スプラインによる特性 Galerkin 法における Nitsche の方法に基づく境界組み込み手法

Treatment of Internal Boundary Based on Nitsche's Method
for Characteristic Galerkin Procedure Using Spline Function

木村達也*・丸岡晃**・山田貴博***・松井和己****

Tatsuya KIMURA, Akira MARUOKA, Takahiro YAMADA and Kazumi MATSUI

*横浜国立大学大学院環境情報学府 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7)

**正会員 工博 八戸工業高等専門学校准教授 建設環境工学科 (〒 039-1192 青森県八戸市田面木字上野平 16-1)

***正会員 学博 横浜国立大学教授 大学院環境情報研究院 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7)

****正会員 工博 横浜国立大学准教授 大学院環境情報研究院 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7)

The purpose of this paper is to solve a problem of incompressible flow in a domain which includes an internal boundary on which a Dirichlet boundary condition is imposed. We use the characteristic Galerkin scheme using B-spline basis functions based on the mixed formulation for computing incompressible flow. We employ the Lagrange multiplier method on a treatment of the internal boundary, and integrate with the Nitsche's method to overcome instability which may occur on failure of the LBBK condition. In order to confirm effectivity of the present scheme, we perform the flow around a circular cylinder.

Key Words : *Nitsche's method, Lagrange multiplier method, spline, characteristic Galerkin method*

1. 序

数値シミュレーションの新たな潮流として、B スプラインや NURBS (Non-Uniform Rational B-spline) を用いたアイソジオメトリック解析¹⁾が注目されている。B スプラインや NURBS によって近似関数空間を構築する方法は、Lagrange 補間多項式に基づく従来の有限要素法よりも近似関数の連続性が高いため、解の高周波成分に対する収束精度が高く、精度面で優れていることが示されている^{2),3)}など。さらに、この方法は、領域形状の表現にも NURBS を用いるため、CAD と CAE の融合を目指すものとしても注目されている¹⁾。

筆者らは、これまで B スプラインの精度面に着目し、移流拡散問題に対して時間 2 次精度化が可能な B スプラインを用いた特性 Galerkin 法⁴⁾を提案し、さらに、非圧縮性流れに対して混合型近似に基づく特性 Galerkin 法⁵⁾を提案してきた。この手法は、特性 Galerkin 法と混合型近似の有する共通の特徴から、安定化のための人工的なパラメータを必要とせず、連立一次方程式の係数行列が対称となるスキームを構築することができる。

一方、筆者らの提案する手法のようにスプラインを近似基底とするものでは、基本的に単変量のスプライン基底のテンソル積により多変量の基底が構成される。このとき、パラメトリック空間においてメッシュは直交格子となる。このような手法における物体形状を表すためのメッシュは、矩形のパラメトリック領域(パッチ)から物理領域への B スプラインや NURBS 等によ

るジオメトリマッピングによって得られる。しかしながら、単一のパッチで表現できる領域形状には制限があり、複雑な境界をもつ領域形状を扱うためには複数のパッチが必要である。当然、解析もパッチ間の接続を考慮しなければならず、このことは必ずしも容易ではない。これに対し、有限要素法や有限差分法では、必要な解析対象を覆うバックグラウンドメッシュを作成し、領域内において何らかの方法によって境界を表現する、というような境界非適合メッシュによる方法も提案されており、筆者らの提案するような B スプラインによる解析手法においても、この方法の適用が可能であると考えられる。また、この領域内の境界にも、NURBS 曲線・曲面を用いて表現すれば、CAD と CAE の融合性を備えたアイソジオメトリック解析と同様の特徴を持つ手法の構築が可能であると考えられる。

以上のような背景から本研究では、流れ場の中に置かれた物体周りの流れのような問題を高精度に解くことを目的として、筆者らが提案した非圧縮性流れにおける混合型 B スプライン近似に基づく特性 Galerkin 法⁵⁾に対して領域内の境界の組み込み手法を構築する。領域内の境界上の流速は、拘束条件として取り扱い、流体構造連成問題への拡張を想定し、Lagrange 未定乗数法を適用する。境界の表現および Lagrange 乗数の近似には、Lagrange 補間多項式に基づく通常の有限要素または NURBS によって近似関数空間を構築する。さらに、Lagrange 未定乗数法を導入した場合に生ずる不安定性に対しては、Nitsche の方法⁶⁾によって安定化を図

