自然河川の水理解析における一般座標格子が有する 打切り誤差の理論的評価とその緩和手法

Study on Truncation Error in General Coordinate System
and Optimized Grid Generation for Natural Rivers

星野 剛*・安田 浩保**

Tsuyoshi HOSHINO and Hiroyasu YASUDA

*修士 (工学) 新潟大学大学院 自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050)

**博士 (工学) 新潟大学准教授 災害・復興科学研究所 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050)

Grid structures of the general curvilinear coordinate system with gross distortions have never given solutions of the hydraulic equation even under accurately computations. A relationship between a quality of the grid structure and a stability of computations has not quantitatively investigated. This study shows that a estimation method for truncation error of metrics of the grid structure and the method can detect instability of solution without numerical computation. An optimization method for the grid structures with the elliptic partial differential equation can effectively reduce the truncation error and derive physical solution.

Key Words : *truncation error, metrics, general curvilinear coordinate system, numerical grid generation*

1. はじめに

境界適合に一般座標を導入した河川の流況や河床変動の解析法は、格子構成の自由度の高さから解析対象の飛躍的な拡張に多大な貢献を果たしてきた。この数値解析法は、精密な水理モデルと適切な格子構成が一对となつてはじめて性能が最大化される。水理モデルとしての研究は、これまでに高精度の差分スキームの導入や高次の物理項の導入などを中心に行われてきた。一方で、対になる格子の生成法は、水理モデルの高度化とは独立に行われてきた。しかし、水理モデルと格子生成法の交点である格子構成の良否と解の応答特性は、数値解析の信頼性に根幹的な影響を及ぼすにもかかわらず踏み込んだ研究が行われることはなかった。そのため、両者の関心が十分に交わることなく現在に至り、学問的な空白域のままとなっている。

境界適合の対象の幾何学形状が複雑なほど一般座標による境界適合が不可欠となる。直交格子からのそれぞれの格子の歪曲の度合はメトリックスにより規定される。数値計算におけるメトリックスの計算は、水理の支配方程式と同様に差分計算されるため、Taylor 展開に由来する打切り誤差が不可避なことに細心の注意を払わなければならない。例えば、メトリックスの打切り誤差が大きな格子構成においては、数値的な水理計算をどれだけ厳密に行っても方程式を満たす解が得られない。また、一般座標による格子構成には無限のパターンが原理的に存在するものの、格子構成に由来する打切り誤差が原因となり、それらから一意の解が

得られないことは、重大な問題として広く認識されるべきである。

安定に解を得るためには歪曲が小さく滑らかな格子構成が経験的に優れているとされ、滑らかな格子の生成法は Thompson ら¹⁾により体系化されたことはよく知られた事実である。しかし、彼らのものをはじめとする格子生成法がメトリックスの打切り誤差の緩和に効果を発揮することが予見されるにもかかわらず、このようにして得られた格子構成と水理計算の安定性の対応関係について理論的な根拠が過去に示されたことはないようである。著者らは、このために、Thompson らなどの格子構成法が有効に活用されず、例えば河川の流況解析では格子構成の理論的条件から乖離した格子構成が散見される実状に繋がっていると考えている。また、近年では計算機の性能の向上に伴い、細分化された格子構成を用いた詳細な水理の把握が試みられている。しかしながら、空間的な離散間隔の短縮は座標変換に伴う打切り誤差の緩和に直結しない。そのため、計算機性能が向上した現在においてもなお格子構成に由来する打切り誤差に関する研究への潜在的な需要は高いと考えられる。

本研究では、上述までの問題の明確化と解決のため、まず、Thompson らが示した平面 2 次元における一般座標の格子構成が内包する打切り誤差の定量的な算定法を自然河川の水理解析向けに拡張し、メトリックスの打切り誤差が水理解析に与える影響について考察する。また、打切り誤差を緩和するための格子整正法の効果についても論じる。

図-1 計算点の不等間隔に起因する打ち切り誤差（計算点が等間隔で配置されている場合、右図に示すように x と ξ の関係は 1 次関数となり、2 階以上の微分項は 0 となる。そのため打ち切り誤差は生じない。一方、不等間隔の場合は i 上で計算点間隔が切り替わるため、右図からもわかるように i 上では 2 階以上の微分項は 0 とならず、打ち切り誤差が発生する。）

