地盤伝達関数のクロスタームに関する基本的な性質

Fundamental property of cross terms of ground transfer function

後藤浩之*

Hiroyuki GOTO

*工博 京都大学助教 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

Normalized energy density (NED) is one of the essential quantities for a ground transfer function of a 1D layered structure model. The cross term of the functions and the cross term of the power of the functions are defined as an extension of the NED. The cross term is physically defined as the correlation coefficient between the two ground transfer functions. The cross term detects the harmony of two transfer functions; a finite value is obtained only in the case where peak frequencies coincide. The cross term of the power of the normalized transfer functions is 1 when the peak frequencies do not coincide. The properties of the cross term and the cross term of the power are analytically proved for a two-layered case and numerically shown for three- and four-layered cases.

Key Words : elastic wave, normalized energy density, ground transfer function

1. はじめに

弾性波に関する様々な性質を理解することは、地震学や地震工学において地震波の伝播現象を理解する上で欠かせないものである。地球内部の媒質が弾性体であることは仮定に過ぎないが、地震学および地震工学では媒質が弾性体であると仮定し、弾性波の性質を利用して観測された波形記録を議論することが多い^{1),2)}。例えば、震源から放射された地震波が地球内部を伝播して地表に達するまでの振幅の変化は、幾何減衰による効果、媒質の変化に伴う反射・屈折による振幅の変化など、弾性波の性質によって理解される。

本研究で対象とする地盤伝達関数は、地表近くの柔らかい堆積層による地震波の増幅現象を理解するために、現在広く利用されているものである。特にここでは、S波実体波が表層地盤に鉛直に入射できると近似できる場合に、表層に入射する地震波と地表で観測される地震波の比として定義されるものを対象とする。鉛直下方入射を仮定することは弾性波問題として特殊なように思われるが、一般に地殻を構成する媒質のS波速度(3000-4000 m/s)に比べて工学的基盤のS波速度(400-700 m/s)は随分小さく、Snellの法則によって工学的基盤では震源深さ・方位によらず実体波が鉛直下方から入射すると考えてよい。

非減衰の水平成層からなる地盤モデルに対して地盤伝達関数を理論的に求めることは古典的な問題³⁾である。現在の実務では、現実 に即して内部減衰や材料の非線形特性をモデル化し、その影響を考慮できる方法^{4),5)}によって地震波の増幅特性を評価する。近年、この古典的な地盤伝達関数に対して Normalized Energy

Density⁶⁾ (NED) という新しい物理量が提唱されたことから、著者を含めた研究グループではNEDの性質を利用して地盤の減衰を直接推定する手法⁷⁾など、NEDに関する新しい研究を進めているところである。

NEDは地盤伝達関数のパワーの周波数平均として定義される。NEDが0となるような関数の集合を同一視すれば、NEDはある適切に定義された関数空間におけるノルムとなるため、関数空間上で地盤伝達関数に数学的な特徴を与えられる可能性がある。例えば、単純な地盤伝達関数を基底にもつ関数空間を構成することで、多層系地盤の複雑な伝達関数を単純で取り扱いやすい伝達関数の級数和で表現することができる⁸⁾。このような応用を行うためには、関数空間がHilbert空間である必要があるため、内積に相当するような演算が地盤伝達関数間でどのような値を持つのかを数学的に明らかにすることが不可欠である。そこで、本研究ではNEDを拡張して定義できる2つの異なる地盤伝達関数の積に関する量について、その基本的な性質を考察した。

2. Normalized Energy Density

NEDは図-1に示したように、半無限の基盤(#0)と n 層からなる表層(#1-# n)によって構成された水平多層地盤において定義される物理量である。# k 層のS波速度を β_k 、密度を ρ_k 、厚さを h_k とし、基盤のS波速度を β_0 、密度を ρ_0 とする。基盤から表層にSH波が鉛直入射する場合において、# k 層におけるNED

図-1 NED で対象とする水平多層地盤

は以下のように定義される⁶⁾．

$$\text{NED}_k = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \rho_k \beta_k \left| \frac{A_k(\omega)}{A_0(\omega)} \right|^2 d\omega, \quad (1)$$

A_0 は基盤に入射する波の Fourier 振幅, A_k は # k 層を伝播する上昇波の Fourier 振幅である． ω は角周波数であって, 被積分項の周波数平均を取ることを意味している．既往の NED の定義では負の角周波数も積分区間に含めているが, 時間領域で入射波および上昇波が実関数であることを認めると, $|A_k/A_0|^2$ は偶関数となる．このため, ここでは正の角周波数のみについて積分を取って NED を定義する．

入射波の振幅と地表で観測される波の振幅の比として定義される $H = 2A_1/A_0$ を本研究での地盤伝達関数とする．地盤伝達関数 H を用いると #1 層における NED は以下のように定義できる．

$$\text{NED}_1 = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{\rho_1 \beta_1}{4} |H(\omega)|^2 d\omega. \quad (2)$$

既往の研究⁶⁾により, NED は層の構成および層の材料定数に関わらず, 基盤の S 波インピーダンス値である $\rho_0 \beta_0$ と等しい値を取ることが, 2 層系の場合について厳密に証明されている．また, 3 層系以上については厳密に証明されていないが, 数値実験により工学的には十分な精度で成り立つことが確認されている．この事実, 中間層の構成が不明であっても地盤伝達関数と最表層の S 波インピーダンス値が得られれば, NED を評価できることを意味している．

さて議論を一般化するために, 地盤伝達関数を正規化した $a(\omega)$ を以下のように定義する．

$$a(\omega) = \sqrt{R_a} \frac{A_1(\omega)}{A_0(\omega)}. \quad (3)$$

ここに, R_a は基盤と最表層の S 波インピーダンス比 ($\rho_1 \beta_1 / \rho_0 \beta_0$) を表す．このとき, NED が常に $\rho_0 \beta_0$ と等しいという性質は, a に関する以下の性質と同値で

図-2 複素平面上の単位円周 C と極 $\bar{z}_{ak}$, z_{bl}

ある．

$$\langle a^* a \rangle \equiv \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} a^* a d\omega = 1, \quad (4)$$

a^* は a の複素共役を意味する．

3. 地盤伝達関数のクロスターム

3.1 2 層系の場合

2 つの水平多層地盤に対して, 式 (4) を満足するような複素関数 a, b がそれぞれ定まる．ここで, a と b のクロスタームを以下のように定義する．

$$\langle a^* b \rangle \equiv \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} a^* b d\omega. \quad (5)$$

