Raviart-Thomas混合補間を用いた有限要素の 三次元浸透流問題における基本性能

櫻井 英行¹・郷家 光男²・白石 知成³・
菱谷 智幸⁴・山浦 昌之⁵・鹿島 浩之⁶

¹正会員 清水建設株式会社 技術研究所 (〒135-8530 東京都江東区越中島3-4-17)
E-mail: hideyuki.sakurai@shimz.co.jp

²正会員 清水建設株式会社 土木技術本部 (〒104-8370 東京都中央区京橋2-16-1)
E-mail: m-gohke@shimz.co.jp

³正会員 清水建設株式会社 技術研究所 (〒135-8530 東京都江東区越中島3-4-17)
E-mail: tomonari.shiraishi@shimz.co.jp

⁴正会員 株式会社ダイヤコンサルタント ジオエンジニアリング事業本部
(〒331-8638 埼玉県さいたま市北区吉野町2-272-3)
E-mail: t.hishiya@diaconsult.co.jp

⁵正会員 株式会社ダイヤコンサルタント ジオエンジニアリング事業本部 (同上)
E-mail: M.Yamaura@diaconsult.co.jp

⁶非会員 無所属

全水頭と流速を独立に補間するRaviart-Thomas混合補間法(RT)を用いた有限要素の三次元浸透流問題における基本性能に関する数値実験の結果を報告する。全水頭のみを未知数とする一般的な有限要素法では、流速を要素ごと独立に計算するため、精度良く連続な流速場が得られない場合がある。一方、RTでは、要素の面に定義したフラックスを自由度として流速の形状関数を構築するため、隣接要素間の共有境界でフラックスを連続にできる。また、ハイブリッド型変分原理で定式化することにより、最終変数をラグランジュ乗数のみに削減することが可能になる。既往の研究は、二次元問題での有用性を示すものがほとんどであるが、本論文では、欠点も含め、浸透流問題におけるRTの三次元要素の基本性能を明示する。

Key Words : Raviart-Thomas, finite element method, mixed model, hybrid model, seepage problem, three-dimensional element, inter-element continuity

1. はじめに

差分法、有限体積法、有限要素法(FEM)などによる地下水浸透流の解析は、離散化解析手法の発展においても早くから実用化されており、商用ソフトも多い。今後、岩盤貯蔵施設や放射性廃棄物処分施設などの地下水流動場の把握が重要となる事業では、初期の計画段階から最終段階まで無くてはならない技術である。中でもFEMは、解析領域の幾何形状を精度良くモデル化できるため、我が国の地質構造のように多くの地層や地下構造物から構成される複雑形状の三次元複合領域に対して大変強力な解析手法である。FEMは、世界的にも実績は多く、実用的で信頼性の高い方法と言える。

ところが、1990年代初頭からFEM浸透流解析の問題点

の指摘とそれを改善するための研究が欧州を中心に盛んになった。全水頭(速度ポテンシャルに対応)のみを未知数とする一般的なFEMでは、流速を要素ごと独立に計算するため、連続な流速場が精度良く得られないという指摘¹⁾である。並行して進められてきた改善のための研究開発は、次の二つに分類できる。

- (a) FEMの結果から精度の良い流速場を求める工夫
- (b) 混合補間法を用いる方法

方法(a)には、要素を再分割した小領域の水収支が釣り合うように要素の動水勾配から連続な流速ベクトルを求め、流速場の精度向上に成功した報告がある¹⁾。

方法(b)は、全水頭と流速を同時に(独立に)近似する方法である。要素境界面でのフラックスを連続できる補間法^{2,3)}を用い、連続性を満足するように解くことによ

り、流速場の精度向上に成功している。

方法(b)には、二つの定式化がある。一つは混合モデル、もう一つは、ハイブリッド・モデルである。これらの用語は、有限要素法の理論の分野においても厳密に定義されていないのが実状であろう。上述の引用文献では、混合有限要素 (Mixed finite element)、混合ハイブリッド有限要素 (Mixed hybrid finite element) としているものが多いが、本論文では、ハイブリッド法の開拓者である故 Pian 教授にならって、混合モデルとハイブリッド・モデルという用語を用いる。Pian と親交が厚かった故 鷲津 教授は、著書⁹⁾の中で、ハイブリッド・モデルと混合モデルの Pian による定義を次のように記載している。「“ハイブリッド・モデルとは、変分原理の中に各要素内で独立な field 変数と要素境界上での未知関数を含むもの”であり、これに対し、“混合モデルとは、変分原理の中に、各要素内で一つ以上の独立な field 変数を含むもの”である。すなわち、要素境界上で定義された未知関数を含むか否かが最大の相違点である。」また、種々のハイブリッド法を整理した著書⁵⁾では、Pian の綴った“ハイブリッド法発見物語”も紹介されている。