ることを試みる．

以降，本報では，想定問題および提案手法の定式化を示し，一様流中に置かれた円柱周りの流れの問題を用いて提案手法の評価を行う．

2. 想定問題と支配方程式

本研究では，図-1 に示すような領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ or 3) の内部に物体境界を表す境界 Γ_s がある密度が一定の非圧縮性粘性流れの問題を想定する．境界 Γ_s で囲まれた領域は物体領域に対応するものであるが，本研究では境界 Γ_s 上の流速を物体境界に相当する境界条件として与えることとし， Γ_s で囲まれた領域内部も同じ流体が存在するものとして定式化を行う．このときの支配方程式は， $u(x, t)$ と $P(x, t)$ を見出す以下のような Navier-Stokes 方程式によって表される．

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \nabla P - \nabla \cdot 2\nu \nabla^s u = f & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \Gamma_g \\ (-PI + 2\nu \nabla^s u) \cdot n = h & \text{on } \Gamma_h \\ u = s & \text{on } \Gamma_s \\ u(x, 0) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

ここで， u は流速， P は圧力を密度で除したものの（以降，単に圧力と呼ぶ）， f は外力， ν は動粘性係数， g は境界 Γ_g 上の流速， h は境界 Γ_h 上の表面力， s は境界 Γ_s 上の流速， u_0 は初期の流速， I は単位テンソル， n は単位外向き法線ベクトル， $\nabla^s u$ は以下に示す歪み速度テンソルである．

$$\nabla^s u = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (2)$$

また，式 (1) の第 1 式に含まれる左辺第 1 項と第 2 項の和（加速度）を以下のように表す．

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = \frac{d}{d\tau} u(X(x, t; \tau), \tau) \Big|_{\tau=t} \quad (3)$$

ここで， $X(x, t; \tau)$ は，時刻 t での位置 x を起点とする特性曲線上の時刻 τ での位置であり，以下のような

図-1 想定問題

常微分方程式によって求められる．

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = u(X(x, t; \tau), \tau) \\ X(x, t; t) = x \end{cases} \quad (4)$$

3. B スプラインを用いた解析手法の枠組み

本研究で必要となる近似関数空間に B スプラインを用いているため，ここでは B スプラインを用いた解析手法の枠組みについて簡潔に説明する．なお，B スプラインについての詳細は他の文献⁷⁾などに譲ることとする．

3.1 単変量の B スプライン

$p \geq 0$ を多項式の次数， $n \geq p + 1$ を B スプライン基底関数の数とし，パラメトリック空間における座標による非減少列を以下のように表す．

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (5)$$

ここで， $\xi_i \leq \xi_{i+1}$ ， $1 \leq i \leq n + p$ である． $\xi_i \in \mathbb{R}$ はノット， Ξ はノットベクトル，隣接するノットの間隔 ($\xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}$) はノットスパンと呼ばれる．また，最初と最後のノットの値は $p + 1$ 回繰り返されるものとする．このようなノットベクトルはオープンであるとされる．さらに，繰り返しのないノットのベクトルを $\{\zeta_i\}_{i=1}^m$ ，多重度を表すベクトルを $\{r_i\}_{i=1}^m$ とすると， Ξ は以下のように表される．

$$\Xi = \underbrace{\{\zeta_1, \dots, \zeta_1\}}_{r_1 \text{ times}}, \underbrace{\{\zeta_2, \dots, \zeta_2\}}_{r_2 \text{ times}}, \dots, \underbrace{\{\zeta_m, \dots, \zeta_m\}}_{r_m \text{ times}} \quad (6)$$

ここで， $\zeta_i < \zeta_{i+1}$ ， $1 \leq i \leq m - 1$ ， $1 \leq r_i \leq p + 1$ ， $\sum_{i=1}^m r_i = n + p + 1$ であり，オープンノットベクトルでは $r_1 = r_m = p + 1$ となる．

B スプライン基底関数を $B_i^p(\xi)$ ， $1 \leq i \leq n$ とすると， $B_i^p(\xi)$ は以下のように定義される．

$$\text{For } p = 0 \quad B_i^0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{For } p \geq 1 \quad B_i^p(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_i^{p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{i+1}^{p-1}(\xi) \quad (8)$$