$a = b$ である場合, クロスタームは式 (4) の性質により 1 となる．なお, 定義から $\langle ab^* \rangle = \langle a^* b \rangle^*$ であるため, ここでは $\langle a^* b \rangle$ についてのみ考察する．表層 #1 と基盤 #0 とからなる 2 層系の場合, A_1/A_0 を陽に書き下すことができるので⁶⁾ a と b は以下のように表される．

$$a = \frac{\sqrt{R_a}}{\cos(\omega h_a / \beta_a) + i R_a \sin(\omega h_a / \beta_a)}, \quad (6)$$

$$b = \frac{\sqrt{R_b}}{\cos(\omega h_b / \beta_b) + i R_b \sin(\omega h_b / \beta_b)}, \quad (7)$$

ここに, R_a, R_b は基盤と表層の S 波インピーダンス比, h_a, h_b は表層の厚さ, β_a, β_b は表層の S 波速度をそれぞれ表す． i は虚数単位を表す．

ここで, 絶対値が 1 である複素数 $z = e^{i\omega h / \beta}$ を定義する．仮に h_a / β_a と h_b / β_b がそれぞれ h / β の整数倍として表せるとし, その時の倍率を互いに素な自然数 n_a, n_b で表す．整数倍で表せるという条件は h_a / β_a と h_b / β_b の比が有理数であるという条件と同値である．この時, 以下の表現が利用でき,

$$\cos(\omega h_a / \beta_a) = \frac{1}{2}(z^{n_a} + z^{-n_a}), \quad (8)$$

$$\sin(\omega h_a / \beta_a) = \frac{1}{2i}(z^{n_a} - z^{-n_a}), \quad (9)$$

$$\cos(\omega h_b/\beta_b) = \frac{1}{2}(z^{n_b} + z^{-n_b}), \quad (10)$$

$$\sin(\omega h_b/\beta_b) = \frac{1}{2i}(z^{n_b} - z^{-n_b}), \quad (11)$$

a と b は共通する複素数 z によって表すことができる．

$$a = \frac{\frac{2\sqrt{R_a}}{1+R_a} z^{n_a}}{z^{2n_a} + \frac{1-R_a}{1+R_a}}, \quad (12)$$

$$b = \frac{\frac{2\sqrt{R_b}}{1+R_b} z^{n_b}}{z^{2n_b} + \frac{1-R_b}{1+R_b}}. \quad (13)$$

z は複素平面上の単位円周上に存在して， ω の増加に伴って反時計まわりに移動し， $2\pi\beta/h$ 毎に 1 周する．このことは，式 (5) の積分を単位円周 C 上の周積分に帰着できることを意味している．

$$\begin{aligned} \langle a^*b \rangle &= \frac{1}{2\pi\beta/h} \int_0^{2\pi\beta/h} a^*b d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C a^*bz^{-1} dz. \end{aligned} \quad (14)$$

そして， C に関する積分は C 内部に存在する被積分関数の極に対応する留数によって評価できる．物理的な制約により R_a, R_b が正の値を持つこと，また多くの地盤において表層のインピーダンス値が小さいことから R_a, R_b が 1 より小さいことを認めると，被積分関数の極は以下の通りである．

$$\bar{z}_{ak} = \left(\frac{1+R_a}{1-R_a} \right)^{1/2n_a} e^{(2k-1)\pi i/2n_a} \quad k \in \{1, \dots, 2n_a\}, \quad (15)$$

$$z_{bl} = \left(\frac{1-R_b}{1+R_b} \right)^{1/2n_b} e^{(2l-1)\pi i/2n_b} \quad l \in \{1, \dots, 2n_b\}. \quad (16)$$

ただし，図-2 に示すように $\bar{z}_{ak}$ は単位円周の外側に位置する極である．

留数定理に従って， z_{bl} に対応する留数の和を計算することでクロスターム値を評価する．

$$\langle a^*b \rangle = \sum_{l=1}^{2n_b} \text{Res}_{z=z_{bl}} [a^*bz^{-1}], \quad (17)$$

ここに，留数は以下のように表される．

$$\text{Res}_{z=z_{bl}} [a^*bz^{-1}] = \frac{-\frac{2\sqrt{R_a}}{1-R_a} \frac{\sqrt{R_b}}{n_b(1-R_b)} z_{bl}^{n_a+n_b}}{z_{bl}^{2n_a} + \frac{1+R_a}{1-R_a}}. \quad (18)$$

図-2 に示すように， $z_{bl+n_b}(l=1, \dots, n_b)$ は $-z_{bl}$ に等しい．すなわち， $z_{bl}^{2n_a} = z_{b(l+n_b)}^{2n_a}$ である．このため， n_a+n_b が奇数の場合， $z_{bl}^{n_a+n_b} = -z_{b(l+n_b)}^{n_a+n_b}$ であることから，クロスターム値は 0 となる．

n_a と n_b が十分大きな値を取る時，クロスターム値の極限が 0 となることを証明することができる（付録 I）．互いに素な自然数 n_a と n_b によって構成される h_a/β_a と h_b/β_b の取りうる組み合わせは，その比が有理数となる場合についてのみしか考えることができないが，任意の実数は有理数の Cauchy 列の極限として表現でき

図-3 n_a, n_b 毎に求めたクロスタームの絶対値（上： $\{R_a, R_b\} = \{0.5, 0.2\}$ ，下： $\{R_a, R_b\} = \{0.5, 0.8\}$ ）

ること⁹⁾から，現実的には十分近い有理数で近似するという考え方によって， n_a と n_b が十分大きな値を持つ，すなわち 0 になると考えることができる．また，後述するような物理的な描像から 0 になると考えることも出来る．

図-3 は， $R_a = 0.5, R_b = 0.2$ および $R_a = 0.5, R_b = 0.8$ の 2 ケースについて， n_a, n_b 毎にクロスタームを計算し，その絶対値を示したものである．それぞれの値は式 (17) によって計算しているが， n_a と n_b が互いに素でない場合，例えば $n_a = n_b = 5$ の場合，については全て 0 として表している．これは，定義によって互いに素な n_a と n_b についてのみしか議論できないためである．いずれのケースにおいても， $n_a + n_b$ が奇数の場合においてクロスターム値が 0 をとることが確認できる．また， n_a, n_b が共に奇数である場合にのみクロスターム値が 0 ではない値を持ち，この値は n_a や n_b が増加するにつれて単調に絶対値が減少する様子が認められる．