2. メトリックスの打ち切り誤差

2.1 1 次元打ち切り誤差

はじめに簡単のため 1 次元の座標変換

$$f_x = \frac{f_\xi}{x_\xi} \quad (1)$$

が行われたときの関数値 f の 1 階の微分の差分計算を考える。ここで、 x は物理面の座標、 ξ は計算面の座標である。計算面の離散間隔を 1 として中央差分を考え

$$f_x = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (2)$$

なる差分式を得る。

この式を Taylor 展開と対比すると、 f_x が近似的に計算されているだけで明らかに f_{xx} より高次の項を完全に無視した計算に等しいことが分かる。 f_{xx} より高次の項は、 f の曲率が大きかったり離散間隔が広く設定されている場合に重要な役割を果たし、このような条件のもとでは解析結果に対して打ち切り誤差は少なからず影響を及ぼす。

ここで、 f_{i+1}, f_{i-1} を Taylor 展開したのちに式 (2) に代入すると打ち切り誤差として

$$T = -\frac{1}{2}x_{\xi\xi}f_{xx} - \frac{1}{6}x_{\xi\xi}^2f_{xxx} + O(\Delta\xi^3) \quad (3)$$

が得られる。右辺の第 1 項は図-1 に示すように計算点間隔が不規則の場合に現れるものである。座標変換を要さない通常の中央差分の打ち切り誤差は右辺第 2 項以降の高次の誤差項が出現する 2 次精度の差分法であることは周知の事実である。しかし、座標変換により中央差分における誤差は右辺の第 1 項を内包しており、計算点間隔の変化率が大きいほど、打ち切り誤差量が増大する。また、右辺第 1 項は誤差を集中させる負の拡散項と成り得ることから計算点間隔を不用意に増減させることが得策でないことが分かる。

なお、以降では断りが無い限り、計算点配置に由来

図-2 一般座標格子における軸と座標の対応関係

する打ち切り誤差をすべて「打ち切り誤差」と称する。

2.2 2 次元打ち切り誤差

2 次元における 1 階の微係数の一般座標変換は周知のとおり

$$f_x = \frac{1}{J} [y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta] \quad (4)$$

$$f_y = \frac{1}{J} [-x_\eta f_\xi + x_\xi f_\eta] \quad (5)$$

のように与えられる。ここで、 x, y は物理面の座標、 ξ, η は計算面の座標、両者の間には $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ 、また $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ の対応関係があるものとする。 J は変換のヤコビアンで $x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ である。

f_η, f_ξ をそれぞれ Taylor 展開し、式 (4) に代入すると中央差分における誤差式

$$T_x = \frac{1}{2J} [(y_\xi x_\eta x_{\eta\eta} - y_\eta x_\xi x_{\xi\xi}) f_{xx} + (y_\xi y_\eta y_{\eta\eta} - y_\eta y_\xi y_{\xi\xi}) f_{yy} + \{y_\xi(x_\eta y_{\eta\eta} + y_\eta x_{\eta\eta}) - y_\eta(x_\xi y_{\xi\xi} + y_\xi x_{\xi\xi})\} f_{xy}] + O(\Delta\xi^3, \Delta\eta^3) \quad (6)$$

が得られることを Thompson ら¹⁾は示している。同様に y 方向の式 (5) に代入すると式 (7) が得られる。

$$T_y = \frac{1}{2J} [(-x_\xi x_\eta x_{\eta\eta} + x_\eta x_\xi x_{\xi\xi}) f_{xx} + (-x_\xi y_\eta y_{\eta\eta} + x_\eta y_\xi y_{\xi\xi}) f_{yy} + \{-x_\xi(x_\eta y_{\eta\eta} + y_\eta x_{\eta\eta}) + x_\eta(x_\xi y_{\xi\xi} + y_\xi x_{\xi\xi})\} f_{xy}] + O(\Delta\xi^3, \Delta\eta^3) \quad (7)$$

ここで、 T_x, T_y はそれぞれ式 (4), (5) が内包する打ち切り誤差である。これらの打ち切り誤差は合計で 8 種のメトリックスから構成され、式 (3) と同様に誤差を集中させる負の 2 階微分と成ることに注意が必要である。

2.3 自然河川に対応した打ち切り誤差式

自然河川を対象とした一般座標の格子構成の特徴は図-2 に示すように河道の流下方向に平行となる格子軸（以降 i 軸とする）とこれに交差する河道の横断方向の格子軸（以降 j 軸とする）により構成される。上述した誤差評価式 (6), (7) は f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} の 3 種類の物理量の 2 階微分項を含んでいるため、これらの式から直接的な

