の解を比較的容易にかつ確実に得ることができる。

図-7 2層テンセグリティタワーの要素初期配置とコネクティビティ

5. テンセグリティタワーの釣合経路追跡

前章の計算例では制御点に増分変位を徐々に与えることによって、制御点反力がゼロとなるような自立解を探索した。この探索中の増分幅を十分に小さく設定すれば、解は飛び移りを起こすことなく連続的に形状が変化する。したがって、本研究で扱うトラス・軸力線モデルによるテンセグリティ仮想剛性構造は、実構造物系におけるエラスティカと同様の釣合経路を形成していると考えられる。このことを踏まえ、本章ではテンセグリティタワーの釣合経路を追跡し、前章の計算例と同様に全節点に一律な鉛直下向荷重が作用する場合と、制御点以外への節点荷重を排し、制御点における節点外力=0の解がすなわち純粋テンセグリティの自己釣合解となる場合の2つのケースについて比較・考察する。

前章の5層タワーより大幅に釣合解の数が少ないと考えられる2層のテンセグリティタワー（図-7に要素初期配置とコネクティビティ）を計算モデルとする。要素の各条件は前章までと同様に、圧縮材は $EA=2 \times 10^9$ [N] のトラス要素、引張材は式(5)における $C=10$ の2次軸力線としている。図-7における最下層の4点（青およびピンクのドット）を拘束点とし、最上層に設定された4つの制御点（緑のドット）の鉛直方向変位・荷重が常に等しくように変位・荷重制御を行うことにより、このタワーの軸対称経路を追跡する。制御法の切り替えについては、著者らの既往研究¹⁶⁾に倣って荷重変位曲線の傾きを逐次モニターしながら、傾きが大きい時には荷重制御、小さい時には変位制御に切り替える手法を採用する。なお、本計算例は制御点が等変位となることを前提とする軸対称モードの解のみを対象としており、分岐や横倒れに関する考察については次章の計算例に譲ることとする。

5.1 重力下における自立解を含む経路

全節点に 1[N] の一律な鉛直下向荷重（自重に相当する）が作用する条件のもと、前章の計算例と同様に傾斜角 θ を 3° 刻みで 0° から 90° まで、層間距離 d を 0.3 [m] 刻みで 0 [m] から 9 [m] までの $30 \times 30 = 900$ 通りの要素初期配置から網羅的に自立解探索を行った結果、20通りの自立解が得られ、そのうち軸対称のものは、図-8に示した14個であった。図中では全ポテンシャルエネルギーが低い解から順にA~Nの記号を付しており、各々左が側面図、右が平面図である。

図-8 2層テンセグリティタワーの釣合形状
拘束点：青. ピンクのドット
制御点：緑のドット

図-9 解Iを含む釣合経路と経路上の自立解の形

図-10 解Lを含む釣合経路と経路上の自立解の形状

図-8の解について前章と同様に発現率を調べてみると、均整のとれた形で全節点が拘束点の上方に配置された解 I の発現率が 50.6%と飛びぬけて高い。比較的自由度の小さいこのモデルで優勢的にこの解が現れるということは、横倒れ分岐などの水平方向の不安定性を取り除けば、層間の要素の引張力で重力を支えるこの形状の安定性が高いということを示唆している。しかしながら、この解は他の解に比べて相対的に全ポテンシャルエネルギーが低いわけではなく、ここでも発現率とエネルギーの間の相関性は見出せなかった。

次にこれらの解の中から経路の起点を選定し、釣合経路を描くことによって、各解の間の関連性を見出し考察する。
＜解Iを起点とする経路＞

最も発現率の高い解 I（全ポテンシャルエネルギー $II=73.67$ [J]）を起点として、荷重制御により正負の双方向に経路追跡を起動したところ、図-9のような釣合経路を得た。図中、縦軸は制御点のみに作用する鉛直方向節点力 W [N]（全節点に作用する 1N の自重とは別に作用している）、横軸は制御点の高さ h [m]（拘束点から制御点への鉛直方向距離、下向き正）である。この経路上には、I の他 J, B, E, A の合計 5 つの $W=0$ [N] となる自立解が存在しており、経路上で繋がりを持つこれらの解は比較的发現率が高いグループであると言える。

