高低マッハ数に適用可能な 3 次元圧縮性流体の数値解析手法

青木一真¹・牛島省²・宮木伸³・鳥生大祐⁴

¹学生員 京都大学大学院工学研究科 社会基盤工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区桂 C クラスター)
E-mail: aoki.kazuma.34z@st.kyoto-u.ac.jp

²正会員 工博 京都大学学術情報メディアセンター (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

³正会員 工修 大成建設株式会社 土木本部 土木設計部 (〒 163-0606 東京都新宿区西新宿 1-25-1)

⁴学生員 工修 京都大学大学院工学研究科 社会基盤工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区桂 C クラスター)

本研究では、高低マッハ数の圧縮性流体を対象とした 3 次元数値解析手法を提案し、その適用性を検証した。本手法では、質量・運動量・内部エネルギーの保存則に加えて、理想気体の状態方程式を基礎式とする。3 次元コロケート格子上で有限体積法により保存則を離散化し、C-ISMAC 法と高次精度 TVD スキームを利用して、それらを安定に計算するアルゴリズムを示す。さらに、flat MPI, OpenMP による並列化により計算時間の短縮を図った。提案された解法を用いて、高マッハ数の圧縮性流れである 3 次元爆風伝搬、また、低マッハ数のベナール対流の計算を行い、理論解および既往の計算結果との比較を行った。その結果、温度や圧力、流速分布などに関して妥当な計算結果が得られることが示された。

Key Words : compressible fluid, conservation scheme, implicit method, FVM, parallel computation

1. 緒言

航空機やロケットを対象とした流体解析では、流速が速いために密度の変化を無視できないので、圧縮性流体として扱われる。そのため、高マッハ数の圧縮性流体に対する研究は、機械工学や航空工学の分野で研究が進められてきた^{1),2)}。しかし、最近では温度差による密度の変化を伴う低マッハ数流れに対しても適用可能な圧縮性流体解法に関する研究³⁾が行われており、広範囲の温度差やマッハ数に適用可能な数値解析手法は工学的に非常に重要である。例えば、竹田ら⁴⁾は高温の使用済燃料棒を貯蔵する容器内の温度分布に着目し、経年劣化による貯蔵容器からの高圧気体の漏洩を早期に検知する手法を検討している。

以上のような背景をふまえ、著者らは既報⁵⁾において、広範囲の温度差、および高低マッハ数に適用可能な 2 次元の陰的圧縮性流体解法を提案し、その有効性を示したが、3 次元領域の現象に関する検討は現在のところ行われていない。本研究の目的は、著者ら⁵⁾が提案した 2 次元解析手法を、3 次元数値解析が可能なものへと拡張し、3 次元計算領域の高低マッハ数流れに適用可能であるか検討することである。また、既報⁵⁾とは異なり、各変数を適切に評価することにより、不連続面で非物理的な数値振動を抑える。提案された解法は、変数がコロケート配置された単純な構造格子を利用して、有限体積法により、高い質量保存精度を保つ

たまま、圧力が状態方程式を満足し、簡便かつ高精度に計算することが可能である。また、非保存形式で離散化を行う CUP 系解法³⁾とは異なり、基礎方程式を保存形式で離散化しており、保存性を考慮している。本解析手法の具体的な特徴は以下の通りである。

- 基礎方程式として、圧縮性流体の連続式、運動方程式、内部エネルギー式、および状態方程式を用いる。
- 基礎方程式を保存形式で表現し、コロケート格子上で有限体積法を用いて離散化することにより、質量保存則を高い精度で満足することができる。
- 圧力を状態方程式を満足するように解く。
- 不連続面を含んだ高マッハ数問題に陰的アルゴリズムを用いることで安定して解くことができる。
- 大きい温度差による密度の変化を伴う低マッハ数流れに対しても適用可能である。

