正弦波荷重下での内部摩擦発熱を考慮した 一体型熱構造連成解析

生野 達大¹・橋本 学²・奥田 洋司³

¹非会員 学(工) 東京大学 新領域創成科学研究科 (〒277-8563 千葉県柏市柏の葉5-1-5)
E-mail:shono@multil.k.u-tokyo.ac.jp

²非会員 博(工) 東京大学講師 新領域創成科学研究科 (〒277-8563 千葉県柏市柏の葉5-1-5)
E-mail:ghashimoto@k.u-tokyo.ac.jp

³非会員 工博 東京大学教授 新領域創成科学研究科 (〒277-8563 千葉県柏市柏の葉5-1-5)
E-mail:okuda@k.u-tokyo.ac.jp

正弦波荷重下での線形粘弾性体の摩擦発熱について、一体型熱構造連成解析の枠組みを適用し、定式化を行った。平衡方程式と熱伝導方程式の弱形式を線形化することで、一体型連成による剛性方程式に必要な成分を求めた。本解析手法と、*staggered* 法に基づく従来手法を、粘弾性ダンパーに関する笠井らの解析モデルに適用して、粘弾性ダンパー内の特定の位置における温度の時刻歴を解析し、手法の検証を行った。検証の結果、本解析手法では、時間増分を大きくした場合でも、時間増分を小さくした場合の温度時刻歴に対して、相対誤差を抑えることができることを確認した。

Key Words : *finite element analysis, monolithic coupling, thermomechanical coupling, viscoelastic material, frictional heat, staggered scheme*

1. 緒言

近年、ガラス、プラスチック、ゴムなどの高分子材料、生体材料の利用は、ますます盛んになっている。これらの材料は、粘性と弾性がいずれも無視できないことが多く、粘弾性体としてモデル化する必要がある。そこで、市販コードの汎用コード中に、粘弾性体のモデルを実装する方法を確立することで、粘弾性解析を普及させるための取り組みが進められている¹⁾。

物質を粘弾性体としてモデル化した場合、温度の影響をどのように取り扱うかが問題となる。粘弾性体は、外から加えられた運動エネルギーを、内部摩擦により熱エネルギーに変換することで、蓄積、散逸させる効果がある。この性質を用いて、耐衝撃性や衝突安全を実現することができるため、粘弾性体は制振ダンパーといった部材に利用されている。一方、この性質により、大変形が加えられる場合や、変形が長時間にわたって作用する場合は、内部摩擦発熱による粘弾性体の温度上昇を無視できない。他方で、粘弾性体は、応力-ひずみ特性が持つ温度依存性を無視できないことが多い。そのため、熱粘弾性解析では、伝熱と構造変形の双方向連成を考慮する必要がある、このようなアプローチに基づいて熱粘弾性

体を解析した事例が幾つか報告されている^{2)~9)}。

双方向連成手法は、伝熱が構造変形に与える影響、構造変形が伝熱に与える影響をいずれも考慮する連成手法である。双方向連成手法はさらに、分離型手法と一体型手法の二つに分けられる¹⁰⁾。分離型手法の一つである *staggered* 法では、時間ステップ毎に、運動方程式と、熱伝導方程式を交互に解くことで連成を実現している。この方法では、計算負荷が小さくなる反面、熱応力や摩擦発熱など、熱と構造の相互作用項を厳密に取り扱うことができない。一方、一体型手法では、運動方程式と熱伝導方程式を1つの連立一次方程式とし、この方程式を解くことで連成を実現する。この手法では、熱と構造の相互作用項を厳密に計算することができる。一般に、熱と構造の相互作用項を厳密に計算した方が精度は良いが、計算負荷も大きくなる。

粘弾性体の摩擦発熱の定式化は、厳密には熱力学第一法則、第二法則を満たすように構成則を導出することで行われる¹¹⁾。しかし、粘弾性体のひずみが微小で線形粘弾性体とみなすことができ、なおかつ粘弾性体に正弦波荷重が加わる場合は、より簡略なモデル化を行うことができる。線形粘弾性体に正弦波荷重が加わった直後は、粘弾性により時刻に依存する振る舞いを見せるが、ある