図-4 は $\omega h/\beta$ に関する a および b の絶対値を $R_a = 0.5, R_b = 0.2$ の場合について図示したものである．各パネルは n_a, n_b の組み合わせ $\{n_a, n_b\}$ が $\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ の場合にそれぞれ対応する．クロスタームの絶対値はそれぞれ 0.9035, 0.0, 0.2402, 0.0 と計算される． n_a と n_b が奇数の場合， $|a|$ や $|b|$ のピークは 0.5π や 1.5π に表れる．互いに素な n_a, n_b において $n_a + n_b$ が奇数でないということは， n_a と n_b が共に奇数である場合に限られることから，クロスターム

図-4 $\{R_a, R_b\} = \{0.5, 0.2\}$ の場合における $|a|$ と $|b|$ の具体的な関数型

が 0 ではない値を持つということは $|a|$ と $|b|$ が等しい角周波数でピークを持つ場合に限られることがわかる。また、 $n_a = 1, n_b = 3$ の場合のように、クロスタームが 0 でない値を持つ場合でも、ピークのうち $|a|$ と $|b|$ とでその角周波数が一致する頻度が低くなると、クロスタームの絶対値が減少する傾向を示している。これは、 n_a と n_b が十分大きな値を取る時、すなわちピークを与える角周波数が等しくなる頻度が十分低くなることに对应して、クロスターム値が 0 に近づくことを意味している。すなわち、クロスタームは異なる地盤伝達関数間のある種の調和性を定量化したものと解釈することができる。この性質は h_a/β_a と h_b/β_b の比が有理数の場合のみ議論できるが、無理数の場合には等しい角周波数でピークを持つことはない。このため、

物理的な描像によれば無理数の場合には 0 であると予想される。

3.2 多層系の場合

クロスターム $\langle a^* b \rangle$ は多層系の場合についても定義することができる。しかし、2 層系の場合とは異なり解析的に議論することは難しい。そこで、ここではいくつかの典型的なケースについて、数値的にクロスターム値を計算することで、2 層系で導いた特徴が多層系においても見られるかどうかについてのみ確認する。

2 層系における議論によれば、クロスタームは n_a と n_b に関係が深いことが予想されるが、 n_a や n_b を一般の多層系地盤において一意に定義することは不可能である。そこで、 n_a と n_b を定めることができるような仮想的なモデルについて取り上げることにする。 a に対応する水平多層地盤の $\#k$ 層における層厚、S 波速度をそれぞれ h_{ak}, β_{ak} とし、 b に対応する地盤の $\#k$ 層の層厚 h_{bk} を S 波速度 β_{bk} から以下のように設定する。

$$h_{bk} = h_{ak} \frac{\beta_{bk}}{\beta_{ak}} \frac{n_b}{n_a}. \quad (19)$$

このようにして設定した b に対応する水平多層地盤は、2 層系の場合と同様に n_a, n_b のみで特徴付けられる。

ここでは、3 層系および 4 層系地盤を対象としてランダムに生成した 50 モデルについて数値的に検討する。まず、 a に対応するモデルの各表層の S 波速度と密度を 10-700 m/s, 1000-2000 kg/m³ の一様乱数からそれぞれ設定し、基盤の密度についても 1000-2000 kg/m³ の一様乱数から生成する。ただし、基盤の S 波速度は、最表層との S 波インピーダンス比が 0.5 となるように設定する。表層の厚さを 1-50 m の一様乱数から定め、乱数によって 2 層または 3 層に分割する。続いて、同様の手続きによって b に対応するモデルを仮に設定する。ただし S 波インピーダンス比は 0.2 とした。このモデルについて式 (19) に基づいて表層の各層の厚さを再設定して b に対応するモデルとした。

クロスタームは 50 モデルそれぞれについて n_a と n_b の組み合わせを変えながら計算する。積分計算は有限区間とせざるを得ないので、0.1 s⁻¹ 毎に 1.0×10^6 s⁻¹ までの角周波数について数値積分をして平均をとり、その値をクロスターム値とした。なお、積分区間を 1.0×10^7 s⁻¹ までとしても小数点以下 3 桁までの値に変化は認められないことから、ここでは 1.0×10^6 s⁻¹ までで十分であると判断した。

図-5、図-6 は 3 層系、および 4 層系におけるクロスタームの絶対値をそれぞれ黒点で示したものである。各パネルは $n_b = 1$ とした場合の n_a によるクロスターム値の変化、および $n_a = 1$ とした場合の n_b によるクロスターム値の変化を表している。また、各 n_a, n_b について 50 モデルの平均値を棒グラフで併せて示している。基盤と最表層の S 波インピーダンス比を a につい

図-5 3層系について n_a および n_b 毎に求めたクロスタームの絶対値

図-6 4層系について n_a および n_b 毎に求めたクロスタームの絶対値

では0.5に、 b については0.2に固定しているが、モデル間でばらつきが見られる。このことは、NEDとは異なりクロスタームは中間層の物性に依存していることを意味している。ただし、モデル間の分散および平均値は n_a および n_b の増加に従って減少することが認められる。図-7は50モデルの平均値のみを n_a, n_b 毎に示したものである。 $n_a + n_b$ が奇数の場合は奇数でない場合と比較してクロスターム値が随分小さく、2層系の場合と矛盾しない傾向を示している。

図-7 n_a, n_b 毎に求めたクロスタームの平均値（上：3層系，下：4層系）

4. パワーのクロスターム

4.1 2層系の場合

前節で議論したクロスタームは、正規化した2つの地盤伝達関数の積について周波数平均を求めたものである。ここでは、積のパワーに関して周波数平均を取った以下の量について定義し、議論する。

$$\langle |ab|^2 \rangle \equiv \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} |ab|^2 d\omega. \quad (20)$$

定義から明らかなように、この量は以下の様々な量と同じ値を示す。

$$\langle |ab|^2 \rangle = \langle |a^* b|^2 \rangle = \langle |a|^2 |b|^2 \rangle. \quad (21)$$

すなわち、異なる地盤伝達関数のパワーについて積を取り、周波数平均したものと解釈してもよい。以降はこのクロスタームをパワーのクロスタームと呼ぶ。

2層系の場合、 $|a|^2$ と $|b|^2$ は以下のように表される。

$$|a|^2 = \frac{R_a}{\cos^2(\omega h_a / \beta_a) + R_a^2 \sin^2(\omega h_a / \beta_a)}, \quad (22)$$

$$|b|^2 = \frac{R_b}{\cos^2(\omega h_b / \beta_b) + R_b^2 \sin^2(\omega h_b / \beta_b)}. \quad (23)$$