提案した計算手法を用いて、高マッハ数流れである衝撃波と低マッハ数流れである自然対流の計算を行い、モデルの基本的な特性や応用性についての検討を行う。

2. 圧縮性流体の数値解析手法の概要

(1) 基礎式

圧縮性流体に対する基礎式として、以下の質量保存則、運動方程式、内部エネルギー式、理想気体の状態

方程式，温度と内部エネルギーの関係式の5式を扱う．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho g \delta_{i3} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e u_j)}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (3)$$

$$p = \rho e(\gamma - 1) \quad (4)$$

$$e = C_v T \quad (5)$$

ここで， t は時間， x_i は3次元直交座標系の座標成分， u_i は x_i 方向の流速成分である． g ， δ_{ij} ， ρ ， τ_{ij} ， p ， γ ， q_j ， e はそれぞれ重力加速度，クロネッカーのデルタ，密度，粘性応力，圧力，比熱比，熱流束，内部エネルギーである．また，ストークスの関係とフーリエの法則を用いて，粘性応力 τ_{ij} ，熱流束 q_j は次式のように表される．

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (6)$$

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (7)$$

ここで， μ ， κ はそれぞれ粘性係数，熱伝導率である．

(2) 数値解析手法

図-1に示すように，基礎式はコロケート格子上で離散化される．ここで， Q はスカラーの変数を示す．数値解析手法の計算手順は次のようになる．

1. 圧力勾配項を考慮しない，セル中心での流速の推定値 u_i^* を運動方程式(2)から求める．
2. セル境界での流速の推定値 $u_{b,i}^*$ は， u_i^* を空間内挿したのち，圧力勾配項を加えることで計算する．
3. $n+1$ ステップの密度 ρ^{n+1} は，後述する陰的解法を用いて算出する．
4. 既報⁵⁾とは異なり， $(\rho T)^{n+1}$ を式(3)，(5)から同様の手法により計算する． $n+1$ ステップでの温度 T^{n+1} は ρ^{n+1} を用いることで決定される．
5. 求めた ρ^{n+1} ， T^{n+1} を用いて状態方程式(4)から圧力 p^{n+1} を求める．
6. ρ^{n+1} ， p^{n+1} を用いて，運動方程式(2)から， $(\rho u_i)^{n+1}$ を求める． u_i^{n+1} は ρ^{n+1} を用いることで決定される．

上記の計算手順の詳細を以下に示す．

セル中心の流速の推定値 u_i^* は，有限体積法を用いて次のように計算される．

$$u_i^* = \frac{1}{\rho^n} \left[(\rho u_i)^n + \Delta t \left\{ -\frac{\partial(\rho u_i u_j)^n}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} \right\} \right] \quad (8)$$

ここで，圧力による非物理的な数値振動を避けるため，圧力勾配項はセル中心では考慮しない．セル境界の流

図-1 コロケート格子配置

速の推定値 $u_{b,i}^*$ は，次式のように内挿計算と圧力勾配項を用いることで求める．

$$u_{b,i}^* = f_b(u_i^*) - \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \bigg|_b \Delta t \quad (9)$$

上式中の $f_b()$ は，セル境界で変数を内挿する関数を表し，本論文では，境界に隣り合うセル中心の変数を相加平均する．既報⁵⁾とは異なり，以降の計算では，流速の評価をすべて u_i^* または $u_{b,i}^*$ に統一する．

質量保存則(1)は，C-ISMALC法⁶⁾を用いて陰的に離散化される．式(1)の時間方向の離散化式は， u_i^* を用いて，パラメータ $\alpha_\rho \in [0, 1]$ を利用した梯形則を適用すれば，次式のように表される．

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \alpha_\rho \frac{\partial(\rho^{n+1} u_j^*)}{\partial x_j} + (1 - \alpha_\rho) \frac{\partial(\rho^n u_j^*)}{\partial x_j} = 0 \quad (10)$$

ここで，C-ISMALC法と同様に，以下のように ρ^{n+1} を表す．

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \tilde{\rho} \quad (11)$$

式(11)を式(10)に代入し，次の関係が得られる．

$$\frac{\tilde{\rho}}{\Delta t} + \alpha_\rho \frac{\partial(\tilde{\rho} u_j^*)}{\partial x_j} = -\frac{\partial(\rho^n u_j^*)}{\partial x_j} \quad (12)$$