程度時間が経つと、粘弾性体は定常振動を始める。このとき粘弾性体は、応力振幅とひずみ振幅の関係弾性体のものとして与えることができ、荷重により加えられたエネルギーの一部が、摩擦発熱へと転化するものとみなすことができる^{5)~9)}。このモデルでは、適用範囲は有限変形を考慮したモデル化に比べ狭まるものの、応力、ひずみの履歴積分を行う必要がなくなり、計算負荷が小さくなるほか、貯蔵剛性率といった動的粘弾性測定によって得ることができる材料物性値¹²⁾を用いることができるといった利点がある。

このアプローチに基づく熱構造双方向連成解析は、Gopalakrishnaら⁵⁾、笠井ら⁶⁾、Cazenoveら⁸⁾、Lima⁹⁾らによって報告されており、長時間振動下の制振部材内の温度分布をある程度再現できることが示されている。しかしながら、いずれの解析結果でも、温度の時刻歴の計算結果は実験結果に対し、温度の立ち上がりや定常時の温度について差異が存在する。また、いずれの解析でも、熱構造双方向連成手法として staggered 法を採用しており、剛性の温度依存性や摩擦発熱といった、熱と構造の相互作用を厳密に取り扱っていない。粘弾性体の摩擦発熱現象は、発熱量が小さいため、強い非線形性を持つ現象ではないが、多くの時間ステップを要する。従って、各時間ステップで発生した誤差が蓄積することで、解析終了時の温度に誤差が生じる可能性が考えられる。

以上の背景を踏まえて、本論文では、正弦波荷重下での線形粘弾性体の内部摩擦発熱現象を、熱構造一体型連成解析の枠組みにおいて解析することを試みる。具体的には、剛性の温度依存性や摩擦発熱といった、熱と構造の相互作用を一体型連成手法により連成させる手法について、定式化を行う。特に、内部摩擦発熱の計算に staggered 法を適用した従来の手法に比べ、熱と構造の相互作用を厳密に取り扱う一体型連成手法による本解析手法では、解析能力にどのような差異が生じるかを検証することを目的とする。

本論文で扱う一体型連成手法が正しく実装されていることを確認するため、笠井らによる解析事例⁶⁾に本解析手法を適用する。笠井らの解析事例は、長時間振動下での粘弾性ダンパーの温度時刻歴を解析したもので、笠井らが提案した構成則^{13)~15)}に基づく線形粘弾性体に正弦波荷重が加わる場合を対象としており、連成手法として staggered 法が採用されている。本論文では、笠井らのモデルと同様の解析モデルを作成し、一体型連成手法と従来の staggered 法によって解析を行うことで、実装が正しくなされているかを検証する。また、本論文で扱う一体型連成手法と staggered 法の性能の差異を検証するため、笠井らによる解析条件より発熱量が大きくなる条件で解析を行う。結果を比較することで、熱と構造の相互作用を厳密に評価することが、解析結果に与える影響につい

て検討する。

本論文は、次のように構成されている。2 節では、一体型連成手法による熱構造連成解析の枠組みについて述べる。3 節では、本論文で取り扱う構造の支配方程式、伝熱の支配方程式、境界条件を記述する。特に、粘性による応力応答を直接取り扱う場合と、正弦波荷重を仮定した簡略なモデルについて、構成則の差について触れる。4 節では、本論文で提案する、正弦波荷重下での線形粘弾性体の摩擦発熱を、熱構造一体型連成解析の枠組みに適用するための定式化について述べる。5 節では、本解析手法の計算能力を検証するための数値計算例について説明する。6 節で、本解析手法、及び staggered 法に基づく従来手法を数値計算例に適用した結果について述べる。7 節で、結言を述べる。

2. 数値計算法

熱構造連成問題では、各時刻における変位場と温度場を求めるために、次式(1)を解くことを考える。

$$\begin{cases} {}^t\mathbf{q}_s({}^t\mathbf{u}, {}^tT) = {}^t\mathbf{f}_s \\ {}^t\mathbf{q}_T({}^t\mathbf{u}, {}^tT) = {}^t\mathbf{f}_T \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 t は時刻、 $\mathbf{u}$ は変位ベクトル、 T は絶対温度、 $\mathbf{q}_s$ は構造に関する内力ベクトル、 $\mathbf{f}_s$ は構造に関する外力ベクトル、 $\mathbf{q}_T$ は温度に関する内力ベクトル、 $\mathbf{f}_T$ は温度に関する外力ベクトルである。左上の添え字 t は、時刻 t における値であることを示す。今、 Δt は時間増分とし、 $t' = t + \Delta t$ と置く。時刻 t における変位場、温度場が既知であると仮定し、時刻 t' における変位場、温度場を求めることを考える。