誤差量の評価は困難である．そこで2階微分項を i 方向と j 方向に分けて表現することを考え，新たに x 軸と i 軸のなす角 θ_i ， x 軸と j 軸のなす角 θ_j を導入する． i 軸方向や j 軸方向にのみ物理量の2階微分値 f_{ii} が存在する場合， f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} は以下のように記述できる．

$$(f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}) = (\cos^2 \theta_i, \sin^2 \theta_i, \frac{1}{2} \sin 2\theta_i) f_{ii} \quad (8)$$

これを式(6),(7)に代入すると i 軸方向の誤差量 $\mathbf{T}_i$ は

$$\mathbf{T}_i = \left[\begin{pmatrix} T_{x1} \\ T_{y1} \end{pmatrix} \cos^2 \theta_i + \begin{pmatrix} T_{x2} \\ T_{y2} \end{pmatrix} \sin^2 \theta_i + \begin{pmatrix} T_{x3} \\ T_{y3} \end{pmatrix} \frac{\sin 2\theta_i}{2} \right] f_{ii} \quad (9)$$

と書ける．

同様に j 軸方向のみに f_{jj} が存在する場合， f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} と誤差量 $\mathbf{T}_j$ は以下のように記述できる．

$$(f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}) = (\cos^2 \theta_j, \sin^2 \theta_j, \frac{1}{2} \sin 2\theta_j) f_{jj} \quad (10)$$

$$\mathbf{T}_j = \left[\begin{pmatrix} T_{x1} \\ T_{y1} \end{pmatrix} \cos^2 \theta_j + \begin{pmatrix} T_{x2} \\ T_{y2} \end{pmatrix} \sin^2 \theta_j + \begin{pmatrix} T_{x3} \\ T_{y3} \end{pmatrix} \frac{\sin 2\theta_j}{2} \right] f_{jj} \quad (11)$$

ここで式(6)の f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} に関する項の係数をそれぞれ T_{x1}, T_{x2}, T_{x3} とする．式(7)に関しても同様に T_{y1}, T_{y2}, T_{y3} とした．

$\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j$ は座標変換のない片側差分の打ち切り誤差量である $\pm \Delta x f_{xx}$ のように物理空間における長さの次元を有している．そのため物理空間における計算格子間隔に応じて誤差量が増減する．また， $\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j$ は物理量の2階微分項が積となっていることから解析対象の物理現象に応じて大きさが異なる．格子構成のみに起因する誤差量を把握することが本研究の狙いである．そのため以降は次式に示す物理空間における計算格子間隔と物理量の2階微分 f_{ii}, f_{jj} で除して無次元化した誤差評価式により格子構成の良否を評価した．

$$\mathbf{T}'_i = \frac{\mathbf{T}_i}{\Delta i f_{ii}} \quad (12)$$

$$\mathbf{T}'_j = \frac{\mathbf{T}_j}{\Delta j f_{jj}} \quad (13)$$

ここで Δi は i 軸上の計算点間の距離であり， $\Delta i = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}$ ， $\Delta j = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2}$ で表される．次章以降における格子の良否判定には著者らによって新たに導入された誤差評価式(12),(13)を用いた．なお，その際の各メトリックスの算出には中央差分を用いた．

3. 水理解析における格子構成に由来する打ち切り誤差

本章ではメトリックスの打ち切り誤差と水理解析との対応関係について考察するため，直線水路と蛇行水路の水理計算を実施した．

なお，本研究では平面2次元浅水流方程式による水理解析を対象とするが，議論対象の格子構成に由来する打ち切り誤差は，いかなる支配方程式においても無限の概念を取込めない数値解析では不可避となる．特に，自然地形を一般座標により境界適合すると，解析の対象領域が幾何学的に複雑であればあるほど打ち切り誤差から免れることが難しくなる．そのため，以降において論じる打ち切り誤差の評価および格子の誤差緩和手法は支配方程式によらず有効である．

3.1 水理解析モデル³⁾

水理計算には iRIC に同梱される平面2次元ソルバーである Nays2D を用いた．このソルバーの基礎式を以下に示す．流れの支配方程式は，水深方向に積分された流速を用いる以下に示す浅水流方程式である．