式(12)に対して，空間方向に有限体積法に基づく離散化を行う．このとき，既報⁶⁾と同様に，未知変数 $\tilde{\rho}$ を含む式(12)の左辺第二項の移流項には，一次風上法などの低次スキームを適用し，右辺に含まれる移流項には高次精度のTVDスキーム⁷⁾を利用する．このことにより，陰的解法によりCFL条件が緩和され，時間増分 Δt を大きく設定できると同時に，高次精度の数値解が得られる⁶⁾．得られた連立一次方程式をSOR法を用いて解く． ρ^{n+1} は式(11)から求められる．

次に，式(3)について， C_v が一定であると仮定して式(4)，(5)を用いれば，以下の温度に関する方程式が

得られる.

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial\{(\rho T)u_j\}}{\partial x_j} = -(\rho T)(\gamma - 1)\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{C_v} \left(\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \right) \quad (13)$$

同様に C-ISMALC 法を用いて, パラメータ $\alpha_{\rho T}$, $\beta_{\rho T} \in [0, 1]$ を用いた梯形則を適用すると, 時間方向に離散化された式は次のように表される.

$$\begin{aligned} \frac{(\rho T)^{n+1} - (\rho T)^n}{\Delta t} + \alpha_{\rho T} \frac{\partial\{(\rho T)^{n+1}u_j^*\}}{\partial x_j} \\ + (1 - \alpha_{\rho T}) \frac{\partial\{(\rho T)^n u_j^*\}}{\partial x_j} \\ = (\gamma - 1) \left[\beta_{\rho T} \left\{ -(\rho T)^{n+1} \frac{\partial u_j^*}{\partial x_j} \right\} \right. \\ \left. + (1 - \beta_{\rho T}) \left\{ -(\rho T)^n \frac{\partial u_j^*}{\partial x_j} \right\} \right] \\ + \frac{1}{C_v} \left(\tau_{ij}^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j^n}{\partial x_j} \right) \quad (14) \end{aligned}$$

質量保存則と同様に, 次式のように $(\rho T)^{n+1}$ を表す.

$$(\rho T)^{n+1} = (\rho T)^n + (\tilde{\rho T}) \quad (15)$$

式 (15) を式 (14) に代入し, 以下の関係が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\rho T})}{\Delta t} + \alpha_{\rho T} \frac{\partial\{(\tilde{\rho T})u_j^*\}}{\partial x_j} + \beta_{\rho T}(\gamma - 1) \left\{ (\tilde{\rho T}) \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right\} \\ = -\frac{\partial(\rho T)^n u_j^*}{\partial x_j} + (\gamma - 1) \left\{ -(\rho T)^n \frac{\partial u_j^*}{\partial x_j} \right\} \\ + \frac{1}{C_v} \left(\tau_{ij}^* \frac{\partial u_j^*}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j^n}{\partial x_j} \right) \quad (16) \end{aligned}$$

式 (16) に対して, 粘性項には有限差分法, 粘性項以外は有限体積法を用いて離散化を行う. また, 式 (16) 左辺第二項には一次風上法を適用し, 右辺に含まれる移流項には, 高次精度 TVD スキーム⁷⁾を用いる. 得られた連立一次方程式を SOR 法を用いて解く. $(\rho T)^{n+1}$ は式 (15) から求められる. $(\rho T)^{n+1}$ を既に求めた ρ^{n+1} で除して T^{n+1} を決定する.