＜解Lを起点とする経路＞

解Iの次に発現率の高い解 L（発現率 17.3%、全ポテンシャルエネルギー $II=79.76$ [J]）を起点として経路追跡を行ったところ、図-10 のような 8 の字型に閉じた循環経路となり、この経路上に 4 つの自立解が存在している。

図-11 解 C を含む釣合経路と経路上の自立解の形状

図-12 解 M を含む釣合経路と経路上の自立解の形状

図-13 解 F を含む釣合経路と経路上の自立解の形状

図-14 重力下における2層テンセグリティタワーの釣合経路

図-15 2層純粋テンセグリティタワーの自己釣合解を含む経路

<解 C, 解 M を起点とする経路>

解 C を起点として経路追跡を行ったところ、図-11 のような循環経路となった。また、解 M を起点としたときも図-12 のように同様の循環経路となった。自立解の形状を観察すると、解 C と解 M、および解 D と解 N は互いに上下対称に近い形となっている。

<解 F を起点とする経路>

解 F を起点として経路追跡を行ったところ、図-13 のような釣合経路が得られ、網羅的自立解探索では現れなかった解 F' と解 F'' が経路上の自立解として得られた。

図-14 に得られた経路を全て重ね描きしたものを示す。(曲線の色は図-9～13 の曲線色に対応する) トータル5 つの互いに独立な経路が見つかり、それぞれの経路には $W=0[N]$ となる自立解が複数含まれていて、経路ごとに解を分類することができる。これについては、変位モードの対称性に関する数学的分類との整合性に関する検証がなされるべきである。

5.2 純粋テンセグリティの自己釣合解を含む経路

5.1 の計算例と全く同じ要素初期配置、コネクティビティおよび要素条件より、制御点以外には一切節点力を载荷せず、5.1 と同様の手順で計算した。この条件で $W=0[N]$ となる解は純粋テンセグリティの自己釣合解となる。この場合は900通りの網羅的自立解探索を行っても6通りの解しか現れず、これらの解を起点に得られた釣合経路も図-15 に示す2本のみであった。ここには荷重、変位ともに0となる解が二つ存在し、共に全節点が拘束点を含む平面内にある「平面解」であるが、面内形状はそれぞれ異なる。図中、原点左下の平面図は赤い経路上の解、原点右上の平面図は青い経路上の解の形状を示している。もちろん、無重力の条件であるので、釣合経路は完全に原点を中心とした対称形をしており、図-14 の重力下における釣合経路に比べると、明らかに極値(屈服点)の数も少なく単純な挙動を示していることがわかる。重力の関与が釣合経路を複雑にしているというこの数値実験結果も、テンセグリティの地球上での適用実績が乏しいという事実に通じていることを伺わせる。

図 - 16 1点制御系2層テンセグリタワの要素初期配置とコネクティビティ

図 - 17 主経路の荷重変位曲線と自己釣合解の形状, および分岐点の位置

6. テンセグリティ仮想剛性構造の分岐経路追跡

図-16 のように, タワーの各層を形成する4つの節点全てに軸力線を介して繋がる節点を追加し, その最上層にある節点を制御点とする1点制御モデルにより分岐経路追跡を行い, 横倒れによる非対称モードを含む多様な釣合解の性状を調べる. 要素の各条件は前章までと同様に, 圧縮材は $EA=2 \times 10^9$ [N] のトラス要素, 引張材は式(5)における $C=10$ の2次軸力線としており, 図-16における最下層の圧縮材に繋がる4点を拘束点としている. また, 制御点以外の節点には節点力が作用しない無重力の条件としているので, 制御点の外力がゼロになる解がすなわち純粋テンセグリティの自己釣合解となる.