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = -gh \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho} + D^x \quad (14)$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} = -gh \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\tau_y}{\rho} + D^y \quad (15)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\tau_x}{\rho} = C_d u \sqrt{u^2 + v^2} \quad (17)$$

$$\frac{\tau_y}{\rho} = C_d v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (18)$$

$$D^x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \frac{\partial(uh)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial(uh)}{\partial y} \right) \quad (19)$$

$$D^y = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \frac{\partial(vh)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial(vh)}{\partial y} \right) \quad (20)$$

式(14)(15)はデカルト座標系 (x, y) における2次元浅水流方程式を表しており，また式(16)はデカルト座標系における流れの連続の式を表している．ここで， u は x 方向流速， v は y 方向流速， h は水深， H は水位， g は重力加速度， ρ は流体密度， τ_x は x 方向底面剪断力， τ_y は y 方向底面剪断力， ν_t は動粘性係数を表す．ただし，以下に実施した数値計算では上式を一般座標系に変換したものをを用いている．詳細は参考文献³⁾を参照されたい．

(a) 乱数格子 (i 軸方向)

(b) 等分割内挿格子

(c) ラプラス方程式による誤差緩和格子

(d) 乱数格子 (j 軸方向)

(e) 段階的な交差角変動格子

図-3 直線水路の格子構成

3.2 直線水路における数値実験

本章では様々な格子構成された直線水路における2次元解析を実施し、式(12),(13)から算出される格子構成に由来する誤差量と水理解析において出現する誤差量との対応関係を調べた。

(1) 数値実験の条件

数値実験の対象としたのは等流条件が成り立つ一様勾配、一様水路幅の直線水路とした。水路の形状は全長1000m、水路幅200m、水路勾配1/1000、粗度係数0.02とした。境界条件は、上流端に2000m³/s、下流端に等流水深3.02mを与えた。

以下の水理計算はNays2Dを用い、移流計算は風上差分法とし、計算は20000秒まで行った。クーラン数は0.01となるように Δt を設定した。

計算格子は流下方向に30分割、横断方向に6分割とした正方格子を基本とし、これに種々の変更を加えた格子を用いた水理解析を実施した。

(2) 格子の分布間隔に着目した数値実験

(a) i 軸方向の乱数格子：まず問題を単純にするために T'_i のみが存在する図-3(a)に示した j 軸を乱数を用いて不均一に配置した格子において水理解析を行う。乱数の強度は $r = 0.1, 0.3, 0.5$ の3パターンとし、その時の計算点間隔は $\Delta \bar{x}$ を平均格子辺長とし、 $(1-r)\Delta \bar{x} < \Delta x < (1+r)\Delta \bar{x}$ の範囲でランダムに配置した。

式(12)によって評価した縦断的な打ち切り誤差分布と解析結果の水深を図-4(a)に示す。この結果から乱数の強度が大きくなるにつれ、打ち切り誤差および解析結果の等流水深からのずれが増大することがわかる。 $r = 0.5$ の場合においては水面の逆勾配の複数箇所での発生や収束解が得られない結果となった。打ち切り誤差量と解析結果との対応関係に着目すると $|T'_i|$ の大きい箇所では水深のずれが大きく、メトリックスの打ち切り誤差が水理解析に対して重大な誤差要因となることがわかる。

なお、下流端近傍で収束することのない水面の振動が発生した。これは、境界条件が強制水位条件であることに加え、下流端近傍で格子構成に由来する不安定性の発生要因が存在しているため、下流端での境界条件が一種の反射境界と同じ効果を果たしたためと推測される。

(b) 等分割内挿格子：差分法においては離散間隔をできるだけ短縮することが適当な解を得るためには一般に望ましいとされる。ここではその考え方に則り、先ほどの格子において、すべての離散間隔を半減するように格子軸を i 軸、 j 軸ともに追加した。格子構成を図-3(b)に、メトリックスの打ち切り誤差と解析結果を図-4(b)に示す。

図-4(b)左に示すように格子軸を追加した箇所では離散間隔が均一となりメトリックスの打ち切り誤差は0となるものの、それ以外の箇所では離散間隔の変化率が変わらないため同量の打ち切り誤差が残存する。図-4(b)右に示す解析結果においても離散間隔の短縮前と比べ同様の水深分布が得られた。この結果から離散間隔の単純な短縮は打ち切り誤差の緩和をもたらさないことが明らかである。

(c) ラプラス方程式による誤差緩和格子：Thompsonらは楕円型偏微分方程式による格子構成に由来する打ち切り誤差の緩和手法を提案している。ここでは次式に示すラプラス方程式によって図-3(a)の格子の誤差緩和を試みた。