さて、上述の二つの方法(a)(b)には、それぞれ一長一短があり、どちらの方法が優れているとは一概には言い難い。これまでの研究報告から、研究者間での激しい論争があったことも窺える。二つの方法に関するこれまでの経緯や動向については、文献6), 7)に詳しい。また、その他の多くの文献にも同様の記載があり、書き尽くされているので、本論文での再録は避け、主要な文献のみを引用する。方法(a)のFEMの結果の後処理については文献1)に、方法(b)の混合補間を用いる二つのモデルの数理は、文献8)に詳しい。計算例を含めた方法(b)の有用性については、混合モデルが文献6)に、ハイブリッド・モデルが文献9)に論じられている。極近年になって、放射性廃棄物処分施設検討における有用性を示すための数値実験の報告¹⁰⁾もある。ただし、既往の報告のほとんどは、二次元問題を対象にしており、三次元問題の研究報告は希有である。我が国のような複雑な地形・地質を対象とする場合には三次元解析は不可欠であり、実用化にあたって、既往の研究結果だけから、有用性を論じることは適切ではない。方法(b)については任意形状の六面体では、適切な解が得られないという指摘¹¹⁾もある。

著者らは、上述の二つの方法(a)(b)の三次元問題における有用性を確認するため、プログラム開発を行い、基本性能の検討を実施してきた。方法(a)についても、一定の知見を得ている¹²⁾が、本論文では方法(b)のうち、ハイブリッド・モデルにおける三次元要素の基本性能を確認した結果を報告する。2章～4章において、まず、エネルギー原理に基づく定式化により、数理の特徴を詳述する。5章では、複雑形状への適用を想定し、任意形状の四面

体、五面体、六面体を対象とした数値実験結果から、これまでの二次元の検討では明らかにされていない欠点を含めた特性を示し、実用化に資する基本性能を論ずる。

2. 基礎方程式と変分原理

定式化については、いくつかの文献^{6), 7), 8)}に記載があるが、ここでは、それらでは詳述されていない各モデルにおいて近似関数に要求される拘束条件や連続性等を比較、確認しながら、エネルギー原理に対応する定式化を示す。

(1) 基礎方程式

本論文では、後述する各種の要素性能の確認を容易にするため、単純な均質媒体内の定常浸透流問題を扱う。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = k \nabla \phi(\mathbf{x}) \quad \text{in } V \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } V \quad (2)$$

式(1)はダルシーの法則、式(2)は非圧縮性流体の連続式であり、 $\mathbf{u}$ はダルシー流速、 k は透水係数、 ∇ は一階のベクトル微分演算子、 ϕ は全水頭 (速度ポテンシャルに対応)、 V は解析領域である。式(1)を式(2)に代入すると次の楕円型微分方程式を得る。

$$k \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } V \quad (3)$$

境界条件は、

$$\phi(\mathbf{x}) = \hat{\phi} \quad \text{on } \partial V_{\phi} \quad (4)$$

$$k \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial n} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \hat{q} \quad \text{on } \partial V_n \quad (5)$$

ここに、添え字 $\wedge$ は既知量を表し、 $\mathbf{n}$ は領域境界における外向き単位法線ベクトルである。 ∂V_{ϕ} と ∂V_n は、各境界条件が与えられる領域 V の境界 ∂V の部分であり、

$$\partial V = \partial V_{\phi} \cup \partial V_n \quad (6)$$

(2) 適合モデル (変位モデル)

この問題に対する一般的な FEM では、式(3)を対象として、 ϕ のみを未知変数とする。構造解析における変位のみを未知数とする方法に対応し、次節の混合モデルと対比して、変位モデルとも呼ばれる。エネルギー原理に基づく定式化においては、次の汎関数を用いる。

$$\Pi(\phi) = \int_V \frac{1}{2} k (\nabla \phi)^2 dV - \int_{\partial V_n} \hat{q} \phi dS \quad (7)$$

汎関数(7)の第一変分をとると、停留条件から式(3)と式(5)が得られ、式(4)は ϕ の許容関数に対する拘束条件となることがわかる。

FEMでは、解析領域を有限個の要素で分割するため、式(7)は次のよう書き換えられる。

$$\Pi(\phi^h) = \sum_E \left[\int_{V_E} \frac{1}{2} k (\nabla \phi^h)^2 dV - \int_{(\partial V_E)_n} \phi^h \hat{q} dS \right] \quad (8)$$

ここに、 ϕ^h は ϕ の近似関数であり、添え字 E は要素のインデックスである。式(8)に含まれる ϕ^h の最高階微分は一階なので、式(8)が成立するためには、 ϕ^h が要素内で連続であることに加え、図-1に示すような隣接要素共有境界 ∂V_{ab} に沿って次式が成立しなければならない。

$$\phi_a^h = \phi_b^h \quad \text{on } \partial V_{ab} \quad (9)$$

適合モデルでは、流速は、求解された ϕ^h の節点値と形状関数を用いて式(1)から要素ごとに算出されるため、図-1の隣接要素境界においてフラックスの連続性が満足されない。特に、隣接要素の透水係数の異なる境界において顕著になる。また、流跡線（仮想粒子を流速ベクトルに乗せて移動させた軌跡）を求める際にも適切な流速場が得られないという指摘もあるが、前述のとおり、文献1)では、適合モデルから計算された全水頭場を用いて、要素を再分割した領域の水収支を考慮することにより、連続な流速場を得る方法が示されている。

(3) 混合モデル

流跡線を精度良く描くための連続な流速場を得る方法として、全水頭 ϕ とダルシー流速 $\mathbf{u}$ を独立に近似する混合モデルによるFEMが提案されている⁹⁾。それは、次の汎関数による定式化に対応する。

$$\Pi_M(\phi^h, \mathbf{u}^h) = \sum_E \left[\int_{V_E} \left(-\phi^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h + \frac{1}{2k} \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{u}^h \right) dV + \int_{(\partial V_E)_\phi} (\mathbf{u}^h \cdot \mathbf{n} \hat{\phi}) dS \right] \quad (10)$$