まず, 図-16の要素初期配置において $d=0$ [m], $\theta=0^\circ$ として得られる平面解 (原点) から荷重 (+) 方向に出発して得られる経路を主経路とする. 主経路追跡の際には接線剛性マトリックスの負の固有値数の変化を逐次モニターし, これによって分岐点を特定する. 分岐経路への切り替えについては, これまでにも大規模問題への適用や多重分岐への対応を目的とした手法がいくつか提案されている^{17), 18)}. しかし, ここでは, 切り替えの効率化を目的としているわけではないので, 基本経路上の分岐点ごく近傍の解に対して, ゼロ固有値 (実際には最も絶対値が小さい固有値) に対応する固有ベクトルの実数倍を変位ベクトルとして全節点に付与し, 同時に制御点に微小な変位増分あるいは荷重増分を与えるという, 最もオーソドックスな手法を用いることにする.

図 - 17 に主経路の荷重変位曲線と自己釣合解の形状 (図中, 左は側面図, 右は平面図) を示す. もちろん, このテンセグリティ仮想剛性構造の変位系は拘束点を含む平面を中心とする対称性を持つので, 原点から荷重 (-) 方向に出発すればシンメトリックな経路が得られる. これを重ね描きして主経路全体を表すと, 図 - 18 のようになる.

図 - 18 主経路の荷重変位曲線 (全体)

また, 図 - 17 の荷重変位曲線上には分岐点 (接線剛性マトリックスの負の固有値数が変化する点のうち極値を除いたもの) が6か所存在する. (図中に①～⑥の番号でマークしている.) いずれの点も接線剛性マトリックスの負の固有値数が一度に2つずつ変化する2重分岐点であるが, 数値計算によって分岐点を特定する場合には, 2つ分岐点は経路上で完全には一致しない. 本解析の場合でも, 増分を非常に細かくとって解析したときには, 非常に近接した2つの単純分岐点に分裂していることが観察できる. よって, 以下, 各2重分岐点を原点に近い方から①-a, ①-b, また, これらとシンメトリックな位置にある分岐点を①'-a, ①'-bのように表記する.

図-19～図-29 に分岐経路の荷重変位曲線とその経路上に存在する自己釣合解の形状を示す. (負の固有指数による線色の凡例は図-18に倣う) このうち, ①-a から①'-a を結ぶバイパス経路 (図-19), ①-b から①'-b を結ぶ経路 (図-20), ⑤-a から⑤'-a を結ぶ経路 (図-27), ⑤-b