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0 \quad (21)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0 \quad (22)$$

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (23)$$

$$\beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \quad (24)$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \quad (25)$$

格子構成を図-3(c)に示す。この格子構成からわかるようにラプラス方程式によって格子の離散間隔の変化率が流心に近づくとともに減少している。境界値問題として解かれる楕円型偏微分方程式の特徴上、横断方向の境界縁近傍では離散間隔の緩和度は低いものの、図-4(c)に示す流心の打ち切り誤差に着目すると、図-4(a)と比べ大幅に減少していることがわかる。

解析結果においても流心上では等流水深からのずれはいずれも小さくなり、最も打ち切り誤差の大きい乱数

図-4 解析結果，メトリックスの打ち切り誤差

強度 0.5 の格子においても誤差は図-4(a) の乱数強度 0.1 の格子と同程度となった。ただし、横断方向境界線上では打ち切り誤差はほとんど緩和されておらず、依然として等流水深からの乖離が確認できる。この結果から楕円型偏微分方程式によるメトリックスの打ち切り誤差の緩和手法は境界から離れた箇所においては効果が期待できるものの、境界縁近傍での誤差緩和に対しては大きな効果は期待できないことがわかる。

(d) j 軸方向の乱数格子：ここまでは (12) の i 軸方向の打ち切り誤差量 T'_i に着目し、数値実験を行ってきた。ここでは式 (13) の j 軸方向の打ち切り誤差量 T'_j の影響について把握を試みる。この数値実験に用いた格子構成を図-3(d) に示す。これは (a) と同様の乱数強度を用

いて i 軸を配置した格子構成である。 j 軸方向の打ち切り誤差量 T'_j は図-4(a) の T'_i に相当するものの、 i 軸方向の計算点が等間隔であることから T'_i は生じない。

解析結果はいずれの乱数強度においても等流水深を得ることができ、 T'_j の影響はみられなかった。この計算条件においては j 軸方向のエネルギー勾配が 0 となるため T'_j が解析結果に影響しなかったと判断できる。また、この結果から扱う水理現象の i 軸方向と j 軸方向のエネルギー勾配の大きさの比によって T'_i と T'_j が解析結果に与える影響度が異なることが推測される。

(3) 格子の交差角の変化率に着目した数値実験

前述の楕円型偏微分方程式による打ち切り誤差の緩和手法は計算点の離散間隔の変化率の緩和に対して効果

表-1 実験水路の諸元

水路長	22.5 m	蛇行波長	4.1 m
全水路幅	2.2 m	蛇行長	4.8 m
低水路幅	0.5 m	蛇行度	1.17
低水路床	平坦固定床	最大偏角	41°
水路床勾配	1/600	流量	8.3 l/s

的な寄与が期待できるものの、格子の直交性は保証されず、隣接する格子間で連続的で滑らかな交差角の変化をもたらす。ここでは格子の交差角の変化が水理解析に及ぼす影響について把握するために図-3(e)に示すよう滑らかに交差角の変動する格子による数値実験を行った。格子構成は i 軸をすべて平行とし、 j 軸のみを上流端で30, 45, 60°となるように変化させた。なお、上流端から500mの範囲では j 軸の角度は変更せず、下流端から500mの範囲で等比級数を用いて滑らかに交差角度を変化させた。

図-4(e)に示すように、水路の上流側半分では $x_{\xi\xi}$, $x_{\eta\eta}$, $y_{\xi\xi}$, $y_{\eta\eta}$ などの2階の微係数が0となるため式(6), (7)に代入するとわかるように格子由来の打ち切り誤差は生じない。下流側半分においては j 軸の角度変化に伴い2階の微係数が生じるものの、その値は小さく打ち切り誤差 T'_i も最大で0.05程度となる。

解析結果は T'_i の大きい水路中心部の前後でわずかな誤差が生じるものの、いずれも等流水深を良好に再現した。この結果から、楕円型偏微分方程式がもたらす交差角の連続的で滑らかな変化は水理解析において大きな問題とならないと判断できる。

3.3 蛇行水路における数値実験

前項では i 軸方向の流れのみが生じる単純化した数値実験により打ち切り誤差の影響を確認した。ここでは自然河川の水利状態を模擬した蛇行水路実験における数値実験を行った。

(1) 実験条件と手順

数値実験の対象は福岡ら⁴⁾の行った蛇行水路実験とした。この実験条件を表-1に示す。実験における観測水位は図-5(a)であり、横断方向の水面勾配が生じる実際の自然河川の流れ場に近い水利条件である。