この汎関数の停留条件からは、式(1)、式(2)、式(4)が得られ、式(5)が $\mathbf{u}^h$ に対する拘束条件となる。上述の適合モデルによるFEMとは反対に式(5)が基本境界条件、式(4)は自然境界条件となる。また、式(10)には $\mathbf{u}^h$ の一階微分が含まれるので、 $\mathbf{u}^h$ は要素内で連続、かつ、図-1の隣接要素の共有境界 ∂V_{ab} において、次式を満足する必要がある。

$$\mathbf{u}_a^h \cdot \mathbf{n}_{ab} + \mathbf{u}_b^h \cdot \mathbf{n}_{ba} = 0 \quad \text{on } \partial V_{ab} \quad (11)$$

一方、 ϕ^h に対しては、汎関数(10)には微分は含まれないので、式(9)を満足する必要なく、境界条件式(4)も汎関数(10)に含まれるので、拘束条件はない。次章で示すが、これら $\mathbf{u}^h$ と ϕ^h に対する条件に基づく関数²³⁾を用いることがこのモデルの特徴であり、解析領域全体にわたって連続な流速場が全水頭分布と同時に得られることになる。ただし、未知変数が増加するため、適合モデルに比べて、解くべき連立方程式の規模が大きくなる。また、係数行列は正定値ではないので、大規模問題において共役勾配法などの反復法による求解が数値的に困難になる。

なお、混合モデルには別のタイプもあり、その場合は

図-1 隣接要素

反対に、式(4)が基本境界条件となり、式(5)は自然境界条件となる。ラプラス方程式への適用例がある¹³⁾。

(4) ハイブリッド・モデル

前節の混合モデルにおける係数行列の問題を解決するため、ハイブリッド法が用いられた^{7,8,9,10)}。ハイブリッド法は、連続条件緩和型変分原理を用い、許容関数に対する拘束を取り払うことにより、要素ごとに異なる関数を用いるといった柔軟な近似を可能にする方法である。

まず、全要素間境界に沿うラグランジュ未定乗数 $\lambda(\mathbf{x})$ を用いて、式(11)の連続条件を緩和し、式(10)に示した汎関数を修正することを考える。式(5)の境界条件式も加えて、修正項 Π' を次のように定義する。

$$\Pi'(\mathbf{u}^h, \lambda) = \sum_{\substack{\text{All} \\ \text{interelement} \\ \text{boundary}}} \int_{\partial V_{ab}} \lambda (\mathbf{u}_a^h \cdot \mathbf{n}_{ab} + \mathbf{u}_b^h \cdot \mathbf{n}_{ba}) dS + \sum_E \int_{(\partial V_E)_n} \lambda (\mathbf{u}^h \cdot \mathbf{n} - \hat{q}) dS \quad (12)$$

ここで、図-1の隣接要素 a, b の共有境界 ∂V_{ab} に換えて、任意の要素間共有境界を $(\partial V_E)_I$ と表せば、

$$\Pi'(\mathbf{u}^h, \lambda) = \sum_E \left[\int_{(\partial V_E)_I} \lambda (\mathbf{u}^h \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{(\partial V_E)_n} \lambda (\mathbf{u}^h \cdot \mathbf{n} - \hat{q}) dS \right] \quad (13)$$

式(13)を式(10)に加えると、次のように書ける。

$$\Pi'_M(\phi^h, \mathbf{u}^h, \lambda) = \Pi_M(\phi^h, \mathbf{u}^h) + \Pi'(\mathbf{u}^h, \lambda) \quad (14)$$

式(14)の汎関数には拘束条件は何もないことになる。

ここで、ラグランジュ乗数に次の拘束条件を課す。

$$\lambda(\mathbf{x}) = \hat{\phi} \quad \text{on } \partial V_\phi \quad (15)$$

そして、任意の要素境界 ∂V_E は、隣接要素間共有境界 $(\partial V_E)_I$ か二種の解析領域境界 $(\partial V_E)_\phi$ 、 $(\partial V_E)_n$ のいずれかに属することに注意すれば、汎関数(14)は次のように書き換えることができる。

$$\Pi_H(\phi^h, \mathbf{u}^h, \lambda) = \sum_E \left[\int_{V_E} \left(-\phi^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h + \frac{1}{2k} \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{u}^h \right) dV \right. \\ \left. + \int_{\partial V_E} \lambda (\mathbf{u}^h \cdot \mathbf{n}) dS - \int_{(\partial V_E)_n} \lambda \hat{q} dS \right] \quad (16)$$

この汎関数の停留条件からは、式(1), (2), (5), (11)に加えて、式(17)が得られ、ラグランジュ乗数 λ の停留解における物理的意味が全水頭 ϕ に対応することが分かる。

$$\lambda(\mathbf{x}) = \phi^h(\mathbf{x}) \quad \text{on } (\partial V_E)_i \text{ and } \partial V_n \quad (17)$$