前節と同様に定義される自然数 n_a, n_b および複素数 z を用いると、 h_a / β_a と h_b / β_b の比が有理数の場合に限り複素平面上の単位円周 C 上の積分として以下のように積分を評価することができる。

$$\langle |ab|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_C |ab|^2 z^{-1} dz. \quad (24)$$

また、被積分関数 $|ab|^2 z^{-1}$ の極のうち、単位円周内部に存在する極は以下の通りである．

$$z_{ak} = \left(\frac{1-R_a}{1+R_a} \right)^{1/2n_a} e^{(2k-1)\pi i/2n_a} \quad k \in \{1, \dots, 2n_a\}, \quad (25)$$

$$z_{bl} = \left(\frac{1-R_b}{1+R_b} \right)^{1/2n_b} e^{(2l-1)\pi i/2n_b} \quad l \in \{1, \dots, 2n_b\}. \quad (26)$$

なお、 z_{bl} は式 (16) で表す複素数と同じものである．2位の極は $\left(\frac{1-R_a}{1+R_a} \right)^{1/2n_a} = \left(\frac{1-R_b}{1+R_b} \right)^{1/2n_b}$ の場合に限り発生する．2位の極が存在しない場合は、それぞれの極に対応する留数の和を以下のように取ることで、積分を評価することができる．

$$\langle |ab|^2 \rangle = \sum_{k=1}^{2n_a} \text{Res}_{z=z_{ak}} [|ab|^2 z^{-1}] + \sum_{l=1}^{2n_b} \text{Res}_{z=z_{bl}} [|ab|^2 z^{-1}], \quad (27)$$

ここに、各留数は以下のように表される．

$$\text{Res}_{z=z_{ak}} [|ab|^2 z^{-1}] = \frac{\frac{2R_b}{n_a(1-R_b^2)}}{z_{ak}^{2n_a} + z_{ak}^{-2n_b} + \frac{2(1+R_a^2)}{1-R_b^2}}, \quad (28)$$

$$\text{Res}_{z=z_{bl}} [|ab|^2 z^{-1}] = \frac{\frac{2R_a}{n_b(1-R_a^2)}}{z_{bl}^{2n_b} + z_{bl}^{-2n_a} + \frac{2(1+R_b^2)}{1-R_a^2}} \quad (29)$$

z_{ak} が $-z_{a,k+n_a}$ に等しいこと、および z_{bl} が $-z_{b,l+n_b}$ に等しいことに着目すると、 $z_{ak}^{2n_a} = z_{a,k+n_a}^{2n_a}$ 、かつ $z_{bl}^{2n_b} = z_{b,l+n_b}^{2n_b}$ である．このことから、留数の和は半分までで計算すればよく、具体的には次のようになる．

$$\langle |ab|^2 \rangle = 2 \sum_{k=1}^{n_a} \text{Res}_{z=z_{ak}} [|ab|^2 z^{-1}] + 2 \sum_{l=1}^{n_b} \text{Res}_{z=z_{bl}} [|ab|^2 z^{-1}], \quad (30)$$

十分大きな n_a, n_b に対して、パワーのクロスタームはS波インピーダンス比 R_a, R_b によらず1を取るという興味深い性質を持つ．2位の極を持つ場合も含めてこの厳密な証明は付録 II で述べる．

図-8 は $R_a = 0.5, R_b = 0.2$ 、および $R_a = 0.5, R_b = 0.8$ の場合についてそれぞれパワーのクロスタームを $n_b = 1$ として n_a 毎に示したものである． $R_b = 0.2$ における $n_a = 1, \dots, 5$ の場合のように、小さな n_a においてはパワーのクロスターム値と1との間に差が見られるが、 n_a が増加するに従って、いずれの場合も値は1に収束している．パワーのクロスターム値と1との差に着目するため、 $|\langle |ab|^2 \rangle - 1|$ を n_a, n_b 毎に図示したものが図-9 である．クロスタームの場合（図-4）と同様に、 n_a と n_b が互いに素な場合については0としてプロットしている．図-9 から、 n_a, n_b の増加に伴って単調に差は減少し、パワーのクロスターム値が1に収束する様子が認められる．

クロスターム $\langle a^*b \rangle$ は、前節で議論したように $n_a + n_b$ が奇数の場合において0となる．一方、 $\langle |ab|^2 \rangle$ と1との差は、 $n_a = 2, n_b = 1$ の場合のように $n_a + n_b$ が奇

図-8 n_a 毎に求めたパワーのクロスターム（上： $\{R_a, R_b\} = \{0.5, 0.2\}$ ，下： $\{R_a, R_b\} = \{0.5, 0.8\}$ ）

図-9 n_a, n_b 毎に求めた $\langle |ab|^2 \rangle$ と1の差（上： $\{R_a, R_b\} = \{0.5, 0.2\}$ ，下： $\{R_a, R_b\} = \{0.5, 0.8\}$ ）

数であっても有限の値を示している．図-10 は $\omega h/\beta$ に関する $|a|^2$ および $|b|^2$ を $R_a = 0.5, R_b = 0.2$ の場合について図示したものである．各パネルは n_a, n_b の組み合わせ $\{n_a, n_b\}$ が $\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ の場合に対応し、それぞれのパワーのクロスタームは具体的に 1.5714, 0.8621, 1.0506, 0.9676 と求められる． $n_a = 1, n_b = 2$ 、あるいは $n_a = 2, n_b = 3$ のようにク

図-10 $\{R_a, R_b\} = \{0.5, 0.2\}$ の場合における $|a|^2$ と $|b|^2$ の具体的な関数型

ロスターム $\langle a^*b \rangle$ は 0 となる場合においても，パワーのクロススターム $\langle |ab|^2 \rangle$ は 1 とならない．すなわち，パワーのクロススタームはピーク値を与える角周波数の一致だけでは定まらない量であることを示している．ただし，クロススタームと同様にピークを与える角周波数が等しくなる頻度が低くなるにつれて，パワーのクロススタームが 1 に近づく傾向がある． n_a, n_b が十分大きな値を取る時はピークを与える角周波数が等しくなる頻度が十分低くなり，1 に近づく．