最後に, 式 (2) の時間方向の離散化式は, パラメータ $\alpha_{\rho u_i} \in [0, 1]$ を用いた梯形則を適用して, 以下のよう表される. ここで, p^{n+1} は ρ^{n+1} , T^{n+1} を用いて, 状態方程式 (4), 温度と内部エネルギーの関係式 (5) から間接的に求めている.

$$\begin{aligned} \frac{(\rho u_i)^{n+1} - (\rho u_i)^n}{\Delta t} + \alpha_{\rho u_i} \frac{\partial\{(\rho u_i)^{n+1}u_j^*\}}{\partial x_j} \\ + (1 - \alpha_{\rho u_i}) \frac{\partial\{(\rho u_i)^n u_j^*\}}{\partial x_j} \\ = -\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j} - \rho^{n+1} g \delta_{i3} \quad (17) \end{aligned}$$

質量保存則や内部エネルギー式と同様に, 次式のように $(\rho u_i)^{n+1}$ を表す.

$$(\rho u_i)^{n+1} = (\rho u_i)^n + (\tilde{\rho u_i}) \quad (18)$$

式 (18) を式 (17) に代入し, 以下の関係が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\rho u_i})}{\Delta t} + \alpha_{\rho u_i} \frac{\partial\{(\tilde{\rho u_i})u_j^*\}}{\partial x_j} = -\frac{\partial\{(\rho u_i)^n u_j^*\}}{\partial x_j} \\ - \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j} - \rho^{n+1} g \delta_{i3} \quad (19) \end{aligned}$$

ここで, μ が一定であると仮定して, 右辺第三項の拡散項は以下のように計算した.

$$\frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j} = -\frac{2}{3}\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j^*}{\partial x_j} \right) \right\} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j^*}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^2} \right\} \quad (20)$$

式 (19) に対して, 質量保存則や内部エネルギー式と同様に離散化を行う. また, 式 (19) の左辺第二項には一次風上法を適用し, 右辺第一項には高次精度 TVD スキーム⁷⁾を用いる. 得られた連立一次方程式を SOR 法を用いて解く. $(\rho u_i)^{n+1}$ は式 (18) から求められる. また, $(\rho u_i)^{n+1}$ を既に求めた ρ^{n+1} で除して, u_i^{n+1} を得る.

3. 数値解析手法の適用性

(1) 高マッハ数流れ場

a) 1次元衝撃波伝搬問題

上記の計算手法の高マッハ数流体への適用性を検証するため, 1次元衝撃波伝搬問題の計算を行った. 解析に用いた領域を図-2 に示す. 現象は1次元であるが, ここでは三次元場を対象として, 境界条件を適切に設定することにより, 1次元衝撃波伝搬を再現する. 計算領域は長さ $l_1 = 1.0$ [m], 奥行き $l_2 = 3.0 \times 10^{-2}$ [m], 高さ $l_3 = 3.0 \times 10^{-2}$ [m] の直方体領域である. 1次元衝撃波は x_1 軸方向にのみ伝搬し, $x_2 = x_3 = 1.5 \times 10^{-2}$ [m] における計算結果を比較する.

作動流体は理想気体に近似された, 非粘性の熱伝導を考慮しない圧縮性流体であり, 流体の物性値として空気の値を利用する. すなわち, 比熱比 γ は 1.4, 定積比熱 C_v は 7.17×10^2 [J/(kg·K)] とした.

初期条件として, $x_1 < 0.50$ [m] の高圧側に $\rho_l = 1.0$ [kg/m³], $p_l = 1$ [Pa], $x_1 \geq 0.50$ [m] の低圧側に $\rho_r = 0.125$ [kg/m³], $p_r = 0.1$ [Pa] の密度と圧力を与えた.

図-2 1次元衝撃波伝搬問題の計算領域

図-3 計算結果と理論解の比較

また、初期条件の温度 T_l , T_r はそれぞれの領域で状態方程式を満たすように設定した。

境界条件として、密度、温度、圧力は全ての壁面上で $\partial\rho/\partial n = 0$, $\partial p/\partial n = 0$, $\partial T/\partial n = 0$ となるように設定した。また、計算領域内の現象が x_2 , x_3 方向とも一様になるように、 $x_2 = 0$, l_2 および $x_3 = 0$, l_3 の壁面では流速に free-slip 条件を課した。一方、 $x_1 = 0$, l_1 の壁面では、壁面に垂直な流速成分を 0 とした。