図 - 19 ①-a と①'-a を結ぶバイパス

図 - 20 ①-b と①'-b を結ぶバイパス

図 - 21 ②-a と②'-a を結ぶバイパス

図 - 22 ②-b と②'-b を結ぶバイパス

図 - 23 ③-a と③'-a を結ぶバイパス

図 - 24 ③-b, ③'-b から分岐し直線モードに入る経路

図 - 25 ④-a と④'-a を結ぶバイパス

図 - 26 ④-b と⑥'-a, ④'-b と⑥-a, を結ぶバイパス

図 - 28 ⑤-b と⑤'-b を結ぶバイパス

図 - 27 ⑤-a と⑤'-a を結ぶバイパス

図 - 29 ⑥-b, ⑥'-b から分岐し直線モードに入る経路

図 - 30 主経路と分岐経路

から⑤'-b を結ぶ経路 (図-28) の計 4 つのバイパス経路は、何れも、経路上の自己釣合解はただ 1 つ (荷重変位曲線では原点上にプロットされる) であり、対称性の低い平面解となっている。また、③-a から③'-a を結ぶ経路 (図-23) および④-a から④'-a を結ぶ経路 (図-25) は経路の上下の往来が複雑で平面解以外に立体的広がりを持つ自己釣合解を経路上に含んでいる。②-a から②'-a を結ぶ経路 (図-21) は原点上に自己釣合解があるが平面解ではなく立体的な広がりを持つ解である。④-b から分岐する経路は唯一、経路上の対称位置④'-b ではなく⑥'-a に繋がっており、経路対称位置である④'-b と⑥'-a の間にもバイパスがある (図-26)。③-b、③'-b から分岐する経路 (図-24) および ⑥-b、⑥'-b から分岐する経路 (図-29) は共に分岐後はトラス材が一直線状となり単調に伸びていくモードに入る。

図-30 は主経路と分岐経路を重ね描きしたもので、計 26 個の自己釣合解を確認した。この主経路から分岐する経路は自経路内のバイパス経路か形状が単調に伸びていく経路であり、かつ、これらの経路内には 2 次分岐点が存在しないので、他の経路との繋がりはなく、独立した釣合系を形成していると言える。本研究における数値実験からだけでは、全てのテンセグリティ仮想剛性構造がこのような独立系を形成していると結論付けることはできないが、これについても群論による分類などとの整合性に関して検討するとともに、さらに数値実験を進めて検証を行わなければならない。

7. まとめ

テンセグリティは、Maxwell の公式の条件より少ない部材数で自立する場合があり²⁾、すなわち究極的な軽量構造の形態の一つであると考えることができる。よって、たとえば宇宙における展開構造としての実用化などが期待されているが、その工学的性質については未だ解明されていない部分が多い。本研究では、この中でもテンセグリティ仮想剛性構造の釣合解の多様性に着目し、数値実験的なアプローチによりその特性を調べた。実施した数値実験の結果と、得られた知見を以下にまとめる。

- 線長関数軸力線要素を用いたテンセグリティ仮想剛性構造に対して幾何学的非線形解析を行うことにより合理的な形状決定が可能となる。このとき、ストラット (圧縮材) には、剛棒要素を用いるよりも、節点自由度が多少大きくなることを勘案してもトラス要素を用いるほうが高い収束性が得られる。
- スネルソンのタワーをモチーフとして、重力場における 5 層テンセグリティタワーモデルを設定し、これに対して要素初期配置の違いによる 900 通りの一括載荷解析を行ったところ、実に 285 通りの解が現れ、必ずしも全ポテンシャルエネルギーが低い解が優勢的に現れるとは限らなかった。
- 目的解の概形がある程度イメージ出来ている場合には、変位制御増分解析により効率的に解を追い込む

ことが可能である。

- 2 層テンセグリティタワーの軸対称変形モードの釣合経路を追跡した。重力場においては互いに独立な 5 つの経路が確認され、自立解を経路ごとに分類することができる。これに対して、無重力の条件で同じ仮想剛性構造の釣合経路追跡を行ったところ非常に単純な形の二つの荷重変位曲線が得られる結果となり、重力の関与が釣合経路を複雑にしている態様が明らかになった。
- 1 点制御系の 2 層テンセグリティタワーモデルの分岐経路追跡を行った。この計算例で採用した主経路には 12 個の 2 重分岐点が存在し、計 11 通りの分岐経路が見つかった。しかし、他の経路に繋がる分岐は無く、この主経路から分岐する経路は自経路内のバイパス経路か形態が単調に伸びていく経路である。また、これらの経路内には 2 次分岐点が存在しないため、独立した釣合系を形成していると言える。

本稿はテンセグリティ構造の釣合解の発現性、釣合経路上の解の性質という側面に着目した数値実験結果に関する速報的な内容であるため、今後検討すべき課題について以下のように整理し、結びとする。