はじめに水路実験に対する水利モデルの適用性を明らかにするためにSine-Curveに基づいて生成した格子において再現計算を行った。次に打ち切り誤差の影響とその緩和手法の効果を明らかにするために種々の変形を加えた格子構成を用いた再現計算を行った。

(2) 水利モデルの適用性の検討

Sine-Curveに基づき生成した格子を図-5(b)に示す。この格子は実験水路の流心と一致するSine-Curveの法線方向に等間隔に計算点を配置しており、計算点の離

図-5 再現計算によるモデルの適用性の把握

散間隔の変化率が領域全体で小さいため、格子構成由来の打ち切り誤差はほとんど生じない。

再現計算の結果を図-5(c)に示した。概ね実測値の水位を良好に再現しており、本解析に用いた水利モデルが適切な格子構成においては実験の再現が可能であることを確認した。

(3) T'_i に着目した再現計算

打ち切り誤差量 T'_i が蛇行水路の水理解析に及ぼす影響を調べるために図-6(a)i)左に赤線で示したようにSine-Curveに基づく格子に j 軸を一本追加し、局所的に T'_i を生じさせた格子構成において再現計算を行った。 j 軸の追加は1波長の線対称部においても同様に言い、そこで生じた打ち切り誤差量を図-6(a)i)右に示した。このような i 軸上の計算点の間隔が不均一となる格子構成は次章で述べる実河川の測量測線に基づく格子にしばしばみられる特徴である。

この格子における解析結果の水位コンターを図-6(a)ii)に示し、流心での縦断的な水位を図-7に示した。この結果から T'_i が大きい箇所においては局所的な水面勾配の増減がみられ、打ち切り誤差に応答した数値解となっていることがわかる。

(4) T'_j に着目した再現計算

同様に i 軸を追加し、 T'_j を生じさせた格子で再現計算を行った。図面は割愛するが、計算結果は前述した直線水路の結果と同様で実測値からの大きな相違は確認されず、蛇行水路の水理解析においては流下方向の打ち切り誤差 T'_i が大きな影響を及ぼすことが確認された。

図-6 格子構成，メトリックスの打ち切り誤差，解析結果

図-7 流心での縦断水位

(5) ラプラス方程式による打ち切り誤差の緩和

図-6(a) の格子を前述した式 (21) から (25) のラプラス方程式により，打ち切り誤差の緩和を行った．格子構成は図-6(b)i) に示すようになり，打ち切り誤差は流心に近づくにつれ減少し，打ち切り誤差の最大値は 0.33 から 0.1 へと減少している．

解析結果は追加された j 軸周辺の水面勾配の不連続が大幅に緩和されており，流心付近ではラプラス方程式の効果が確認できる．しかし，境界線近傍では依然として水面勾配の不連続が存在し，打ち切り誤差は残存したままである．

(6) 境界線計算点の調整による打ち切り誤差の緩和

図-6(b)i) に示す打ち切り誤差量は横断方向の境界線近傍で大きくなっている．この原因は前項で述べたように境界値問題として扱う楕円型偏微分方程式では境界線上の計算点間隔の変化率が緩和されないことが要因である．そこで図-8 に示すように境界線上で計算点間隔を調整した後にラプラス方程式による誤差緩和を試みた．ここでは計算点間隔の変化率は 10% 以内となるように計算点を再配置した．

その結果得られる格子構成は図-6(c)i) のようになり，境界線部から内部までのすべての計算点間隔が滑らかに変化していることが確認できる．打ち切り誤差量 T'_i の最大値も 0.03 まで減少した．解析結果においても，打ち切り誤差を起因とする局所的な水面勾配の不連続も緩和され，境界線計算点の再配置は打ち切り誤差を緩和する格子整正法として極めて有効であることが明らかとなった．

4. 自然河川の水理解析における打ち切り誤差

実河川の蛇行部を対象にして一般座標の格子構成が有するメトリックスの打ち切り誤差の空間分布を示し，水理解析における解の妥当性と安定性について論じる．さ

図-8 境界線上 ($j = 1, j = jend$) 上の計算点再配置

らに、実河川の水理解析における楕円型偏微分方程式の効果を考察し、メトリックスの打ち切り誤差を緩和した自然河川の一般座標格子の整正法について提案する。

4.1 解析対象と水理条件

水理解析の対象は新潟県長岡市を貫流する塩谷川の河口から5kmから7kmの区間とした。この区間は山間部に位置しており、平均河床勾配は1/250程度である。河道形状は曲率の大きい連続した蛇行部を有しており、手作業の試行錯誤により誤差を抑制した格子を生成することは困難なことが予想される。この計算領域において種々の変更を加えた格子に洪水時流量 $650\text{m}^3/\text{s}$ を上流端境界条件とし、下流端には実測の水位57.5mを横断方向に一樣に与え続けた定常計算を実施した。河道内の標高は面的な構造型標高データを横断測線から内挿することで生成し、いずれの格子の計算点においても与えた。