計算条件は、以下のように設定した。式 (12), (16), (19) の右辺に含まれる移流項に、5 次精度の TVD スキーム⁷⁾を用いた。また、パラメータ $\alpha_\rho = \alpha_{\rho T} = \beta_{\rho T} = \alpha_{\rho u_i} = 1.0$ とした。計算セル数は $902 \times 32 \times 32$ とした。時間刻みは $\Delta t = 2.0 \times 10^{-6}$ [s] とした。

実時間 $t = 7.0 \times 10^{-4}$ [s] における密度の x_1 方向の分布と理論解を図-3 に示す。既報⁵⁾と比較して、流速の評価を u_i^* , $u_{b,i}^*$ に統一することにより、 $x_1 = 0.85$ [m] 付近の数値振動が抑えられ良好な結果が得られた。また、 $t = 0$ [s] での質量の総和 M_0 と $t = t'$ [s] での質量の総和 M' を用いて、 $t = t'$ [s] における無次元質量誤差を $err = (M_0 - M')/M_0$ と表す。全ての時刻にわたって err のオーダーは 10^{-16} と十分小さく、質量の保存性が高精度で満たされていることを確認した。

音速に対するクーラン数の最大値 C_{max} は 0.724 となった。ここで C_{max} は音速 C_s を用いて次のように表される。

$$C_{max} = \max \left(\frac{C_s \Delta t}{\Delta x_1} \right)$$

$$C_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

式 (12), (16), (19) のパラメータが $\alpha_\rho = \alpha_{\rho T} = \beta_{\rho T} = \alpha_{\rho u_i} = 0$ のとき、つまり陽的解法るとき、音速に対するクーラン数が 0.5 を超えるような時間刻み Δt を初期条件として設定すると、計算が破綻することを確認した。すなわち、陰的解法を用いることで時間刻み Δt をより大きく設定し、計算時間を短縮することが可能で

あると考えられる。

b) 3次元爆風伝搬問題

次に計算手法の 3 次元計算領域への適用性を確認するため、3 次元爆風伝搬問題の計算を行った。図-4 に示すように、1 辺が 2.0 [m] の立方体キャビティの中心に、半径 $r = 0.4$ [m] の高圧・高密度の球状領域を設定する。以降では $x_2 = l_2/2$, $x_3 = l_3/2$ における計算結果を 3 次元爆風伝搬問題の計算結果とする。

作動流体は理想気体に近似された、圧縮性流体であり、流体の物性値としては、空気の値を利用する。すなわち、比熱比 γ は 1.4、定積比熱 C_v は 7.17×10^2 [J/(kg·K)] とした。また、後述する文献⁸⁾との比較のため、この計算では流体の粘性と熱伝導率は 0 としている。初期条件として、密度、流速、圧力は以下のように設定した。ここで、高圧・高密度の球状領域内は下添字 in 、球状領域外は下添字 out で表される。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{in} &= 1.0 \text{ [kg/m}^3\text{]} & \rho_{out} &= 0.125 \text{ [kg/m}^3\text{]}, \\ u_{1in} &= 0.0 \text{ [m/s]} & u_{1out} &= 0.0 \text{ [m/s]}, \\ u_{2in} &= 0.0 \text{ [m/s]} & u_{2out} &= 0.0 \text{ [m/s]}, \\ u_{3in} &= 0.0 \text{ [m/s]} & u_{3out} &= 0.0 \text{ [m/s]}, \\ p_{in} &= 1.0 \text{ [Pa]} & p_{out} &= 0.1 \text{ [Pa]}, \end{aligned} \right\}$$

また、温度 T_{in} , T_{out} は密度と圧力を用いて状態方程式を満たすように設定した。

境界条件としては、密度、温度、圧力は全ての壁面上で $\partial\rho/\partial n = 0$, $\partial p/\partial n = 0$, $\partial T/\partial n = 0$ となるように設定した。また、流速については non-slip 条件を課した。