拘束条件は、式(15)の境界条件のみとなり、 ϕ^h と $\mathbf{u}^h$ には拘束条件は存在しない。したがって、微分方程式(1), (2)を境界条件式(4), (5)のもとに解くことは、関数 ϕ^h と $\mathbf{u}^h$ の集合、および、式(15)を満足する関数 λ の集合の中から汎関数(16)を停留にするような関数群を見出すことと等価となる。

ハイブリッド・モデルでは混合モデルとは異なり、連続条件式(11)を満足しない流速近似も許容されるため、文献7)等の既往の研究で、式(11)を満足する補間関数を用いるのは、ハイブリッド法を適用する本来のアプローチとは異なるように思えるが、彼らの目的は別にある。それは、次章で詳述するが、要素行列を作りこむ過程で ϕ^h と $\mathbf{u}^h$ を消去できラグランジュ乗数のみを未知数とする全体行列を組み上げることが可能になる点である。全体行列は正定値であり、大規模問題への順応性も高い。前述の混合モデルの欠点が解消されることになる。ただし、混合モデルでは式(11)を満足する近似関数を用いれば、式(11)は厳密に満足されるが、ハイブリッド法の場合、数学的には式(11)は、汎関数の停留解において近似的に満足されるに過ぎないことに注意する必要がある。

3. 形状関数

(1) 適合モデル

適合モデルでは、一般にアイソパラメトリック要素が

図-2 六面体要素の局所座標系

図-3 五面体要素の局所座標系

図-4 四面体要素の局所座標系

用いられ、全水頭の近似関数 ϕ^h は、次式で表される。

$$\phi^h(\mathbf{x}) = \{L(\mathbf{x}(\xi))\}^T \{\phi\} \equiv \sum_i^{N_N} L_i(\mathbf{x}(\xi)) \phi_i \quad (18)$$

L_i は図-2~4の局所座標系 ξ で表された形状関数で、 ϕ_i は ϕ^h の節点値、 N_N は要素構成節点数である。式(19), 式(20), 式(21)はそれぞれ六面体, 五面体, 四面体要素の線形形状関数であり。

$$L_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} L_i &= (1 - \xi - \eta)(1 - \zeta \zeta_i) & \text{for } i = 1, 4 \\ L_i &= \xi(1 - \zeta \zeta_i) & \text{for } i = 2, 5 \\ L_i &= \eta(1 - \zeta \zeta_i) & \text{for } i = 3, 6 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$L_1 = \xi, \quad L_2 = \eta, \quad L_3 = \zeta, \quad L_4 = 1 - \xi - \eta - \zeta \quad (21)$$

ここに、 ξ_i は節点の局所座標値を表す。

局所座標系から物理座標系の写像は、要素の節点座標値 $\mathbf{x}_i$ を用いて、式(19)~式(21)により行われる。

$$\mathbf{x}(\xi) = \{L(\xi)\}^T \{\mathbf{x}\} \equiv \sum_i^{N_N} L_i(\xi) \mathbf{x}_i \quad (22)$$

(2) 混合モデルとハイブリッド・モデル

本論文では、最低次のRaviart-Thomasによる混合補間²⁾(以降、RT0)の三次元要素を検討対象とするが、文献6)には、二次元の三角形、四角形要素について、高次の補間法³⁾を含めた明解な記載がある。

RT0では、 ϕ^h は要素内で一定値とする。すなわち、

$$\phi^h(\mathbf{x}) = \phi_E \quad (23)$$

式(10), 式(16)では、可積分性において、 ϕ^h の要素間境界での連続性は求められないので、適合モデルとは異なり、 ϕ^h を要素内一定とする近似は許容される。

流速に対しては、局所座標系において近似関数を構築し、それを物理座標系に写像する方法をとる。自由度は、

要素の面におけるフラックスまたは流量であり、次のように求めることができる。

まず、局所座標系 ξ における流速の近似関数 $\bar{\mathbf{u}}^h$ を多項式で表す。

$$\bar{\mathbf{u}}^h(\xi) = [\bar{\mathbf{P}}(\xi)]^T \{\alpha\} = \sum_j^{N_F} \bar{\mathbf{P}}_j(\xi) \alpha_j \quad (24)$$

ここに、 α_j の未定係数であり、 N_F は要素構成面の数である。多項式 $\bar{\mathbf{P}}_j$ は、六面体、五面体、四面体のそれぞれに対して、式(25)、式(26)、式(27)を用いた。

$$[\bar{\mathbf{P}}(\xi)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$[\bar{\mathbf{P}}(\xi)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$[\bar{\mathbf{P}}(\xi)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & 0 & \psi \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \end{bmatrix} \quad (27)$$

ここで、要素の各面を添え字 j で表すと、各面の流量 q_j は、次式により求められる。

$$q_j = \int_{\partial V_{E(j)}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_j dS = \int_{\partial V_{E(j)}} \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_j dS \quad (28)$$