最も単純な分離型連成である staggered 法では、式(1)を解く代わりに、次式(2)を解くことで、時刻 t' における変位場、温度場を求める¹⁰⁾。

$$\begin{cases} {}^{t'}\mathbf{q}_s({}^{t'}\mathbf{u}, {}^tT) = {}^{t'}\mathbf{f}_s \\ {}^{t'}\mathbf{q}_T({}^{t'}\mathbf{u}, {}^tT) = {}^{t'}\mathbf{f}_T \end{cases} \quad (2)$$

式(2)の上式は、温度は前の時刻における温度を参照しているため、未知数は変位のみとなっている。そこで、式(2)の上式を解き、その結果を用いて式(2)の下式を解くことで、 t' における温度場を求める。このステップを繰り返すことで、構造と伝熱の相互作用を考慮しながら、変位場、温度場を求めていく。

また、同一の時間ステップ内で変位場、温度場に関する方程式を反復計算することで、時刻 t' における変位場、温度場を求める手法を iterative staggered 法という¹⁶⁾。例えば、iterative staggered 法の例として、block Gauss-Seidel 法の式を、次式(3)に示す。

$$\begin{cases} {}^{i'}\mathbf{q}_s^{(m)}({}^{i'}\mathbf{u}^{(m)}, {}^{i'}T^{(m-1)}) = {}^{i'}\mathbf{f}_s \\ {}^{i'}\mathbf{q}_T^{(m)}({}^{i'}\mathbf{u}^{(m)}, {}^{i'}T^{(m)}) = {}^{i'}\mathbf{f}_T \end{cases} \quad (3)$$

式 (3) において、右上の括弧つきの添え字 m は block Gauss-Seidel 法の反復ループの回数を表す。block Gauss-Seidel 法では、第 $m-1$ 回目の反復ループにおける変位場、温度場が既知であるとして、まず上式により第 m 回目の反復ループにおける変位場を解く。次に、求めた変位を用いて、第 m 回目の反復ループにおける温度場を解く。このループを、残差が収束するまで繰り返すことで、連成項を厳密に評価することができる。

本論文では、一体型連成手法を採用する。一体型連成では、時刻 t' における変位場と温度場を、次式 (4) のように求める¹⁰⁾。

$$\begin{cases} {}^{i'}\mathbf{q}_s({}^{i'}\mathbf{u}, {}^{i'}T) = {}^{i'}\mathbf{f}_s \\ {}^{i'}\mathbf{q}_T({}^{i'}\mathbf{u}, {}^{i'}T) = {}^{i'}\mathbf{f}_T \end{cases} \quad (4)$$

構造一体型連成有限要素解析のアルゴリズムを図-1 に示す。式 (4) を解くにあたって、 ${}^{i'}\mathbf{q}_s$ と ${}^{i'}\mathbf{q}_T$ が非線形である場合、Newton-Raphson 法による反復ループを構成する必要がある。本解析手法では、構造に関して微小変形を取り扱う場合でも、剛性率の温度依存性や摩擦発熱項が非線形になるため、図-1 に示すように Newton-Raphson 法の反復ループを構成して計算を行う。

図-1 に示すアルゴリズムの主要部の計算手順は、以下の手順 (P1) ~ (P6) のようになる。

(P1) 境界条件の入力

境界条件に基づいて、外力ベクトル ${}^{i'}\mathbf{f}_s$ 、 ${}^{i'}\mathbf{f}_T$ を計算する。境界条件の具体的な形式については、次節で述べる。

(P2) 接線剛性マトリクスの計算

構造に関する成分 $[{}^{i'}K_{ss}]$ 、熱が構造に与える影響を表す成分 $[{}^{i'}K_{st}]$ 、構造が熱に与える影響を表す成分 $[{}^{i'}K_{ts}]$ 、熱に関する成分 $[{}^{i'}K_{tt}]$ を計算する。本論文では、正弦波荷重下での線形粘弾性体で、材料物性値の温度依存性を考慮する場合について、これらの成分を計算する方法を提案する。取り扱う構成則の具体的な形式については 3 節で述べる。また、これらのマトリクス成分の具体的な定式化については、4 節で述べる。