計算条件は、以下のように設定した。式 (12), (16), (19) の右辺に含まれる移流項に、5 次精度の TVD スキーム⁷⁾を用いた。計算セル数は $802 \times 802 \times 802$ とした。時間刻み Δt は 1.0×10^{-4} [s] とした。また、計算負荷の大きい問題を効率よく解くため、計算プログラムは領域分割法に基づき、flat MPI を用いて並列化されている。

図-4 3次元爆風伝搬問題の計算領域

図-5 計算結果と参照解⁸⁾の比較 ($t = 0.25$ [s])

図-6 プロセス数とスピードアップ

実時間 $t = 0.25$ [s] における計算結果と参照解⁸⁾を図-5に示す。図-5中の内部エネルギーは、計算結果の温度から式(5)を用いて求めた。 $1.61 \leq x_1 \leq 1.79$ 付近の内部エネルギー、密度、圧力の分布に少しずれが生じているが、概ね良好な結果が得られたと考えられる。

図-6に示すように、並列計算の効率を確認した。計算セルは $102 \times 102 \times 102$ とした。計算には京都大学のスーパーコンピュータ Cray-XE6 (AMD Opteron 2.5GHz, 32 cores/node, 64 GB memory / node) を用いた。最大コア数は512コア(16ノード)とした。図-6から、プロセス数に対するスピードアップは線形に近く、本手法において、flat MPIを用いた並列化は効率よく計算時間を短縮できると考えられる。

(2) 低マッハ数流れ場

水平面加熱条件下での3次元自然対流現象への適用性を検証するため、ベナール対流の計算を行った。水平流体層において温度成層では、密度の小さな流体が大きな流体の上に存在するため、自然対流は発生しない。一方、底面が高温で上面が低温の場合では、図-7に示す l_3 および上下面の温度差 $T_h - T_c$ に基づくレイリー数 $Ra = g\beta(T_h - T_l)l_3^3/\nu\alpha$ が1708以上で、流体が上昇して下降するベナール対流が観察される⁹⁾。ここで、 α 、 β 、 ν はそれぞれ熱拡散率、体膨張係数、動粘度を表す。

解析に用いた計算領域と初期条件を図-7に示す。計算領域は長さ $l_1 = l_2 = 8.906 \times 10^{-2}$ [m]、 $l_3 = 4.453 \times 10^{-2}$ [m] の3次元直方体領域である。作動流体は理想気体に近似された圧縮性流体であり、流体の物性値とし

図-7 ベナール対流の計算領域

図-8 定常状態における温度の等値面

て、300 [K] のときの空気の値を利用する．比熱比 γ は 1.4，定積比熱 C_v は 7.17×10^2 [J/(kg·K)]，熱伝導率 κ は 2.614×10^{-2} [W/(m·K)]，粘性係数 μ は 1.862×10^{-5} [Pa·s] とした．

初期条件として，加熱・冷却面の温度差を $\Delta T = 1$ [K]，冷却面の温度を $T_c = 300$ [K]，加熱面の温度を $T_h = T_c + \Delta T = 301$ [K]，領域内で均一に温度は $T = T_c + \Delta T/2 = 300.5$ [K]，流速は 0 [m/s] とした．圧力は $x_3 = l_3/2$ で 1 [atm] となるように，重力加速度を考慮して上下壁面を含め，鉛直方向に分布を与えた．また，密度はそれぞれの領域で状態方程式から定めている．熱拡散率は $\alpha = 2.244 \times 10^{-5}$ [m²/s]，体膨張係数は $\beta = 3.328 \times 10^{-3}$ [K⁻¹] とした．上述の計算条件は，実時間 $t = 0$ [s] のとき $x_3 = l_3/2$ の平面上で，プラントル数が $Pr = 0.71$ ，レイリー数が $Ra = 8.0 \times 10^3$ となるように定めた．