4.2 多層系の場合

クロススタームの場合と同様に，いくつかの典型的なケースについて数値的に計算することで，多層系におけるパワーのクロススタームの性質を確認する．3 層系，

図-11 3 層系について n_a および n_b 毎に求めたパワーのクロススターム値

図-12 4 層系について n_a および n_b 毎に求めたパワーのクロススターム値

および 4 層系地盤を対象としてランダムに生成した 50 モデルについて検討する．なお，モデルは前節で多層系のクロススターム値を求める際に用いた 50 モデルと同じものを採用する．積分計算は 0.1 s^{-1} 毎に $1.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ までの角周波数について数値積分をして平均をとり，その値をパワーのクロススターム値とした．なお，クロススタームの場合と同様に積分区間を $1.0 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ までとしても小数点以下 3 桁までの値に変化は認められないことから，ここでは $1.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ までで十分であると判断した．

図-13 n_a, n_b 毎に求めたパワーのクロスターム値と1の差の平均値 (上: 3層系, 下: 4層系)

図-11, 図-12 は3層系, および4層系におけるパワーのクロスタームをそれぞれ黒点で示したものである。各パネルは $n_b = 1$ とした場合の n_a によるパワーのクロスターム値の変化, および $n_a = 1$ とした場合の n_b によるパワーのクロスターム値の変化を表している。また, 各 n_a, n_b について50モデルの平均値を棒グラフで併せて示している。クロスタームと同様にモデル間でばらつきが見られるが, その分散は n_a および n_b の増加に従って減少し, 各モデルの値は1に収束していく様子が認められる。図-13は50モデルの平均値のみを n_a, n_b 毎に示したものである。図-11, 図-12で見られたような平均値の性質は, $n_a = 1$ や $n_b = 1$ に限らず認められる。

5. クロスタームの特徴

5.1 地盤伝達関数のクロスターム

H_a, H_b を異なる2つの地盤伝達関数とする。 a, b はそれぞれ H_a, H_b を正規化したものであるから, 以下のように H_a と H_b のクロスターム, およびパワーのクロスタームを定義した場合, a と b について定義した値の定数倍となる。

$$\langle H_a^* H_b \rangle \equiv \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int_0^\Omega H_a^* H_b d\omega = \frac{4}{\sqrt{R_a R_b}} \langle a^* b \rangle, \quad (31)$$

$$\langle |H_a H_b|^2 \rangle \equiv \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int_0^\Omega |H_a H_b|^2 d\omega = \frac{16}{R_a R_b} \langle |ab|^2 \rangle.$$

このことは, a, b について考察した各性質は, インピーダンス比 R_a と R_b を含む定数倍だけ考慮すれば, H_a, H_b についても成立することを意味している。

ホワイトノイズが基盤に鉛直に入射する場合, $H_a^* H_b$ は地表で観測される振動の2点間のクロススペクトルである。すなわち, 入射する波の振幅特性で正規化したクロススペクトルの周波数平均は, a, b のクロスタームの性質に従うことを意味する。

5.2 相関係数

各周波数において2つの地盤伝達関数のとる値を1つの組としてサンプルとみなし, 周波数毎に与えられるサンプルを集めて Pearson の相関係数を計算すると, 以下のように地盤伝達関数間の相関係数 C_{ab} が定まる。なお, この相関係数は各振動数においてばらつきが存在するようなデータに関して, 周波数毎に定義されるような相関係数とは異なるものである。

$$C_{ab} = \frac{\langle (H_a - \langle H_a \rangle)^* (H_b - \langle H_b \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle |H_a - \langle H_a \rangle|^2 \rangle \langle |H_b - \langle H_b \rangle|^2 \rangle}}, \quad (33)$$

相関係数の invariant な性質から, 上の相関係数は H_a と H_b ではなく a と b で定義しても同じ値を得る。

$$C_{ab} = \frac{\langle (a - \langle a \rangle)^* (b - \langle b \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle |a - \langle a \rangle|^2 \rangle \langle |b - \langle b \rangle|^2 \rangle}}, \quad (34)$$

NED の性質から, $\langle |a|^2 \rangle$ と $\langle |b|^2 \rangle$ は1に等しい。また, a と b の周波数平均が0であると仮定できるとする(付録 III)。このとき, 相関係数 C_{ab} は以下のようにクロスタームと等しいことが導かれる。

$$C_{ab} = \langle a^* b \rangle. \quad (35)$$

この事実は, クロスターム $\langle a^* b \rangle$ に地盤伝達関数間の相関係数という物理的な意味を与えることができることを示している。ただし, 以上の関係は伝達関数にノイズが与えられていない場合に成立するものであって, ノイズが与えられた場合にも成立することを保証するものではないことには留意する必要がある。

5.3 地盤の仮想的なスタック

パワーのクロスタームの特徴は, 2つの地盤モデルに対応する a, b の積に対してパワーの周波数平均を取ると, n_a, n_b が十分大きい場合に1となることである。NED の性質から a, b そのものもパワーの周波数平均は1である。すなわち, n_a, n_b が十分大きい場合において, ab は a や b と共通する性質をもつ。

A_0 を入射波の振幅とし, 地盤伝達関数の積にこれを掛ける。

$$H_a H_b A_0 = \frac{4}{\sqrt{R_a R_b}} ab A_0 \quad (36)$$

左辺は, H_b に対応する地盤の地表における応答を入射波として H_a に対応する地盤に作用させた場合の地表

における応答を意味している．すなわち， H_a ， H_b を順に作用させた結果である．このことは，2つの地盤をスタックしたような仮想的な地盤を想定したとき，その全体系の応答関数である ab が a や b のように通常的地盤と共通する性質を持つ場合があることを意味する．ただし，残念ながら全ての場合において ab のパワーの周波数平均が1となることはないため， a と b の積 ab は群の構造を持たない．

6. 結論

本研究では，非減衰の地盤伝達関数において定義される NED の自然な拡張として，地盤伝達関数のクロスターム，およびパワーのクロスタームを定義し，その性質について考察した．2層系については解析的な考察によって，クロスタームが地盤伝達関数のピーク周波数が一致する場合においてのみ有限値を取ることを示した．また，パワーのクロスタームがピーク周波数が一致しない場合において1を与えることを示した．3層系，4層系については解析的に考察できないため，いくつかの典型的なケースについて数値実験を行い，2層系で導かれる性質と矛盾しないことを確認した．

本研究では，系が非減衰の場合に着目してクロスタームの性質を調べたが，実際には地盤の減衰を無視することはできない．減衰のある系については今後の課題であるが，非減衰の場合からの差として整理することを考えている．この特徴を踏まえることで今後は減衰がある系におけるクロスタームについての考察を進めたい．また，本研究で考察したクロスターム，およびパワーのクロスタームを応用した事例は，現時点では冒頭で述べた例⁸⁾に限られている．ここではあくまで地盤伝達関数をもつ基本的な性質を議論することが主たる目的であって，この性質を利用した新しい理論および手法を構築することは今後の課題である．