ここで， $0/0 = 0$ とする． $B_i^p(\xi)$ は， $\xi_i \leq \xi < \xi_{i+p+1}$ で非負の値をとり，それ以外で 0 となる．また， $\zeta_j \leq \xi < \zeta_{j+1}$ で p 次の多項式を表現できる基底関数となり，その連続性は， $\alpha_i = p - r_i$ とすると， ζ_i ， $2 \leq i \leq m - 1$ で C^{α_i} 連続 (α_i 階導関数が連続) となる．

$\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^m$ ， $|\alpha| = \min\{\alpha_i : 2 \leq i \leq m - 1\}$ と表し，B スプライン基底関数によって張られる B スプライン空間を以下のように定義する．

$$S_\alpha^p = \text{span}\{B_i^p\}_{i=1}^n \quad (9)$$

$p \geq 1, \alpha_i \geq 0, 2 \leq i \leq m-1$ のとき、B スプライン空間における導関数に対して以下のような関係が成り立つ。

$$\left\{ \frac{d}{d\xi} v : v \in S_{\alpha}^p \right\} = S_{\alpha-1}^{p-1} \quad (10)$$

ここで、 $\alpha - 1 = \{-1, \alpha_2 - 1, \dots, \alpha_{m-1} - 1, -1\}$ である。

3.2 多変量の B スプラインとジオメトリマッピング

パラメトリック領域を $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ 、パラメトリック座標を $\hat{x} = (\xi^1, \dots, \xi^d)^T \in \hat{\Omega}$ 、また、多変量に対する記号の定義をそれぞれ $p_l, n_l, \Xi_l = \{\xi_{i_l, l}\}_{i_l=1}^{n_l+p_l+1} = \{\zeta_{i_l, l}\}_{i_l=1}^{m_l}, \{r_{i_l, l}\}_{i_l=1}^{m_l}, \alpha_l = \{\alpha_{i_l, l}\}_{i_l=1}^{m_l}, B_{i_l, l}^{p_l}, 1 \leq l \leq d$ とする。

$\hat{\Omega}$ はノットの最小・最大値から以下のように表される。

$$\hat{\Omega} = \otimes_{l=1}^d (\zeta_{1, l}, \zeta_{m_l, l}) \quad (11)$$

パラメトリック空間におけるメッシュ $\hat{M}_h$ は、繰り返しのないノットスパンで囲まれた要素 $\hat{K}$ によって構成され、以下のように表される。

$$\hat{M}_h = \left\{ \hat{K} = \otimes_{l=1}^d (\zeta_{i_l, l}, \zeta_{i_l+1, l}), 1 \leq i_l \leq m_l - 1 \right\} \quad (12)$$

多変量の B スプライン基底関数は単変量の基底関数のテンソル積によって以下のように表される。

$$B_{i_1, \dots, i_d}^{p_1, \dots, p_d}(\hat{x}) = \otimes_{l=1}^d B_{i_l, l}^{p_l}(\xi^l), 1 \leq i_l \leq n_l \quad (13)$$

多変量の B スプライン空間は以下のように表される。

$$S_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^{p_1, \dots, p_d}(\hat{M}_h) = \text{span} \left\{ B_{i_1, \dots, i_d}^{p_1, \dots, p_d} \right\}_{i_1=1, \dots, i_d=1}^{n_1, \dots, n_d} \quad (14)$$

一方、 $\hat{M}_h$ において区分的に滑らかな関数空間を以下のように定義する。

$$C_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^{\infty} = C_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^{\infty}(\hat{M}_h) \quad (15)$$

$C_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^{\infty}$ における関数は要素 $\hat{K} \in \hat{M}_h$ において C^{∞} 連続になることを意味し、当然 $S_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^{p_1, \dots, p_d} \subset C_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^{\infty}$ である。

ジオメトリマッピング F は以下のように表される。

$$F: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega, \quad F \in (C_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^{\infty})^d \quad (16)$$