- テンセグリティタワーの全ポテンシャルエネルギーの高低と解の発現特性の関係を調べたが、重力場における実現可能性を論じるためにはエネルギーの停留状態を調べることによって安定性の議論を行う必要がある。
- この研究では、テンセグリティを仮想剛性構造としてとらえることにより、釣合経路によって解を分類できることが示唆されたが、今後はさらなる数値実験によって多くのデータ収集を行うとともに、群論などによる解の分類³⁾あるいは分岐座屈理論における変位モードの分類^{17),18)}などとの整合性について検証し議論を深めなければならない。

参考文献

- 1) 斎藤公男：空間構造物語，彰国社，pp.184-263,2003.
- 2) Calladine, C.R.: Backminster Fuller's "Tensegrity" Structures and Clark Maxwell's Rules for the Construction of Stiff Frames, *International Journal of Solid Structures*, Vol.14, pp.161-172, 1978.
- 3) 川口健一，鈴木悠介：群論に基づくテンセグリティ構造の自己釣合い軸力と伸びなし変位の抽出，日本建築学会構造系論文集，第 597 号，pp.77-84，2005.
- 4) Schek, H.J.: The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3, pp.115-134, 1974.
- 5) Vassart N., Motro R.: Multiparametered Formfinding method Application to Tensegrity Systems, *International Journal of Space Structures*, 14(2), pp.147-154, 1999.
- 6) Pandia Raj R., Guest S. D.: Using Symmetry for Tensegrity Form-Finding, *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol.47, No.3, 2006.

- 7) Zhang J.Y., Ohsaki M.: Adaptive force density method for form-finding method of tensegrity structures, *International Journal of Solid Structures*, 43, pp.5658-5673, 2006.
- 8) Zhang L., Maurin B., Motro R.: Form-Finding of Nonregular Tensegrity Systems, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 132(9), pp.1435-1440,2006.
- 9) 後藤茂男, 井嶋克志, 古賀勝喜, 帶屋洋之: 接線剛性法における要素力式の設定と収束解の精度, 構造工学における数値解析シンポジウム論文集第 18 巻, pp.133-138, 1994.
- 10) Iijima K., Obiwa H.: Formfinding of single layer structure by measure potential function of element, *Proceedings of Structural morphology*, pp.249-256, 1997.
- 11) 帶屋洋之, 井嶋克志, 村上卓志, 川崎徳明, 西村裕次: 面内方向軸力線要素を用いた滑らかな石鹸膜形状の決定手法について, 応用力学論文集, Vol.10, pp.27-36, 2007.
- 12) 帶屋洋之, 井嶋克志, 川崎徳明, 松永知子, 松尾郁: 剛体一軸力線要素モデルによるテンセグリティ構造の形態解析, 応用力学論文集, Vol.13, pp.47-56, 2010.
- 13) Miki M, Kawaguchi K.: Extended Force Density Method for Form-Finding of Tension Structures, *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol.51, No.4, pp. 291-303, 2010.
- 14) Snelson K.: Force Made Visible, Hard Press Editions, 2009.
- 15) 坂井孝成, 帶屋洋之, 井嶋克志, 石橋靖亨, 川崎徳明: トラス軸力線構造系によるテンセグリティ構造の形態解析, 平成 19 年度土木学会全国大会第 62 回年次講演会講演概要集, pp.1177-1178, 2007.
- 16) 門田和之, 帶屋洋之, 井嶋克志, 井口真一, 波照間弘之: 接線剛性法の求解特性を用いた多分岐釣合系の追跡, 土木構造・材料論文集, 第 21 号, pp.57-64, 2005.
- 17) 池田清宏, 柳本彰仁, 野口裕久: 対象構造系における Scaled corrector 法の高精度化と分岐解析法の提案, 土木学会論文集 A, Vol.62, No.2, pp.362-370, 2006.
- 18) 齊木功, 須藤健太郎, 池田清宏, 岩熊哲夫: 多重分岐点における分岐経路探索のための修正剛性法の改良, 土木学会論文集 A, Vol.62, No.4, pp.782-793, 2006.

(2012 年 3 月 8 日 受付)