参考文献

- 1) Aki, K. and P.G. Richards: *Quantitative Seismology 2nd edn*, University Science Books, California, 2002.
- 2) Kennett, B.L.N.: *The Seismic Wavefield, Volume I: Introduction and Theoretical Development*, Cambridge University Press, 2002.
- 3) Haskell, N.A.: Crustal reflection of plane SH waves, *J. Geophys. Res.*, Vol.45, pp.4147-4151, 1960.
- 4) Schnabel, P.B., J. Lysmer and H.B. Seed: SHAKE A computer program for earthquake response analysis of horizontally layered sites, *Report No.EERC72-12, University of California, Berkeley*, 1972.
- 5) Yoshida, N. and I. Suetomi: DYNEQ: a computer program for dynamic analysis of level ground based on equivalent linear method, *Reports of Engineering Research Institute, Sato Kogyo CO., Ltd.*, pp.61-70, 1996.
- 6) Goto, H., S. Sawada and T. Hirai: Conserved quantity of elastic waves in multi-layered media: 2D SH

case -Normalized Energy Density-, *Wave Motion*, Vol.48, pp.602-612, 2011.

- 7) Goto, H., Y. Kawamura, S. Sawada and T. Akazawa: Direct estimation of near-surface damping based on normalized energy density, *Geophys. J. Int.*, in printing.
- 8) 後藤浩之: 非減衰2層系地盤伝達関数列による多層系地盤伝達関数の級数展開, 平成25年度土木学会全国大会学術講演会概要集, 投稿中.
- 9) 森田茂之: 集合と位相空間, 朝倉書店, 2002.

付録 I 2層系における $\langle a^*b \rangle$ の極限

クロスターム $\langle a^*b \rangle$ は $n_a + n_b$ が奇数の場合に0となるが， $n_a + n_b$ が奇数でない場合には有限値を取る．そこで， $n_a + n_b$ が奇数でない場合について， n_a や n_b が十分大きな値を持つときのクロスタームの極限について調べる．なお，クロスタームの定義(式(5))により $\langle a^*b \rangle^* = \langle ab^* \rangle$ は明らかであるから， n_b が十分大きい場合についてのみ調べれば十分である．

$1 \leq l \leq 2n_b$ で定義される l を自然数 s によって奇数 $2s-1$ ($1 \leq s \leq n_b$) と偶数 $2s$ ($1 \leq s \leq n_b$) とに分けて考える． $z_{b2s-1}^{n_b}$ と $z_{b2s}^{n_b}$ はそれぞれに対応する複素数であって，正負の異なる純虚数となる．

$$z_{b2s-1}^{n_b} = i\sqrt{\frac{1-R_b}{1+R_b}}, \quad (I.1)$$

$$z_{b2s}^{n_b} = -i\sqrt{\frac{1-R_b}{1+R_b}}, \quad (I.2)$$

一方， $z_{b2s-1}^{n_a}$ と $z_{b2s}^{n_a}$ は等しい絶対値を持つが， s 毎に異なる偏角をもつ．

$$z_{b2s-1}^{n_a} = \left(\frac{1-R_b}{1+R_b}\right)^{n_a/2n_b} e^{(2s-1)n_a\pi i/n_b} e^{-n_a\pi i/2n_b}, \quad (I.3)$$

$$z_{b2s}^{n_a} = \left(\frac{1-R_b}{1+R_b}\right)^{n_a/2n_b} e^{(2s-1)n_a\pi i/n_b} e^{n_a\pi i/2n_b}. \quad (I.4)$$

両者に共通する複素数 $w_s = e^{(2s-1)\pi i/n_b}$ は $w_s^{n_b} + 1 = 0$ の根であって，単位円周上に等間隔に存在する． $w_s^{n_a}$ の n_b 乗は -1 となることから， $w_s^{n_a}$ もまた $w_s^{n_b} + 1 = 0$ の根である． n_a と n_b は互いに素な自然数であるため，全ての異なる整数 r と s ($1 \leq r < s \leq n_b$) の組み合わせにおいて $w_r^{n_a}$ と $w_s^{n_a}$ は異なる複素数となる．これは， $w_r^{n_a}$ と $w_s^{n_a}$ が等しいと仮定すると，偏角 $(2s-1)n_a\pi/n_b$ は n_a より小さな自然数 n によって $(2r-1)n_a\pi/n_b + 2\pi n$ とならなければならない．つまり $(s-r)n_a = nn_b$ が要請されるが，これは n_a と n_b が互いに素であることに反する．従って， $w_r^{n_a}$ と $w_s^{n_a}$ は異なる複素数でなければならない．このことは， $\{w_1^{n_a}, \dots, w_{n_b}^{n_a}\}$ のそれぞれが $\{w_1, \dots, w_{n_b}\}$ のいずれかと重複せずに対応できることを意味している．

$\{1, \dots, n_b\}$ の置換を自然数 p_s によって $\{p_1, \dots, p_{n_b}\}$ と定義すると， $z_{bl}^{n_a}$ に対してある置換 $\{p_1, \dots, p_{n_b}\}$ が

定まり, $z_{bl}^{n_a}$ は w_{p_s} によって表現できる.

$$z_{b2s-1}^{n_a} = \left(\frac{1-R_b}{1+R_b} \right)^{n_a/2n_b} w_{p_s} e^{-n_a \pi i / 2n_b} \quad \exists p_s \in \{1, \dots, n_b\}, \quad (\text{I.5})$$

$$z_{b2s}^{n_a} = \left(\frac{1-R_b}{1+R_b} \right)^{n_a/2n_b} w_{p_s} e^{n_a \pi i / 2n_b} \quad \exists p_s \in \{1, \dots, n_b\}. \quad (\text{I.6})$$

このとき, 留数の足し合わせ順序を p_s の順に並び替えることができる.

$$\begin{aligned} \langle a^* b \rangle &= \sum_{l=1}^{2n_b} \text{Res}_{z=z_{bl}} [a^* b z^{-1}] \\ &= \sum_{s=1}^{n_b} \text{Res}_{z=z_{b2s-1}} [a^* b z^{-1}] + \sum_{s=1}^{n_b} \text{Res}_{z=z_{b2s}} [a^* b z^{-1}] \\ &= \sum_{s=1}^{n_b} \text{Res}_o(w_{p_s}) + \sum_{s=1}^{n_b} \text{Res}_e(w_{p_s}) \\ &= \sum_{p=1}^{n_b} \text{Res}_o(w_p) + \sum_{p=1}^{n_b} \text{Res}_e(w_p), \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