式(24)を式(28)に代入し、 $\{\alpha\}$ について解いて、再び式(24)に代入すると、式(24)は次の形に書き換えられる。

$$\bar{\mathbf{u}}^h(\xi) = [\bar{\mathbf{N}}(\xi)]^T \{q\} = \sum_j^{N_F} \bar{\mathbf{N}}_j(\xi) q_j \quad (29)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{N}}_j$ は局所座標系における流速近似の形状関数である。形状関数は陽な形で求めることができ、要素の面番号を図2~4の青数字のように定めると六面体、五面体、四面体の形状関数はそれぞれ次のようになる。

$$[\bar{\mathbf{N}}(\xi)]^T = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1+\xi & 0 & -1+\xi \\ 0 & 0 & -1+\psi & 0 & 1+\psi & 0 \\ -1+\zeta & 1+\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$[\bar{\mathbf{N}}(\xi)]^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi & \xi & -1+\xi \\ 0 & 0 & -1+\psi & \psi & \psi \\ -2+2\zeta & 2+2\zeta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$[\bar{\mathbf{N}}(\xi)]^T = 2 \begin{bmatrix} \xi & -1+\xi & \xi & \xi \\ -1+\psi & \psi & \psi & \psi \\ \zeta & \zeta & -1+\zeta & \zeta \end{bmatrix} \quad (32)$$

局所座標系から物理座標系への要素の写像は、アイソパラメトリック要素と同様に式(22)を用いる。また、流速場の写像は、次のPiola変換により行う。

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}(\xi)) = J(\xi)^{-1} [J(\xi)] \bar{\mathbf{u}}^h(\xi) \quad (33)$$

ここに、 $[J]$ と $|J|$ は、式(22)から作られるJacobian行列とその行列式である。式(33)に式(29)を代入すれば、

$$\mathbf{u}^h(\xi) = [\mathbf{N}(\xi)]^T \{q\} = \sum_j^{N_F} \mathbf{N}_j(\xi) q_j \quad (34)$$

$$[\mathbf{N}(\xi)]^T = J(\xi)^{-1} [J(\xi)] [\bar{\mathbf{N}}(\xi)]^T \quad (35)$$

2.(3)の混合モデルでは、隣接要素境界面で自由度を共有するため、この形状関数により、式(11)は厳密に満足される。一方、2.(4)のハイブリッド・モデルでは、前述のとおり、式(11)は近似的に満足されるに過ぎない。また、そもそも式(11)を満足しない関数も許される。

ハイブリッド・モデルのラグランジュ乗数は要素の境界面に沿う関数であるが、ここでは面上で一定値とする。

$$\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_F \quad (36)$$

4. 有限要素方程式

前章の近似関数を対応する変分原理の汎関数に代入すると停留条件から解くべき有限要素方程式を得られる。本論文では、研究対象であるハイブリッド・モデルについてのみ記載する。

近似関数、式(23)、式(34)、式(36)を汎関数(16)に代入すると、各変数に関する停留条件から次の三つの式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_H}{\partial \phi_E} &= - \int_{V_E} \{\nabla \cdot \mathbf{N}\}^T \{q\} dV \\ &= - \int_{\partial V_E} \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}\}^T \{q\} dS = \{1\}^T \{q\} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_H}{\partial \{q\}^T} &= \int_{V_E} \left[\frac{1}{k} [\mathbf{N}][\mathbf{N}]^T \{q\} - \{\mathbf{N} \cdot \nabla\} \phi_E \right] dV \\ &\quad + \int_{\partial V_E} \{\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}\} \lambda_F dS \\ &= [B] \{q\} - \{1\} \phi_E + \{\lambda_F\} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_H}{\partial \{\lambda_F\}^T} &= \sum_E \left[\int_{\partial V_E} \{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{N}\}^T \{q\} dS - \int_{(\partial V_E)_n} \hat{q} dS \right] \\ &= \sum_E \left[\{q\} - \int_{(\partial V_E)_n} \hat{q} dS \right] = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

ただし、 $\{1\}$ は成分がすべて1のベクトルであり、また、

$$[B] = \int_{V_E} \frac{1}{k} [\mathbf{N}][\mathbf{N}]^T dV \quad (40)$$

ϕ_E と $\{q\}$ には拘束条件はないので、式(37)、式(38)は、要素ごとに成立する。式(38)より、

$$\{q\} = [B]^{-1} (\{1\} \phi_E - \{\lambda_F\}) \quad (41)$$

式(37)と式(41)から次式を得ることができる。

$$\{q\} = [K] \{\lambda_F\} = [B]^{-1} [C] \{\lambda_F\} \quad (42)$$

$[K]$ は要素係数行列である.

行列 $[B]^{-1}$ と $[C]$ の成分をそれぞれ B_{ij}^{-1} と C_{ij} と表すと,

$$C_{ij} = \left(\sum_k B_{kj}^{-1} / \sum_l \sum_k B_{kl}^{-1} \right) - \delta_{ij} \quad (43)$$

ここに, δ_{ij} はクロネッカのデルタである.

式(42)を式(39)に代入することにより, 解くべき全体系の $\{\lambda_r\}$ に関する代数方程式を組み上げることができる.

5. 数値実験

RT0によるハイブリッド・モデル (以降, RT-HM) の基本性能を確認するために実施した三つの数値実験の結果を示す. 流速の近似特性把握のための二次元問題, 一様流生成に関するパッチテスト, 流速の精度評価のための三次元問題である. 以下, それらの結果を示す.

(1) 流速の近似特性

図-5に示すようなL字型の均質媒体内の浸透流問題を

利用して, RT-HMの流速近似特性を示す. 二次元問題であるが, 三次元要素を用いた結果である. 図-5のメッシュは四面体要素での分割例である. 同じ節点配置で六面体要素で分割した場合と五面体要素 (2パターン) で分割した場合の計4ケースを用意した. また, 比較のため, 適合モデルによる解析 (以降, L-CM), および, 参照解として要素サイズが0.04の細かい六面体分割によるRT-HMとL-CMの解析も実施した.