F には B スプラインや NURBS を利用することができ、 $\hat{M}_h$ に細分化される前の F の一致する粗いメッシュを用いてもよい。また、物理空間におけるメッシュ M_h は、要素 K によって構成され、以下のように表される。

$$M_h = \left\{ K = F(\hat{K}) : \hat{K} \in \hat{M}_h \right\} \quad (17)$$

4. 離散化

本研究では、式 (1) の離散化に混合型 B スプライン近似に基づく特性 Galerkin 法⁵⁾を適用し、 Γ_s 上の境界条件の扱いに Nitsche の方法によって安定化を図った Lagrange 未定乗数法を適用している。ここでは、前半で混合型 B スプライン近似に基づく特性 Galerkin 法に

ついて概説し、後半で Γ_s 上の境界条件の扱いについて概説する。

4.1 流速と圧力に対する混合型 B スプライン近似

本研究では、流速と圧力に対する近似に、圧力に対する要素を 2^d に細分化したものを流速に対する要素とする、サブグリッド (SG) 要素⁸⁾を用いる。この方法によれば、流速と圧力に対して基底関数によって表現できる最大の連続性を維持できるという特徴がある。また、B スプライン基底関数の多項式の次数を、流速と圧力ともに各方向に対して同じ次数とする。さらに、要素間での導関数の連続性も、流速と圧力ともに全て同じ値となるようにノットの多重化を行い、ノットベクトルを定めるものとする。このとき、流速と圧力に対する多項式の次数と導関数の連続性の組み合わせを、それぞれ、 $(p_V, \alpha_V), (p_P, \alpha_P)$ とする。ここで、 $1 \leq \alpha_V \leq p_V - 1, 0 \leq \alpha_P \leq p_P - 1$ である。

このときの $\hat{\Omega}$ における流速と圧力に関する近似関数空間 $\hat{V}^h, \hat{Q}^h$ は多変量の B スプライン空間によってそれぞれ以下のように定義される。

$$\hat{V}^h = (S_{\alpha_V, \alpha_V}^{p_V, p_V}(\hat{M}_{h/2}))^d \quad (18)$$

$$\hat{Q}^h = S_{\alpha_P, \alpha_P}^{p_P, p_P}(\hat{M}_h) \quad (19)$$

ここで、 $\hat{M}_{h/2}$ は、パラメトリック空間において圧力に対するメッシュを 2^d に細分化することによって得られたメッシュである。また、 Ω における流速と圧力に関する近似関数空間は以下のように表される。

$$V_g^h = \left\{ w^h = \hat{w}^h \circ F^{-1} : \hat{w}^h \in \hat{V}^h, w^h = g \text{ on } \Gamma_g \right\} \quad (20)$$

$$Q^h = \left\{ q^h = \hat{q}^h \circ F^{-1} : \hat{q}^h \in \hat{Q}^h \right\} \quad (21)$$

さらに、 V_g^h に対して $g = 0$ のときの空間を V_0^h と表す。なお、SG 要素における inf-sup 条件を満たす多項式の次数および導関数の連続性の関係は以下のように表される⁸⁾。

$$2(p_V - \alpha_V) > p_P - \alpha_P \quad (22)$$

すなわち、最大の連続性を持つ場合 ($\alpha_V = p_V - 1, \alpha_P = p_P - 1$) において上式を満足する。

4.2 特性法による時間離散化

本研究では、式 (1) の時間離散化に著者らの文献^{4), 5)}による時間 2 次精度化が可能な特性法に基づく手法を用いる。 Δt を時間増分として $t_k = k\Delta t, v_k = v_k(x) = v(x, t_k)$ とし、 v_k は時間離散化による近似関数でもありとすると、特性法による時間離散化式は以下のような多段法によって表される。

$$\begin{cases} \tilde{u}_{k+1} = u_k(X_k) + (1 - \gamma)\Delta t \dot{u}_k(X_k) \\ \text{where } X_k = x - \frac{\Delta t}{2}(u_k(x - \Delta t u_k) + u_{k+1}) \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{u}_{k+1} + \nabla P_{k+1} - \nabla \cdot 2\nu \nabla^s \mathbf{u}_{k+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_{k+1} = 0 \end{cases} = \mathbf{f}_{k+1} + \frac{1}{\gamma\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} \quad (24)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{k+1} = \frac{1}{\gamma\Delta t} (\mathbf{u}_{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}) \quad (25)$$

ここで, γ は時間精度を調整するパラメータであり, $\gamma = 1$ のとき 1 次精度, $\gamma = 1/2$ のとき 2 次精度となる. なお, 非線形問題であるため, 反復計算が必要である.