ここに $\text{Res}_o, \text{Res}_e$ は w_p の関数であって, 以下のように表される.

$$\begin{aligned} \text{Res}_o(w_p) &= \frac{-\frac{2i\sqrt{R_a}}{1-R_a} \frac{\sqrt{R_b}}{n_b(1-R_b)} \left(\frac{1+R_b}{1-R_b} \right)^{(n_a-n_b)/2n_b} w_p e^{n_a \pi i / 2n_b}}{w_p^2 + \left(\frac{1+R_b}{1-R_b} \right)^{n_a/n_b} \frac{1+R_a}{1-R_a} e^{n_a \pi i / n_b}}, \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

$$\begin{aligned} \text{Res}_e(w_p) &= \frac{\frac{2i\sqrt{R_a}}{1-R_a} \frac{\sqrt{R_b}}{n_b(1-R_b)} \left(\frac{1+R_b}{1-R_b} \right)^{(n_a-n_b)/2n_b} w_p e^{-n_a \pi i / 2n_b}}{w_p^2 + \left(\frac{1+R_b}{1-R_b} \right)^{n_a/n_b} \frac{1+R_a}{1-R_a} e^{-n_a \pi i / n_b}}. \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

十分大きな n_b に対して w_p は単位円周 C 上に等間隔で密に分布する. $\text{Res}_o, \text{Res}_e$ は w_p に関して連続関数であることから, 留数の和に関する $n_b \rightarrow \infty$ の極限は以下のように C に沿ったリーマン積分に一致する.

$$\lim_{n_b \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{n_b} \text{Res}_o(w_p) = \frac{n_b}{2\pi i} \oint_C \text{Res}_o(w) w^{-1} dw \quad (\text{I.10})$$

この右辺の周積分は留数定理によって解析的に評価できる. ところが, $\text{Res}_o, \text{Res}_e$ いずれの極も単位円周内部に存在しない. このため, 十分大きな n_b に対してクロスタームは 0 となる.

$$\lim_{n_b \rightarrow \infty} \langle a^* b \rangle = 0. \quad (\text{I.11})$$

付録 II 2 層系における $\langle |ab|^2 \rangle$ の極限

z_{ak} の $2n_b$ 乗, および z_{bl} の $2n_a$ 乗はそれぞれ以下のように表される.

$$z_{ak}^{2n_b} = \left(\frac{1-R_a}{1+R_a} \right)^{n_b/n_a} e^{(2k-1)n_b \pi i / n_a} \quad k \in \{1, \dots, n_a\}, \quad (\text{II.1})$$

$$z_{bl}^{2n_a} = \left(\frac{1-R_b}{1+R_b} \right)^{n_a/n_b} e^{(2l-1)n_a \pi i / n_b} \quad l \in \{1, \dots, n_b\}. \quad (\text{II.2})$$

それぞれ複素数 $w_{ak} = e^{(2k-1)\pi i / n_a}$ および $w_{bl} = e^{(2l-1)\pi i / n_b}$ が含まれている. n_a, n_b が互いに素な自然数の場合, 付録 I で説明したように $w_{ak}^{n_b}, w_{bl}^{n_a}$ は $\{w_{a1}, \dots, w_{an_a}\}, \{w_{b1}, \dots, w_{bn_b}\}$ のいずれかにそれぞれ対応する. すなわち, $\{1, \dots, n_a\}, \{1, \dots, n_b\}$ に対応する置換 $\{p_1, \dots, p_{n_a}\}, \{q_1, \dots, q_{n_b}\}$ がそれぞれ存在して, $z_{ak}^{2n_b}$ と $z_{bl}^{2n_a}$ は次のように表される.

$$z_{ak}^{2n_b} = \left(\frac{1-R_a}{1+R_a} \right)^{n_b/n_a} w_{ap_k} \quad \exists p_k \in \{1, \dots, n_a\}, \quad (\text{II.3})$$

$$z_{bl}^{2n_a} = \left(\frac{1-R_b}{1+R_b} \right)^{n_a/n_b} w_{bq_l} \quad \exists q_l \in \{1, \dots, n_b\}. \quad (\text{II.4})$$

付録 I と同様の手順によって留数の和を取る順序を p_k および q_l の順に並べ直すと, 全ての極が 1 位の極である場合, $\langle |ab|^2 \rangle$ を以下のように計算することが出来る.

$$\langle |ab|^2 \rangle = 2 \sum_{p=1}^{n_a} \text{Res}_a(w_{ap}) + 2 \sum_{q=1}^{n_b} \text{Res}_b(w_{bq}), \quad (\text{II.5})$$

ここに, $\text{Res}_a, \text{Res}_b$ はそれぞれ w_{ap}, w_{bq} の関数であって以下のように導かれる.

$$\begin{aligned} \text{Res}_a(w_{ap}) &= \frac{\frac{2R_b}{n_a(1-R_b^2)} \left(\frac{1+R_a}{1-R_a} \right)^{n_b/n_a} w_{ap}}{\left[w_{ap} + \frac{1+R_b}{1-R_b} \left(\frac{1+R_a}{1-R_a} \right)^{n_b/n_a} \right] \left[w_{ap} + \frac{1-R_b}{1+R_b} \left(\frac{1+R_a}{1-R_a} \right)^{n_b/n_a} \right]}, \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

$$\begin{aligned} \text{Res}_b(w_{bq}) &= \frac{\frac{2R_a}{n_b(1-R_a^2)} \left(\frac{1+R_b}{1-R_b} \right)^{n_a/n_b} w_{bq}}{\left[w_{bq} + \frac{1+R_a}{1-R_a} \left(\frac{1+R_b}{1-R_b} \right)^{n_a/n_b} \right] \left[w_{bq} + \frac{1-R_a}{1+R_a} \left(\frac{1+R_b}{1-R_b} \right)^{n_a/n_b} \right]}. \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

全ての極が 1 位の極である場合 $\left(\frac{1-R_a}{1+R_a} \right)^{1/2n_a} \neq \left(\frac{1-R_b}{1+R_b} \right)^{1/2n_b}$ であるため, 極が単位円周 C 上に存在することはない.