(P3) 連立一次方程式の求解

第 i 回目の Newton-Raphson 法の反復ループにおける接線剛性方程式は、次式 (5) で与えられる。

$$\begin{bmatrix} {}^{i'}K_{ss}^{(i-1)} \\ {}^{i'}K_{ts}^{(i-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{i'}K_{st}^{(i-1)} \\ {}^{i'}K_{tt}^{(i-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}^{(i)} \\ \Delta T^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{i'}\mathbf{f}_s - {}^{i'}\mathbf{q}_s^{(i-1)} \\ {}^{i'}\mathbf{f}_T - {}^{i'}\mathbf{q}_T^{(i-1)} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式 (5) において、 Δ は時刻 t から t' への増分を表す記号である。式 (5) を数値計算により求める。

図-1 熱構造一体型連成有限要素解析のアルゴリズム

(P4) 変位場、温度場の更新

式 (5) を解くことで、変位増分と温度増分が求まるので、これらを用いて変位場、温度場を次式 (6), (7) により更新する.

$${}^{t'}\mathbf{u}^{(i)} + \Delta\mathbf{u}^{(i+1)} \rightarrow {}^{t'}\mathbf{u}^{(i+1)} \quad (6)$$

$${}^{t'}T^{(i)} + \Delta T^{(i+1)} \rightarrow {}^{t'}T^{(i+1)} \quad (7)$$

(P5) 内力の更新

式 (6), (7) により求められた ${}^{t'}\mathbf{u}^{(i+1)}$, ${}^{t'}T^{(i+1)}$ を用いて、内力を更新する. 内力の具体的な形式については、4 節で述べる.

(P6) 残差、相対残差の計算

(P5) で求められた内力を用いて、構造に関する残差 $r_s^{(i+1)}$, 相対残差 $r_{rs}^{(i+1)}$ 及び伝熱に関する残差 $r_T^{(i+1)}$, 相対残差 $r_{rT}^{(i+1)}$ をそれぞれ次式 (8) ~ (11) によって計算する.

$$\|{}^{t'}\mathbf{f}_s - {}^{t'}\mathbf{q}_s^{(i+1)}\| \rightarrow r_s^{(i+1)} \quad (8)$$

$$\frac{r_s^{(i+1)}}{\|{}^{t'}\mathbf{f}_s\|} \rightarrow r_{rs}^{(i+1)} \quad (9)$$

$$\|{}^{t'}\mathbf{f}_T - {}^{t'}\mathbf{q}_T^{(i+1)}\| \rightarrow r_T^{(i+1)} \quad (10)$$

$$\frac{r_T^{(i+1)}}{\|{}^{t'}\mathbf{f}_T\|} \rightarrow r_{rT}^{(i+1)} \quad (11)$$

残差、あるいは相対残差が閾値 ε 以上であれば、手順 (P1) に戻る. そうでなければ、時刻 t' における温度、変位を確定させ、時間ステップを時間増分 Δt だけ進める. この手順を、あらかじめ定めた総時間ステップ数だけ繰り返す.

図-1 に示すアルゴリズムを、並列構造解析ソフトウェア FrontISTR¹⁷⁾ に組み込む. FrontISTR は、オープンソースの並列構造解析ソフトウェアであり、構造解析と熱伝導解析については、多くのベンチマークを解くことによって、十分検証がなされている¹⁷⁾. 本論文では、これらのコードに基づいて、新たに $[K_{sp}]$, $[K_{ts}]$ を計算するコードを加え、構造と伝熱を一体型連成により解析するソルバーを実装する.

3. 支配方程式

本節では、本論文で取り扱う支配方程式について説明する. まず (1) 項で、材料物性値の温度依存性を考慮した、正弦波荷重下での線形粘弾性体について、応力-ひずみ関係式と摩擦発熱項を導出する手順について述べる. (1) 項の内容を踏まえたうえで、(2) 項で構造の支配方程式、(3) 項で伝熱の支配方程式、(4) 項で境界条件について述べる.

(1) 構成則の導出

まず、次式 (12) で表せるような、温度依存性を考慮しない線形粘弾性構成則を考える¹¹⁾.