4.3 領域内部の境界条件を考慮しない場合の特性 Galerkin 法による空間離散化

Γ_s 上の境界条件を考慮しない場合の特性 Galerkin 法による離散化式⁵⁾は, $\mathbf{u}_k^h, \dot{\mathbf{u}}_k^h$, および, 非線形反復の初期値が $\mathbf{u}_{k+1}^{h(0)} = \mathbf{u}_k^h$ と与えられれば, 以下のように表される.

For $j = 1, 2, \dots$

Find $\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}^{h(j)} \in V_g^h$ such that

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}^{h(j)} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot (\mathbf{u}_k^h(\mathbf{X}_k^{h(j)})) \\ \quad + (1 - \gamma)\Delta t \dot{\mathbf{u}}_k^h(\mathbf{X}_k^{h(j)}) d\Omega \quad \forall \mathbf{w}^h \in V_0^h \\ \text{where } \mathbf{X}_k^{h(j)} = \mathbf{x} - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{u}_k^h(\mathbf{x} - \Delta t \mathbf{u}_k^h) + \mathbf{u}_{k+1}^{h(j-1)}). \end{cases} \quad (26)$$

Find $\{\mathbf{u}_{k+1}^{h(j)}, P_{k+1}^{h(j)}\} \in V_g^h \times Q^h$ such that

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{u}_{k+1}^{h(j)} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} 2\nu \nabla^s \mathbf{w}^h : \nabla^s \mathbf{u}_{k+1}^{h(j)} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{w}^h P_{k+1}^{h(j)} d\Omega - \int_{\Omega} q^h \nabla \cdot \mathbf{u}_{k+1}^{h(j)} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{f}_{k+1} d\Omega - \int_{\Gamma_h} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}_{k+1} d\Gamma \\ & - \frac{1}{\gamma\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}^{h(j)} d\Omega \\ & = 0 \quad \forall \{\mathbf{w}^h, q^h\} \in V_0^h \times Q^h. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{k+1}^{h(j)} = \frac{1}{\gamma\Delta t} (\mathbf{u}_{k+1}^{h(j)} - \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}^{h(j)}) \quad (28)$$

非線形反復による収束値が得られれば, t_{k+1} での計算値を $\mathbf{u}_{k+1}^h = \mathbf{u}_{k+1}^{h(j)}$, $\dot{\mathbf{u}}_{k+1}^h = \dot{\mathbf{u}}_{k+1}^{h(j)}$, $P_{k+1}^h = P_{k+1}^{h(j)}$ と更新することができる. なお, 加速度の初期値 $\dot{\mathbf{u}}_0^h$ が未知の場合には, 式 (26) の計算を行えないので, $k = 1$ のときのみ, $\gamma = 1$ として十分小さな Δt を用いて計算を行うものとする. また, 式 (26) と式 (27) は連立一次方程式の求解が必要である. それぞれの係数行列は対称となり, ν が時間に依存しなければ, 係数行列も時間に依存しない.

4.4 Nitsche の方法を用いた Lagrange 未定乗数法による領域内部の境界条件の組み込み

Lagrange 未定乗数法によって領域の中にある境界 Γ_s 上の境界条件 (式 (1) の第 5 式) を扱うことを考える. 境界 Γ_s の表現および Lagrange 乗数に関する近似関数空間は, Γ_s 上において Lagrange 補間多項式に基づく有限要素または NURBS によって構築するものとし, これを Λ^h と表すものとする.

Lagrange 未定乗数法においては, V_g^h と Λ^h の組み合わせに対して LBBK (Ladyzhenskaya–Babuska–Brezzi–Kikuchi) 条件 (inf-sup 条件)⁹⁾ が課せられる. しかしながら, 流体構造連成問題等を想定した場合, 境界 Γ_s 上で定義される Lagrange 乗数の近似空間 Λ^h の設定を問題毎に適切に行うことは容易ではない. このような問題に対して, 近年では Nitsche の方法⁶⁾ により, 安定化を行うことで, 近似空間 Λ^h の設定を任意とする手法が注目されている. 本研究では, 圧力を導入した混合型定式化において非圧縮性を考慮した定式化に対する Nitsche の方法¹⁰⁾ を参考に, Lagrange 未定乗数法の安定化を考える.