境界条件として，全ての壁面の流速に non-slip 条件を課した． $x_3 = 0$ ， l_3 [m] ではそれぞれ，温度は T_h [K] の高温壁， T_c [K] の低温壁とし，圧力は重力加速度を考慮して定めた．密度はそれぞれの領域で状態方程式から定めている．また，それ以外の壁面上では，密度，

温度，圧力は $\partial\rho/\partial n = 0$ ， $\partial p/\partial n = 0$ ， $\partial T/\partial n = 0$ となるように設定した．

計算条件は，以下のように設定した．式 (12)，(16)，(19) の右辺に含まれる移流項に，MUSCL 型の 3 次精度の TVD スキーム⁷⁾を用いた．また，パラメータ $\alpha_\rho = \alpha_{\rho T} = \beta_{\rho T} = \alpha_{\rho u_i} = 1.0$ とした．計算セル数は $62 \times 62 \times 32$ とした．時間刻みは $\Delta t = 2.0 \times 10^{-6}$ [s] とした．また，計算プログラムを OpenMP を用いて並列化することで，計算時間の短縮を図った．

上述の計算条件に従い，定常状態になるまで計算を行った．図-8 に定常状態における温度の等値面を示す．ここで，等値面は定常状態における温度の最大値，最小値の中間の値を用いて描画した．等値面の形状から，中央部では上向き，側壁面付近では下向きの流れのベナール対流が生じていることがわかる．図-9 に定常状態における温度の等高線を示す．各断面の温度分布は，Hernandez ら¹⁰⁾の計算結果と比較して，加熱面・冷却面付近で差異があるが，定性的には計算結果と概ねよく一致した．また，表-1 に示すように， $x_1 = (1/2)l_1$ ， $x_3 = (1/2)l_3$ における，定常状態でのヌセルト数の最大値 Nu_{max} は参照解¹⁰⁾と良好に一致した．なお，文献¹⁰⁾との比較のため， Nu_{max} は次のように計算した．

$$Nu_{max} = \max \left(u_3 T' - \frac{\partial T'}{\partial x_3} \right)$$

$$T' = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$$

以上より，本手法は低マッハ数の自然対流現象を概ね適切に再現できると考えられる．

次に，OpenMP による並列化の有効性を検討した．上述の同様の計算条件で 100 ステップまで計算を行う．計算には前節と同様に，京都大学のスーパーコンピュータ Cray-XE6 を用いた．図-10 に示すように，並列スレッド数が 32 並列では逐次計算と比べて，約 5.8 倍高速となることが確認できた．ここで， T_{sor} は SOR 法の累計計算時間， T_{else} はそれ以外の累計計算時間を表す．

最後に計算の安定性について検討を行った．上述と同様の計算条件で，音速に対するクーラン数が 0.5 を超えるような時間刻み Δt を設定すると，陰的解法・陽的

表-1 定常状態におけるヌセルト数の最大値
($x_1 = (1/2)l_1$ ， $x_3 = (1/2)l_3$)

	Present	Ref. ¹⁰⁾
Nu_{max}	24.44	23.98

(a) $x_2 = (1/15) l_2$

(b) $x_2 = (1/2) l_2$

(c) $x_3 = (2/15) l_3$

(d) $x_3 = (14/15) l_3$

図-9 定常状態における等温線

解法いずれの場合でも計算が破綻することを確認した。陰的解法が陽的解法と比較して、時間刻みを大きく設定できない原因として、基礎式の拡散項を陰的に評価していないことが考えられる。低マッハ数の圧縮性流れに対し、音速に対するクーラン数をより大きく設定

図-10 逐次実行と 32 並列の計算時間の比較

すると同時に、安定に計算を行うことが今後の検討課題である。

4. 結言

本論文では、新たに提案された 2 次元圧縮性流体解法の 3 次元場への拡張および、3 次元計算領域の高低マッハ数流れに適用可能であるか検討した。

高マッハ数流れ場に対する適用性を検討するため、1 次元衝撃波伝搬問題、3 次元衝撃波伝搬問題の計算を行った。その結果、理論解および参照解と良好な一致が得られたことから、高マッハ数である 3 次元衝撃波伝搬を正確に再現できると考えられる。また、陰的アルゴリズムを用いることで、陽的解法と比較して、計算時間を短縮することが可能であることを確認した。今後の適用課題としては、衝撃波を伴う物体周りの超音速流れへの適用が挙げられる。