(線形粘弾性構成則)

$${}^t\boldsymbol{\sigma} = \int_{-\infty}^{t'} {}^{t-t'}\mathbf{G} : \frac{D{}^t\boldsymbol{\varepsilon}}{Dt'} dt' \quad (12)$$

ここで、 ${}^t\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、 ${}^t\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソルを表す. また、 $\mathbf{G}$ は粘弾性を表す 4 階のテンソルであり、線形粘弾性体のモデルにどのようなモデルを採用したかで決定される. 上式において、荷重が特定の周波数を持つ正弦波荷重であり、それに対する応力応答が次式のように定常状態になっているものとして、ひずみ、応力が次式 (13), (14) のように書けると仮定する¹²⁾.

$${}^t\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 e^{i\omega t} \quad (13)$$

$${}^t\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* e^{i\omega t} \quad (14)$$

ここで、 i は虚数単位であり、 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ は定数、 $\boldsymbol{\sigma}^*$ は複素定数である. また、 ω は正弦波荷重の角周波数である.

式 (13), (14) を式 (12) に代入して、実部と虚部に分解することで、次式 (15) が得られる¹²⁾.

$$\boldsymbol{\sigma}^* = ({}^\omega\mathbf{A} + i{}^\omega\mathbf{B}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (15)$$

ここで、 ${}^\omega\mathbf{A}$ は ${}^t\mathbf{G}$ の Fourier 変換の虚部に ω を乗じること、 ${}^\omega\mathbf{B}$ は ${}^t\mathbf{G}$ の Fourier 変換の実部に ω を乗じることと求まる. このとき、1 周期の間に粘弾性体になされる単位体積あたりの仕事は、次式 (16) のように計算できる¹²⁾.

$$\int_0^{2\pi/\omega} \text{Re}[\boldsymbol{\sigma}] : \frac{d \text{Re}[\boldsymbol{\varepsilon}]}{dt} dt = \pi\omega : {}^\omega\mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (16)$$

荷重 1 周期の間に、粘弾性体が元の形状に戻ると仮定すると、式 (16) で与えられる仕事は、粘弾性体内部で摩擦発熱に転化し散逸したものとみなせる^{5)~9)12)14)15)}. 従って、荷重 1 周期の間に生じる発熱量を一定とみなせば、単位時間、単位体積あたりの粘弾性体の摩擦発熱 tQ_v は、次式 (17) のように近似できる¹²⁾.

$${}^tQ_v = \frac{\omega}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_0 : {}^\omega\mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (17)$$

従って、粘弾性体の摩擦発熱は、次のように評価できる. まず、構成則として、次式 (18) のような構成則を考える.

$${}^t\boldsymbol{\sigma} = {}^\omega\mathbf{D} : {}^t\boldsymbol{\varepsilon} \quad (18)$$

ここで、 ${}^\omega\mathbf{D}$ は 4 階のテンソルであり、その成分 ${}^\omega D_{pqrs}$ は、 ${}^\omega\mathbf{A}$ の成分 ${}^\omega A_{pqrs}$ と ${}^\omega\mathbf{B}$ の成分 ${}^\omega B_{pqrs}$ を用いて、次式 (19) のように与えられる.

$${}^\omega D_{pqrs} = \sqrt{({}^\omega A_{pqrs})^2 + ({}^\omega B_{pqrs})^2} \quad (19)$$

式 (18) は、形式上線形弾性体の構成則と一致する. そこで、まず構成則を式 (18) として、正弦波荷重の振幅を荷重として与える静解析を実施する. 次に、得られた変位に基づいてひずみを計算し、次式 (20) に代入することで、粘弾性体内での摩擦発熱が求めることができる.

$${}^tQ_v = \frac{\omega}{2} {}^t\boldsymbol{\varepsilon} : {}^o\mathbf{B} : {}^t\boldsymbol{\varepsilon} \quad (20)$$

材料物性値の温度依存性は、 ${}^o\mathbf{A}$ 、 ${}^o\mathbf{B}$ が tT の関数になるものとして考慮する。このとき周波数が一定であり、 tT は t の関数であることから、 ${}^o\mathbf{B}$ 、 ${}^o\mathbf{D}$ も t の関数となるので、式 (18)、(20) を次式 (21)、(22) のようにそれぞれ書き直す。

(本論文で取り扱う構成則)

$${}^t\boldsymbol{\sigma} = {}^t\mathbf{D} : {}^t\boldsymbol{\varepsilon} \quad (21)$$