このとき Nitsche の方法を用いた Lagrange 未定乗数法によって Γ_s 上の境界条件を考慮した離散化式は, 式 (27) に新たな項を加えることによって以下のように表される.

Find $\{\mathbf{u}_{k+1}^{h(j)}, P_{k+1}^{h(j)}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^{h(j)}\} \in V_g^h \times Q^h \times \Lambda^h$ such that

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{u}_{k+1}^{h(j)} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} 2\nu \nabla^s \mathbf{w}^h : \nabla^s \mathbf{u}_{k+1}^{h(j)} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{w}^h P_{k+1}^{h(j)} d\Omega - \int_{\Omega} q^h \nabla \cdot \mathbf{u}_{k+1}^{h(j)} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{f}_{k+1} d\Omega - \int_{\Gamma_h} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}_{k+1} d\Gamma \\ & - \frac{1}{\gamma\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}^{h(j)} d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_s} \mathbf{w}^h \cdot \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^{h(j)} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\mu}^h \cdot (\mathbf{u}_{k+1}^{h(j)} - \mathbf{s}_{k+1}) d\Gamma \\ & - \frac{1}{\delta} \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\mu}^h \cdot \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^{h(j)} d\Gamma \\ & - \frac{1}{\delta} \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\mu}^h \cdot [(-P_{k+1}^{h(j)} \mathbf{I} + 2\nu \nabla^s \mathbf{u}_{k+1}^{h(j)}) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \\ & - \frac{1}{\delta} \int_{\Gamma_s} [(-q^h \mathbf{I} + 2\nu \nabla^s \mathbf{w}^h) \cdot \mathbf{n}] \cdot \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^{h(j)} d\Gamma \\ & - \frac{1}{\delta} \int_{\Gamma_s} [(-q^h \mathbf{I} + 2\nu \nabla^s \mathbf{w}^h) \cdot \mathbf{n}] \cdot \\ & \quad [(-P_{k+1}^{h(j)} \mathbf{I} + 2\nu \nabla^s \mathbf{u}_{k+1}^{h(j)}) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \\ & = 0 \quad \forall \{\mathbf{w}^h, q^h, \boldsymbol{\mu}^h\} \in V_0^h \times Q^h \times \Lambda^h. \end{aligned} \quad (29)$$

ここで, 第 8 項と第 9 項が Lagrange 未定乗数法によ

図-2 円柱周り流れ問題

る項であり、第 10～13 項が Nitsche の方法による項である．また、 δ は $\delta(h^{-1})$ のパラメータであり、設定値によって安定化の寄与を調整することができる．さらに、これらの項の付加によっても連立一次方程式の係数行列の対称性は維持される．

Γ_s 上で $\mathbf{u}_{k+1}^h \approx \mathbf{s}_{k+1}$ となるとき、Lagrange 乗数は、 $\lambda_{k+1}^h \approx -(-P_{k+1}^h \mathbf{I} + 2\nu \nabla^s \mathbf{u}_{k+1}^h) \cdot \mathbf{n}$ となる、すなわち、 Γ_s 上での表面力となるという物理的な意味を持っている．よって、本手法によれば境界 Γ_s 上の境界条件を満足できるのと同時に、Lagrange 乗数から表面力の評価をすることができる．また、 Γ_s 上で厳密に $\mathbf{u}_{k+1}^h = \mathbf{s}_{k+1}$ 、 $\lambda_{k+1}^h = -(-P_{k+1}^h \mathbf{I} + 2\nu \nabla^s \mathbf{u}_{k+1}^h) \cdot \mathbf{n}$ が達成されたと仮定すると、第 9～13 項はキャンセルされ、第 8 項は応力に対する部分積分項の形となるため、本手法は整合性が保持されたものになっている．