十分大きな n_a に対して, 式 (II.5) の 1 項目の留数の

和は C 上の周積分として評価できる．

$$\lim_{n_a \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{n_a} \text{Res}_a(w_{ap}) = \frac{n_a}{2\pi i} \oint_C \text{Res}_a(w) w^{-1} dw. \quad (\text{II.8})$$

Res_a の極は 2 つ存在し，一方は常に単位円周外に位置するが，もう一方は以下の条件において単位円周内に位置する．

$$\left(\frac{1+R_a}{1-R_a} \right)^{n_b} \left(\frac{1-R_b}{1+R_b} \right)^{n_a} < 1. \quad (\text{II.9})$$

式 (II.9) を満たす場合に周積分の値は以下のように有限値に収束し，極が全て単位円周外に位置する場合には周積分値は 0 となる．

$$\lim_{n_a \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{n_a} \text{Res}_a(w_{ap}) = \frac{n_a}{2\pi i} \frac{\pi i}{n_a} = \frac{1}{2}, \quad (\text{II.10})$$

十分大きな n_b に対して，式 (II.5) の 2 項目の留数とを同様に評価することが出来る．2 項目が有限値に収束する条件は

$$\left(\frac{1-R_a}{1+R_a} \right)^{n_b} \left(\frac{1+R_b}{1-R_b} \right)^{n_a} < 1, \quad (\text{II.11})$$

であって，その値は次の通りである．

$$\lim_{n_b \rightarrow \infty} \sum_{q=1}^{n_b} \text{Res}_b(w_{bq}) = \frac{1}{2}. \quad (\text{II.12})$$

式 (II.9) および (II.11) で表される条件を同時に満たすことはないため， n_a と n_b が同時に十分大きな値を取る場合，式 (II.5) の 1 項目，2 項目の一方の項が $1/2$ となり，もう一方は必ず 0 となる．このことから，式 (II.9) および (II.11) の条件によらず， $\langle |ab|^2 \rangle$ は結果として 1 を取ることが分かる．

$$\lim_{n_a, n_b \rightarrow \infty} \langle |ab|^2 \rangle = 2 \left(\frac{1}{2} + 0 \right) = 1. \quad (\text{II.13})$$

十分大きな n_a と有限な n_b の場合には， $(1-R_b/1+R_b)^{n_a}$ が 0 に収束することから式 (II.9) の条件を常に満たす．このことから，式 (II.5) の 1 項目は $1/2$ となる．また， $(1-R_b/1+R_b)^{n_a/n_b}$ が 0 に収束することから Res_b は 0 に収束し，2 項目は 0 となる．十分大きな n_b と有限な n_a の場合についても同様である．従って，以下のように n_a および n_b のみが十分大きな場合についても $\langle |ab|^2 \rangle$ は 1 に収束する．

$$\lim_{n_a \rightarrow \infty} \langle |ab|^2 \rangle = 1, \quad (\text{II.14})$$

$$\lim_{n_b \rightarrow \infty} \langle |ab|^2 \rangle = 1. \quad (\text{II.15})$$

$|ab|^2 z^{-1}$ に 2 位の極が存在する場合について考える．2 位の極は

$$z_2 = \pm i \left(\frac{1-R_a}{1+R_a} \right)^{1/2n_a} = \pm i \left(\frac{1-R_b}{1+R_b} \right)^{1/2n_b}. \quad (\text{II.16})$$

図-14 ランダムに生成した 500 地盤モデルに対応する $\langle a \rangle$ の値（上：3 層系，下：4 層系）

に位置し，対応する留数は以下のように与えられる．

$$\text{Res}_{z=z_2} [|ab|^2 z^{-1}] = \frac{1-n_a-n_b}{2n_a n_b} + \frac{1+R_a^2}{8n_a R_a} + \frac{1+R_b^2}{8n_b R_b}. \quad (\text{II.17})$$

十分大きな n_a と n_b において，上の留数は明らかに 0 となる．2 位の極は唯一であるため，対応する留数の値は 0 に収束する．従って，1 位の極のみが存在する場合と同様に，1 位の極による留数の和のみを議論すればよい．ただし，2 位の極が存在する場合， Res_a や Res_b において存在する単位円周上の特異点について Cauchy の主値として評価しなければいけないことに留意する必要がある．

$$\lim_{n_a \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{n_a} \text{Res}_a(w_{ap}) = \frac{n_a}{2\pi i} \text{p.v.} \oint_C \text{Res}_a(w) w^{-1} dw. \quad (\text{II.18})$$

十分大きな n_a と n_b に対して， Res_a と Res_b に関する積分値は両者とも $1/4$ となる．従って，この和をとることで $\langle |ab|^2 \rangle$ は 1 となる．すなわち，2 位の極が存在する場合においても十分大きな n_a と n_b において 1 に収束する．

付録 III $\langle a \rangle$ の性質

2 層系の場合， a の周波数平均である $\langle a \rangle$ は解析的に積分可能である． $z = e^{i\omega h_a/\beta_a}$ を用いて a は以下のよう表される．

$$a = \frac{2\sqrt{R_a}}{1+R_a} \frac{z}{z^2 + \frac{1-R_a}{1+R_a}}. \quad (\text{III.1})$$

a は ω に関して周期 $2\pi\beta_a/h_a$ を持つ周期関数であるため，周波数平均を複素平面上の単位円周 C 上の積分に

書き換えることが出来る．

$$\langle a \rangle = \frac{1}{2\pi\beta_a/h_a} \int_0^{2\pi\beta_a/h_a} a d\omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\frac{2\sqrt{R_a}}{1+R_a}}{z^2 + \frac{1-R_a}{1+R_a}} dz. \quad (\text{III.2})$$

被積分関数は単位円内部に2つの極をもち、それぞれに対応する留数は $\frac{1}{i}\sqrt{\frac{R_a}{1-R_a^2}}$, および $-\frac{1}{i}\sqrt{\frac{R_a}{1-R_a^2}}$ である．すなわち、 $\langle a \rangle$ は0となる．

3層系、および4層系の場合については解析的に積分できないため、ランダムに生成した500の地盤モデルについて数値的に計算して求める．各モデルの表層と基

盤のS波速度と密度は10-700 m/s , 1000-2000 kg/m³ の一様乱数からサンプルして設定する．表層の全層厚は1-50 m の一様乱数からサンプルし、層数に応じてランダムに分割する．積分計算は0.1 s⁻¹ 毎に 1.0×10^7 s⁻¹ までの角周波数について数値積分を行い評価した．

図-14 は3層系、および4層系の場合における $\langle a \rangle$ の絶対値をサンプル毎に示したものである．地盤モデルの物性値に関わらず全てのケースにおいて0に十分近い値を示しており、このことから3層系、および4層系においても $\langle a \rangle$ が0をとることが期待される．

(2013年3月18日 受付)