図-6は, 参照解, 図-7は六面体, 図-8と9は五面体, 図-10は四面体要素の結果である. 各図において, 赤矢線がRT-HM, 黒矢線はL-CMの流速ベクトルである. 図-6の参照解において, 矢線は各ケースと比較するため選択的に描いた要素中心位置での流速ベクトルである. 屈曲部Eの特異点近傍を除けば二つの結果は良く一致しており, 矢線は重なり区別できない. 図-7~10では, 流速ベクトルは要素ごとに要素の中心と節点位置でプロットしており, 節点流速の始点は要素の中心方向に少し移動した位置とした. 緑矢線は図-6の参照解の流速ベクトルである. ただし, 参照解は, 煩雑になるので, 要素の中心位置でのみ図示し, 四面体では図示を省略した.

図-5 問題設定と四面体要素分割

図-6 細かい分割による参照解

図-7 六面体要素の解

図-8 五面体要素パターン1の解

図-9 五面体要素パターン2の解

図-10 四面体要素の解

RT-HMの流速は、式(37)を満足するように求められるが、紙面の横、縦、奥行き方向を (ξ, ψ, ζ) とすれば、 ζ 方向の変化はないので、式(24)の係数 $\{\alpha\}$ としては、次のような近似解が得られる。

- ・ 六面体： $\alpha_4 + \alpha_5 = 0$, with $\alpha_6 = 0$
- ・ 五面体： $\alpha_4 = 0$, with $\alpha_5 = 0$
- ・ 四面体： $\alpha_4 = 0$

したがって、この場合、五面体でも、四面体と同様に流速は要素内で一定となる。六面体の場合は、式(25)より ξ 方向の成分は ξ の関数、 ψ 方向成分は ψ の関数となる。一方、L-CMでは、大きく異なり、流速は式(19)の速度

ポテンシャルの形状関数の微分から計算するため、 ξ 方向成分は ψ の関数、 ψ 方向成分は ξ の関数となる。

以下、RT-HMの流速近似特性をまとめると、

- a. 細かい分割ではRT-HMとL-CMに差はない（図-6）
- b. 参照解はRT-HMとL-CMの中間的な値である（図-7～9の緑矢線）
- c. 要素が不透水面を含む場合、RT-HMは不透水条件を精度良く近似する（図-6～10の壁面に沿う赤矢線）
- d. 一つを除く残りのすべての面が不透水となる要素では、RT-HMの流速はゼロとなる（図-5の点Bの角）
- e. 流速ベクトルの数値を詳査するとRT-HMは要素境界

図-11 一様流のパッチテスト (左からシリーズ0, 1, 2, 3)

面のフラックスの連続性は良好であるが、L-CMのフラックスは不連続となる。

(2) 一様流のパッチテスト

長さが10で、正方形の単位断面を有する均質媒体に対し、流速が1となるような全水頭値を両端に与えて、RT-HMが一様流を正確に生成できるか否かのパッチテストを実施した。テストは、六面体、五面体、四面体で分割した計4シリーズのメッシュ群に対し行った。図-11に解析ケースを示す。図は、一番左の縦一列がシリーズ0で右方向にシリーズ1, 2, 3の順に配置されている。シリーズ0は、節点配置間隔を長手方向には2.0, 断面方向には0.5となる構造格子で、それから節点位置を移動させて要素に歪みを与えたメッシュがシリーズ1~3である。また、一番上の横一列は六面体による要素分割で、その下の横一列が五面体による分割パターン1, 順に五面体による分割パターン2, 3, 一番下の横一列が四面体による要素分割である。図は、モデルの端部のみを表示しており、内部の分割パターンが分かるように、赤い要素だけを抜き出した図も付加した。各図の左上にはSに続くシリーズ番号と要素の種類 (hex: 六面体, pen#: 五面体分割パターン番号, tet: 四面体) とテストの可否を付記した。図より、RT-HMによる流速ベクトルは要素形状に依存し、一様流を生成できない場合があることが分かる。結果を整理すると、

- 六面体と五面体要素では、流れを横切る方向の節点配置に乱れがないシリーズ0とシリーズ1では一様流を生成できた。
- 六面体と五面体要素では、流れを横切る方向の節点配置に乱れを与えると一様流を生成できない場合がある。
- S2-hexとS2-pen1は一様流を生成できたが、これらは、図-11において、太く縁どりの境界面における二次元メッシュ解析と等価である。
- 四面体要素は、すべての分割パターンで一様流を生成できた。

図-12は、一様流を生成できずに流速が乱れたケースの要素中心と節点位置での流速ベクトルである。流速が

図-12 流速ベクトルの乱れ

乱れるケースでも要素中心位置の乱れは小さく見えるが、正確な値でない。ただし、全水頭値については、要素中心位置で ϕ_E を、要素面の中心位置で ϕ_F を評価すると、正確な値が得られていることが確認できた。