5. 数値実験による提案手法の評価

本研究では、主に一様流中の円柱周り流れの問題を用いて、提案手法の評価を行う．計算領域と境界条件は図-2 の通りである．計算格子としては、図-3 に示す円柱近傍のセルサイズを小さくとした非一様の 178×162 分割の直交格子を用いた．また、円周境界上の Lagrange 未定乗数法については、円周を等分割して、Lagrange 1 次要素によって離散化した場合（以下 Lagrange LM と呼ぶ）と 2 次 NURBS により円柱形状を幾何学的に厳密な円として離散化した場合（以下 NURBS LM と呼ぶ）について、計算を行った．また、Reynolds 数については 40 と 100 の場合を計算した．

5.1 Nitsche の方法の効果

図-4 に、Nitsche の方法を用いない通常の Lagrange 未定乗数法に基づいた計算により得られた Lagrange 乗数すなわち表面力ベクトルを示す．計算結果は、Lagrange LM により、円周表面を 32 分割した場合と 128

(a) 領域全体

(b) 円柱近傍

緑線は圧力格子、黒線は流速格子

図-3 計算格子（ 178×162 分割）

分割した場合の 2 ケースについて示す．32 分割の場合は滑らかな表面力分布が得られているが、128 分割の場合については物理的に不合理な表面力のばらつきが見られる．これは、128 分割の場合では、拘束される流速場の自由度に対して、Lagrange 乗数の自由度が多すぎ、LBBK 条件が満足されていないことが原因と考えられる．

図-5 に、Nitsche の方法を導入した時の Lagrange 乗数（表面力ベクトル）を示す．この場合は、分割数、Reynolds 数によらず滑らかな表面力の分布が得られている．したがって、Nitsche の方法が Lagrange 乗数の安定化に寄与していることが確認できた．

5.2 NURBS による離散化の効果

Nitsche の方法に基づく本研究で提案した手法において、Lagrange LM を使った場合の円柱表面の境界条件についての流速の誤差を図-6 で定義される角度を用いて図-7 に示す．ここで、流速の誤差は、円柱表面での流速の大きさを時間平均し、流入流速によって基準化したものである．この流速の誤差は、本来、円柱表面上で流速を 0 として設定しているのに対して、Lagrange 未定乗数法により弱形式で課された流速の拘束条件が計算結果において実際にどの程度満足しているかを見たものである．64 分割の場合において、最大誤差は Reynolds 数が 40 の場合、0.023 程度、Reynolds 数が 100 の場

図-4 円周境界上の Lagrange 乗数 (Nitsche 項無し)

図-5 円周境界上の Lagrange 乗数 (Nitsche 項あり)

合, 0.048 程度となっている。

また, 同じ円柱表面の境界流速の誤差の平均値について, Lagrange LM と NURBS LM を用いたときの分割数との関係を図-8 に示す。ここで, h は分割数の逆数である。境界条件の誤差から見て, Lagrange LM より NURBS LM の方が優れていることが確認できる。また, 両者の結果はともに 64 分割で誤差が同じ値にほぼ収束していることが分かる。この誤差の値は, 図-3 の計算格子の解像度から決定される拘束条件の精度の限界に対応したものであると考える。

図-9 に NURBS LM によって得られた瞬間圧力分布を示す。Reynolds 数が 40 の場合, 双子渦による定常

図-6 円柱境界上の角度の定義

(a) $Re=40$, 64 分割

(b) $Re=100$, 64 分割

図-7 円柱境界上の流速誤差

状態の解が得られ, Reynolds 数が 100 の場合, カルマン渦が生成されていることが確認できる。

本研究で提案した手法による計算結果を整理して得られた Reynolds 数と抗力係数の関係を図-10 に, Reynolds 数と Strouhal 数の関係を図-11 に示す。Lagrange LM と比べて NURBS LM の抗力係数は小さい値となり, 既往の結果^{(11),(12),(13)}に近い値を示している, Strouhal 数についても, Lagrange LM と比べて NURBS LM はより小さくなり, Roshko⁽¹⁴⁾の結果に近くなっている。

また, 図-6 の角度の定義に従った円柱境界上の平均圧力係数分布を Lagrange LM による結果を図-12 に, NURBS LM による結果を図-13 に示す。ここで, n は円周表面の分割数である。Lagrange LM の場合は特に

(a) $Re=40$

(b) $Re=100$

図-8 分割数と円柱境界上の流速誤差の平均値

Reynolds 数 100 の場合は分割数を増加させたときの解の収束が遅いのに対し, NURBS LM では 32 分割程度でも参照解¹²⁾に近い結果を与えていることが分かる.