測量測線を出発点とし生成した各格子構成とその打ち切り誤差量を図-9に解析結果の縦断的な水位分布を図-10に示した。なお、前章で確認したように蛇行流路においても打ち切り誤差量は T'_j よりも T'_i の影響が大きいと、ここでは打ち切り誤差量は T'_i のみで評価した。

4.2 測量測線に基づく格子構成における誤差特性

実河川の幾何学形状を一般座標により境界適合する場合、河道測量の際に設定された測線を基準にした格子構成が一般的な方法である。塩谷川は河道改修部、橋脚の設置箇所、洪水後の断面変化が顕著な箇所に測量測線が追加されており、解析対象領域では測量測線は不等間隔となっている。測量測線に基づき、図-9(a)左に示す計算格子を生成した。図-9(a)右にはこの格子の誤差量 T'_i の分布図を示した。図中の丸の大きさは誤差量を表しており、この格子は蛇行が連続する中流部において計算点間隔の変化率が大きいと、それに伴い打ち切り誤差量が大きくなることとわかる。

図-10に示す流心での縦断水位に着目すると、この河道は平均河床勾配は1/250と大きいにも関わらず水面が逆勾配となる箇所が複数みられた。そのうえ、定常条件を与えたにもかかわらず下流では水面の振動が収束せず、前章で示した打ち切り誤差が大きい格子を用いた直線水路の数値実験と同様の結果となった。

時間平均した水位は水面の振動が小さい上流端から800m付近においても水面の逆勾配が確認でき、水理学的に妥当な解が得られなかった。打ち切り誤差が顕著である上流から1500m付近では解析結果の水面の振動は平均的な水深4mに対して振幅が最大で6m程度となり、実河川の水理解析において打ち切り誤差が解に重大な影響を与えることがわかる。

4.3 等分割内挿格子における誤差特性

測量測線に基づく格子を等分割するように格子軸を内挿した格子構成を図-9(b)に示す。打ち切り誤差は同図(a)と同様に大きく、水理解析においても水面の大きな不連続や定常解が得られない結果となった。これは直線水路の等分割内挿格子でみられた傾向と同様であり、離散間隔の短縮は打ち切り誤差の緩和に直結せず、発想が根本的に異なる打ち切り誤差の緩和手法が要求されることを示唆している。

4.4 楕円型偏微分方程式による打ち切り誤差の緩和

前章で述べた楕円型偏微分方程式による打ち切り誤差の緩和法を図-9(a)の測量測線に基づいて生成した格子に対して適用し、その影響について調べた。さらに、境界線近傍での格子間隔の調整が可能なポアソン方程式による格子整正法を導入し、自然河川の水理解析に適した一般座標格子の誤差緩和手法について述べる。

(1) ラプラス方程式による誤差緩和

図-9(c)に示すラプラス方程式による誤差の緩和を行った格子では打ち切り誤差量は改善がみられたもののその緩和規模はわずかである。解析結果も定常解が得られたものの依然として逆勾配や水面の大規模な起伏が確認されるように打ち切り誤差が解に強い影響を与えている。

(2) ラプラス方程式と境界線計算点の再配置による誤差緩和

図-9(d)に横断方向境界線上の計算点の再配置を行い、その後ラプラス方程式による打ち切り誤差の緩和を行った格子を示した。この際の境界線上の計算点間隔の変化率は小さくすればするほど打ち切り誤差量は減少するが、同時に本来の河道形状を損ねてしまうため両者のバランスを考え20%以内となるように調整した。

この格子の打ち切り誤差量は大幅に緩和され、いずれの計算点においても0.2以下という結果が得られた。解析結果においてもこれまでの水面の局所的な起伏や水位の逆勾配が発生しない水理学的に妥当な解が得られた。