なお、すべてのメッシュに対し、同じテストをL-CMでも行ったが、流速ベクトル、全水頭値とも一様流を生成できないケースはなかった。

(3) 直方体領域の三次元流れ

流速ベクトルの解の精度を定量的に評価するため、次式で表される三次元矩形領域の問題を解析した。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad [0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c] \quad (44)$$

$$\hat{\phi} = \phi_1 \quad [x \rightarrow 0], \quad \hat{\phi} = \phi_2 \quad [x \rightarrow a],$$

$$\hat{\phi} = 0 \quad [y \rightarrow 0, b], \quad \hat{\phi} = 0 \quad [z \rightarrow 0, c] \quad (45)$$

この問題の厳密解 $\tilde{\phi}$ は式(46)の形で表される¹⁴⁾。

$$\tilde{\phi} = \frac{16}{\pi^2} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} f(x)f(y)f(z) \quad (46)$$

$$f(x) = \frac{\phi_1 \sinh\{l(a-x)\} + \phi_2 \sinh(lx)}{\sinh(la)} \quad (47)$$

$$f(y) = \frac{\sin\{(2s+1)\pi y/b\}}{2s+1} \quad (48)$$

$$f(z) = \frac{\sin\{(2t+1)\pi z/c\}}{2t+1} \quad (49)$$

$$\frac{l^2}{\pi^2} = \frac{(2s+1)^2}{b^2} + \frac{(2t+1)^2}{c^2} \quad (50)$$

ここでは、各パラメタを次の値に設定した。

$$a = b = c = 1.0 \quad (51)$$

$$\phi_1 = 5.0, \quad \phi_2 = -5.0 \quad (52)$$

この問題に対し、図-13に示すような六面体、五面体、四面体で分割した三つのメッシュを用い、RT-HMとL-CMによる解析を実施した。メッシュは対称性を考慮して1/4の領域とした。

流速ベクトルの解の精度は、要素中心において、流速の絶対値と方向で評価した。前者には式(53)のベクトル絶対値の誤差ノルムを、後者には式(54)のベクトル方向の誤差ノルムを用いた。

$$E_{|u|} = \sqrt{\sum_{I \in E'} (|u_I^h| - |\tilde{u}_I|)^2} / \sqrt{\sum_{I \in E'} |\tilde{u}_I|^2} \quad (53)$$

$$E_{\theta} = \sqrt{\sum_{I \in E'} \left(\frac{\mathbf{u}_I^h \cdot \tilde{\mathbf{u}}_I}{|\mathbf{u}_I^h| |\tilde{\mathbf{u}}_I|} - 1 \right)^2} / \sqrt{\sum_{I \in E'} 1} \quad (54)$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{u}}_i$ は式(46)を微分して得られる流速ベクトルの厳密解、 E' は、特異点を含む要素 (図-13の青い要素) を除いた要素の集合である。この問題は、辺BC, CD, FG, GH上で特異点となる。

図-14に式(53)の絶対値の誤差、図-15に式(54)による流向の誤差を示す。これらの図から次のことが分かる。

- L-CMでは絶対値、流向ともに六面体の精度が高く、五面体の四面体の精度に大差はない。
- RT-HMは絶対値、流向ともに要素の種類による精度の違いに大差はない。
- 六面体では、L-CMの方がRT-HMより、絶対値、流向ともに精度が高い。
- 五面体と四面体の流速の絶対値については、L-CMとRT-HMの精度に大差はない。
- 五面体と四面体の流向については、RT-HMの方がL-CMより精度に優れる。

6. おわりに

浸透流解析において、全水頭のみを補間する一般的なFEM (L-CM) では、精度の良い連続な流速場が得られないという問題を背景に開発されたRT-HMについて、数理の詳説し、数値実験により、その基本性能を客観的に評価した。最初のL字型の媒体の浸透流問題では、流速近似の特徴を示した。RT-HMの特筆すべきは、L-CMと異なり、隣接要素間の流量が連続である点と、不透水境界条件を精度良く近似できる点であろう。これらは、多くの既発表論文^{6,7,9,10)}が開発動機の一つとしているように、流跡線計算において高い優位性を示す特徴である。

一方、一樣流のパッチテストでは、要素の面がねじれているような任意形状の六面体、五面体要素で一樣流を生成できない場合があることが明らかとなった。これは、二次元要素では起こり得ない問題であるため、次元問題を対象とした多くの研究報告では論じられていなかった。FEMの最大の特徴の一つは、複雑形状への順応性が高いことであり、特に地下水浸透流解析のように、地形や地層境界面といった複雑な曲面を有する領域を対象とする問題に対しては差分法や有限体積法と比べて非常に有用な方法になりうるが、RT-HMの三次元要素を用いる場合には注意が必要である。

三つ目の厳密解の存在する三次元矩形領域の数値実験では、六面体要素の場合、流速の絶対値、方向ともにL-CMの方がRT-HMよりも高い精度の解を与えた。また、五面体、四面体では、流向については、RT-HMの方がL-CMより良好であるが、流速の絶対値については、大差がない結果となった。

以上の知見は、限られた数値実験に基づくものである

が、これまでの多くの研究報告が対象としていた二次元要素では起こりえないRT-HMの欠点も含まれる。我が国のように複雑な地形・地質を対象とする場合には三次

図-13 直方体領域の解析メッシュ

図-14 流速絶対値の誤差ノルム

図-15 流速方向の誤差ノルム

図-16 全水頭コンター (上: RT-HM, 下: L-CM)