NURBS LM については, 形状の定義においても NURBS を用いているため, 幾何形状が厳密に表されたものとなっている. したがって, 以上の結果における NURBS LM の優位性は, Lagrange 乗数としての表面力および流速拘束条件の近似精度とともに, 幾何形状の表現精度の向上が要因となっていると考えられる.

6. 結び

筆者らの提案した混合型 B スプライン近似に基づく特性 Galerkin 法による非圧縮性流れの数値計算手法に対して, Nitsche の方法により安定化された Lagrange 未定乗数法を導入し, 領域内の物体境界を組み込む手法を提案した. また, 数値実験により, 提案手法の基本的な妥当性を示した. さらに, NURBS 関数を物体形状の表現とともに Lagrange 未定乗数の近似に用いることで, 精度の高い境界の組み込みが可能となることが明らかとなった.

今後は, 流体構造連成問題への適用や 3 次元問題への拡張を行う予定である.

(a) $Re=40$

(b) $Re=100$

図-9 瞬間圧力分布 (NURBS)

謝辞

本研究は JSPS 科研費 24560590 の助成を受けたものです.

参考文献

- 1) Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., and Bazilevs, Y.: Iso-geometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry, and mesh refinement, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.194, pp.4135–4195, 2005.
- 2) 山田 貴博: 波動方程式に対するガラーキン法に基づく数値計算手法の特性評価, *応用力学論文集*, Vol.11, pp.117–122, 2008.
- 3) Bazilevs, Y., Calo, V.M., Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R., Reali, A., and Scovazzi, G.: Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.197, pp.173–201, 2007.
- 4) 丸岡 晃, 山田 貴博: 移流拡散問題における B スプライン基底関数を用いた特性ガラーキン法, *Transactions of JSCES*, Vol.2012, 20120001, 2012.
- 5) 丸岡 晃, 山田 貴博: 非圧縮性流れにおける混合型 B スプライン近似に基づく特性ガラーキン法, *応用力学論文集*, Vol.15, pp.149–160, 2012.
- 6) Hansbo, P., Lovadina, C., Perugia, I., and Sangalli, G.: A Lagrange multiplier method for the finite element solution of elliptic interface problems using non-matching meshes, *Numer. Math.*, Vol. 100, pp.91–115,

図-10 Reynolds 数と抗力係数の関係

図-11 Reynolds 数と Strouhal 数の関係

(a) $Re=40$

(b) $Re=100$

図-12 円柱境界上の平均圧力係数分布 (Lagrange LM)

(a) $Re=40$

(b) $Re=100$

図-13 円柱境界上の平均圧力係数分布 (NURBS LM)

- 2005.
- 7) Piegel, L., and Tiller, W.: *The NURBS Book*, 2nd edn., Springer-Verlag, 1997.
 - 8) Bressan, A., and Sangalli, G.: Isogeometric discretizations of the Stokes problem: stability analysis by the macroelement technique, *IMA J. of Numer. Anal.*, pp.1–23, 2012 doi:10.1093/imanum/drr056.
 - 9) 菊地文雄: 有限要素法の数理, 培風館, 1994.
 - 10) Hansbo, P., and Larson, M.G.: Discontinuous Galerkin methods for incompressible and nearly incompressible elasticity by Nitsche's method, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 191, pp.1895–1908, 2002.
 - 11) Lima e Silva, A.L.F., Silveira-Neto, A., and Damasceno, J.J.R.: Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method, *J. of Comput. Phys.*, Vol. 189, pp.351–370, 2003.
 - 12) Park, J., Kwon, K., and Choi, H.: Numerical Solutions of flow past a circular cylinder at Reynolds Numbers up to 160, *KSME Int. J.*, Vol. 12, 1200, 1998.
 - 13) Sucker, D., and Brauer, H.: Fluidodynamik bei der angestromten Zylindern, *Wärme Stoffübertragung* 8, 149, 1975.
 - 14) Roshko, A.: On the wake and drag of bluff bodies, *J. Aeronaut. Sci.*, 22, 220, 1955.
 - 15) Williamson, C.H.: Vortex dynamics in the cylinder wake, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 28, 477, 1996.

(2013 年 3 月 18 日 受付)