ただし、解析領域の蛇行部の格子構成に着目するとラプラス方程式による格子整正法は内岸側へと格子が集中し、外岸側の格子は粗くなる。河川の水理解析においては外岸側に流れが卓越するためそこへの格子の密な配置が要求される。しかし、ラプラス方程式によ

図-9 格子構成，メトリックスの打切り誤差

図-10 流心での縦断水位

図-11 境界線上の格子幅と傾き

りその要求を満足することは数学的に困難である。また、このような格子密度の空間的な粗密は局所的な精度の低下を招くという意味でも望ましくない。

(3) ポアソン方程式と境界線計算点の再配置による誤差緩和

ラプラス方程式における格子整正法の問題点を解決するため、局所的な格子密度の調整が可能な次式に示すポアソン方程式による格子整正法を導入した。

$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} \\ = -\frac{1}{J^2} [P(\xi, \eta)x_{\xi} + Q(\xi, \eta)x_{\eta}] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} \\ = -\frac{1}{J^2} [P(\xi, \eta)y_{\xi} + Q(\xi, \eta)y_{\eta}] \end{aligned} \quad (27)$$

式中の右辺 $P(\xi, \eta), Q(\xi, \eta)$ の求め方については Steger and Sorenson⁵⁾の方法を用いた。彼らの方法では図-11に示す境界上の格子幅 Δs と傾き θ_b とを直接与えることが可能となる。

本手法では境界線で再配置された j 軸の始終点を直線で結んだ際の長さを横断軸の分割数で除すことで Δs の値を決定した。また、傾き θ_b に関してもその j 軸の始終点を結んだ直線と境界上の i 軸との交差角を与えた。これによりラプラス方程式において生じる蛇行部の内岸と外岸との間の格子密度差が改善され、境界線の計算点の再配置と組み合わせると格子の辺長差を小さくすることが可能となる。また、 Δs と θ_b が一意に決定されることから、ポアソン方程式の境界条件となる河道形状が入力されることで自動的な格子整正が可能となる。

この手法により整正した格子と打ち切り誤差量を図-9(e)に示す。蛇行部の格子構成に着目すると内岸及び外岸において格子密度が概ね均一化され、ラプラス方程式の弱点は補われている。また、打ち切り誤差量もラプラス方程式と比べ全体的な減少がみられるうえ、解析結果も前項と同様で打ち切り誤差の影響がみられない。これらのことからポアソン方程式による誤差緩和手法と境界線計算点の再配置手法の組み合わせは自然河川に対する計算格子整正法として有効な手法であると判断できる。

5. おわりに

一般座標による写像は言うまでもなく理論的には無謬であり、本論文で取り上げたメトリックスの打ち切り誤差は数値解析にのみ見られる特有の問題である。

本研究では、まず、メトリックスの打ち切り誤差の評価式に基づくことで、格子構成ごとの解の妥当性と安定性を水理計算を実施することなく理論的に推定できることを示した。また、その誤差評価式の適用例の一つとしてメトリックスの打ち切り誤差が大きな格子構成では支配方程式を満足する解を得られないことを示した。つぎに、広く用いられている横断測線を基準とした実河川の格子構成は、数学的な誤差緩和手法の導入によって支配方程式を満足する物理的に合理的な解を得られることを示した。

謝辞：本研究は、河川整備基金一般的助成（代表者 星野剛）、科研費若手研究(A)(代表者 安田浩保)および科研費基盤研究(B)(代表者 渡邊康玄)からの支援を受けた。また、北海道大学 清水康行教授と北海道河川財団 旭一岳氏から貴重な助言を賜った。計算結果の整理などで新潟大学工学部 中土紘作君の熱心な助力を得た。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Joe F. Thompson, Z.U.A. Warsi and C. Wayne Mastin, Numerical Grid Generation Foundations and Applications, www.hpc.msstate.edu/publications/gridbook/, 1985.
- 2) Thompson, J. F.; Mastin, C. W.; Thames, F. C., Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies, *Journal of Computational Physics*, Vol.15, pp. 299-319, 1974.
- 3) iRic, <http://i-ric.org/>
- 4) 福岡捷二, 大串弘哉, 加村大輔, 平生昭二: 複断面蛇行流路における洪水流の水理, 土木学会論文集, 第579号/II-41, pp.83-92, 1997.
- 5) Steger, J.L. and Sorenson, R.L., Automatic mesh-point clustering near a boundary in grid generation with elliptic partial differential equation, *Journal of Computational Physics*, Vol.33, pp.405-410, 1979.

(2013年 3月 18日 受付)