元解析は不可欠であり、RT-HMについては、実用化に向けての更なる性能検討が必須であろう。さらには、十分な性能確認がなされたとしても、RT-HMは、L-CMのような従来のFEMに代わる手法ではなく、両者の長所短所を十分把握した上での使い分けが重要であると考え。

また、RT-HMでは、全水頭の自由度が要素の面と要素の中心位置で定義されるため、実問題で重要となる地形の起伏による地下水流動への影響が、節点に自由度を持つ従来型のFEMに比べて過小評価される恐れがある。得られた全水頭の図化処理にも注意が必要である。図-16は、紙面右から左へ流れる一様流を非構造格子で解析した全水頭コンターであるが、RT-HMは自由度位置では正確な値が得られているにも係わらず、コンター図は正しく表現できない。一般的なコンター図のアルゴリズムは節点値をベースとしているためである。透水性の異なる内在構造等、コンターの乱れがメッシュ分割以外に起因する場合もあり得るため、RT-HMでは、非構造格子での全水頭コンター図の評価にも注意が必要である。

謝辞：本研究を進めるに当たり、横浜国立大学の山田貴博教授からの多くの助言を頂いた。感謝申し上げる。

参考文献

- 1) Cordes, C. and Kinzelbach, W.: Continuous groundwater velocity field and path lines in linear, bilinear, and trilinear finite elements, *Water Resour. Res.*, Vol.28, No.11, pp.2903-2911, 1992.
- 2) Raviart, P. A. and Thomas, J. M.: A mixed finite element method for second order elliptic problems, *Lect. Notes in Math.*, Vol.606, pp.292-315, 1977.
- 3) Brezzi, F., Douglas Jr., J. and Marini, L. D.: Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems, *Numer. Math.*, Vol.47, pp.217-235, 1985.
- 4) 鷺津久一郎, 池川昌弘: 有限要素法, 岩波書店, 1987.
- 5) 鷺津久一郎: 弾性学の変分原理概論, 培風館, 1972.
- 6) Matringe, S. F., Juanes, R. and Tchelepi, H. A.: Robust streamline tracing for the simulation of porous media flow on general triangular and quadrilateral grids, *J. Comput. Phys.*, Vol.219, No.2, pp.992-1012, 2006.
- 7) Younes, A., Ackerer, P. and Delay, F.: Mixed finite elements for solving 2-D diffusion-type equations, *Reviews of Geophysics*, Vol. 48, RG1004, 2010.
- 8) Chavent, G. and Roberts, J. E.: A unified physical presentation of mixed, mixed hybrid finite elements and standard finite difference approximations for the determination of velocities in waterflow problems, *Adv. Water Resour.*, Vol. 14, pp.329-348, 1991.
- 9) Mose, R. Siegel, P., Acherer, P. and Chavent, G.: Application of mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model: Luxury or necessity?, *Water Resour. Res.*, Vol.30, No.11, pp.3001-3012, 1994.
- 10) 青木広臣, 鈴木俊一, 下村雅則, 川上博人: 混合化形式有限要素法による放射性廃棄物処分施設を対象とした地下水流動解析, 土木学会論文集 C, Vol.67, No.4, pp.453-463, 2011.
- 11) Naff, R. L., Russell, T. F. and Wilson, J. D.: Shape functions for velocity interpolation in general hexahedral cells, *Comput. Geosci.*, Vol.6, pp.285-314, 2002.
- 12) 白石知成, 櫻井英行, 菱谷智幸, 山浦昌之, 谷藤眞一郎: CK 法による FEM 地下水流動解析結果からの流量算出法の考察, 日本地下水学会, 2011 年春季講演会講演要旨, pp.10-15, 2011.
- 13) Meissner, U.: A Mixed finite element model for use in potential flow problems, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.6, pp.467-473, 1973.
- 14) 松本敏三: 境界条件を満足する総合偏微分方程式 (第2版), 現代工学社, pp.361-363, 1983.

(2012.4.3 受付)

FUNDAMENTAL PERFORMANCE IN THREE-DIMENSIONAL
SEEPAGE PROBLEMS OF FINITE ELEMENTS
USING THE RAVIART-THOMAS MIXED INTERPOLATION

Hideyuki SAKURAI, Mitsuo GOHKE, Tomonari SHIRAISHI,
Tomoyuki HISHIYA, Masayuki YAMAURA and Hiroyuki KASHIMA

This paper reports the results of a series of numerical experiments concerning the fundamental performance in solving three-dimensional (3D) seepage problems of finite elements using the Raviart–Thomas mixed interpolation method (RT), which is capable of independent interpolation of hydraulic head and velocity. In the conventional finite element method that uses only hydraulic head as an unknown variable, velocity is independently calculated for each element. There are cases, therefore, where a continuous velocity field cannot be determined with high accuracy. In the RT method, flux can be made continuous along common boundaries of adjacent elements because a velocity shape function is constructed by using the set of flux defined at the element faces as a degree of freedom. Furthermore, by means of formulation based on a hybrid variational principle, final variables can be reduced to the Lagrange multiplier. Although almost all of the previous studies have shown validity in solving two-dimensional problems, this study identifies the fundamental performance, including drawbacks, of 3D elements used in the RT method in solving seepage problems.