低マッハ数の流れ場に関して、ベナール対流の計算を行った。既存の数値解との比較においても、両者の間に定性的に良好な一致が確認できたことから、本手法はベナール対流による複雑な温度場の形成も概ね適切に再現できるといえる。今後の検討課題としては、音速に対するクーラン数をより大きく設定すると同時に安定に計算を行うこと、各種の低マッハ数の圧縮性流れに対する適用と、それらの結果に対する、定量的な検証が挙げられる。また、本論文では温度差の小さい問題を想定したため、 κ , μ は定数として扱ったが、大きな温度差を伴う問題については熱伝導率、粘性係数の変化の考慮も必要であると考えられる。

3次元爆風伝搬問題, ベナール対流の計算に対してそれぞれ flat MPI, OpenMP を用いて並列化により計算時間の短縮を図り, 概ね良好な結果が得られた. 今後の検討課題としては, ハイブリッド並列化や, メニーコアシステム上におけるディレクティブベースの並列化が挙げられる.

参考文献

- 1) 苗村善一, 西田秀利, 里深信行: 高マッハ数における圧縮性乱流に対するエネルギー力学, 第14回数値流体力学シンポジウム, No. A01-3, 2000.
- 2) 石坂浩一, 山本悟, 大宮司久明: 非定常遷音速翼列流れ解析に適した数値シュミレータの開発, 日本機械学会論文集 B 編, No. 91-0273A, pp. 4130–4135, 1991.
- 3) 姫野武洋, 渡辺紀徳: 低重力環境における熱流体管理に関する研究, 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 69, pp. 266–273, 2003.
- 4) 竹田浩文, 亘真澄, 白井孝治, 三枝利有: コンクリートキャスクの実用化研究- キャニスタ内ヘリウムの漏えい検知方法の開発 -, 電力中央研究報告 N04031, 2005.
- 5) 青木一真, 牛島省, 鳥生大祐: 圧縮性流体に対する保存型陰的計算アルゴリズムの提案, 土木学会論文集 A2, Vol. 69, pp. 51–58, 2013.
- 6) 牛島省, 瀬津家久: 自由液面流体に対するコロケート格子を用いた陰的計算法 (C-ISMAC 法) の適用性, 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 68, pp. 3252–3258, 2002.
- 7) S.Yamamoto, and H.Daiguji, : Higher-Order-Accurate Upwind Schemes for Solving the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations, *Computers Fluids*, Vol. 22, pp. 259–270, 1993.
- 8) Toro, E. F.: *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, pp. 586–688, 1999.
- 9) 日本機械学会: 伝熱工学, 丸善出版, 2005.
- 10) Hernandez, R. and Frederick, R. L.: Spatial and thermal features of three dimensional Rayleigh-Benard convection, *J.Heat Mass Transfer*, Vol. 37, No. 3, pp. 411–424, 1994.

(2014.6.20 受付)

PARALLEL 3D COMPUTATIONAL METHOD FOR COMPRESSIBLE FLUIDS WITH HIGH AND LOW MACH NUMBERS

Kazuma AOKI, Satoru USHIJIMA, Nobu MIYAGI, Daisuke TORIU

This paper presents a parallel 3D computational method for compressible flows with both high and low Mach numbers. The present numerical method is applicable to shock wave problems and is able to capture discontinuity without artificial viscosity. In order to solve large scale problems efficiently, the computations were parallelized by flat MPI or OpenMP. The proposed computational method was applied to the spherical explosion problem with high Mach numbers as well as the Rayleigh-Benard convection with low Mach numbers. It was shown that the conservation of mass and other physical properties are sufficiently satisfied and that the predicted results agree reasonably with the theoretical values and reference values.