(粘弾性体の摩擦発熱)

$${}^tQ_v = \frac{\omega}{2} {}^t\boldsymbol{\varepsilon} : {}^t\mathbf{B} : {}^t\boldsymbol{\varepsilon} \quad (22)$$

(2) 構造の支配方程式

前項での議論を踏まえて、微小変形、正弦波荷重下での粘弾性、及び材料物性値の温度依存性を考慮し、次式 (23)、(24) と先述の式 (21) で与えられる支配方程式を取り扱う^{5)~9)18)19)}。

(平衡方程式)

$$\nabla \cdot {}^t\boldsymbol{\sigma} + \rho {}^t\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (23)$$

(ひずみの定義式)

$${}^t\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes {}^t\mathbf{u} + (\nabla \otimes {}^t\mathbf{u})^T) \quad (24)$$

ここで、 ∇ はナブラ演算子、 ρ は密度、 ${}^t\mathbf{b}$ は単位質量あたりの体積力、 $\mathbf{0}$ はゼロベクトルである。

(3) 伝熱の支配方程式

次式 (25) で与えられる支配方程式と、式 (20) で与えられる摩擦発熱を取り扱う⁶⁾⁷⁾¹⁸⁾。

(熱伝導方程式)

$$\rho C_v \frac{D^tT}{Dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla {}^tT) + {}^tQ_v \quad (25)$$

ここで、 C_v は比熱、 κ は熱伝導率である。

(4) 境界条件

以下の4つの境界条件を取り扱う¹⁸⁾¹⁹⁾²⁰⁾。

(力学的境界条件)

$${}^t\mathbf{n} \cdot {}^t\boldsymbol{\sigma} = {}^t\mathbf{t}_b \quad \text{on } \Gamma_t \quad (26)$$

(幾何学的境界条件)

$${}^t\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u}_b \quad \text{on } \Gamma_u \quad (27)$$

(伝熱に関するDirichlet型境界条件)

$${}^tT = {}^tT_b \quad \text{on } \Gamma_T \quad (28)$$

(伝熱に関するNeumann型境界条件)

$${}^t\mathbf{n} \cdot {}^t\mathbf{h} = {}^t\mathbf{n} \cdot {}^t\mathbf{h}_b \quad \text{on } \Gamma_h \quad (29)$$

ここで、 ${}^t\mathbf{n}$ は単位法線ベクトル、 Γ_t は ${}^t\mathbf{t}_b$ が指定される領域、 Γ_u は ${}^t\mathbf{u}_b$ が指定される領域、 Γ_T は tT_b が指定される領域、 ${}^t\mathbf{h}$ は熱流束ベクトル、 Γ_h は ${}^t\mathbf{h}_b$ が指定される領域である。構造と伝熱に関する境界条件は、それぞれ独

立に指定することができる。ただし、力学的境界条件と幾何学的境界条件、及び伝熱に関する Dirichlet 型境界条件と Neumann 型境界条件を指定する領域は、重複してはならない。

(1) 項で述べたように、本論文では ${}^t\mathbf{t}_b$ 、 ${}^t\mathbf{u}_b$ として、単一周波数成分を持つ外力、強制変位の振幅を与え、弾性静解析を行うことで、粘弾性体内の摩擦発熱を計算する。

4. 接線剛性マトリクス成分の定式化

(1) 構造に関する接線剛性方程式の係数の導出

先述の通り、本論文では、3 節で述べた支配方程式を、2 節で述べた数値計算の枠組みに適用する手順について提案する。本項では、構造に関する成分である $[{}^tK_{ss}]$ と、伝熱が構造に与える影響を表す成分である $[{}^tK_{st}]$ の計算方法について提案する。

平衡方程式 (23) と力学的境界条件 (26) に等価な仮想仕事の原理式を有限要素ごとの積分和として分割し、各変数は時刻 t において既知であると仮定することで、時刻 t' における構造に関する弱形式が、次式 (30) ~ (33) のように得られる¹⁵⁾。

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{V^e} (\Delta \boldsymbol{\sigma} : \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV \\ & = \sum_e \left({}^t\delta R^e - \int_{V^e} ({}^t\boldsymbol{\sigma} : \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV \right) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \Delta \mathbf{u} + (\nabla \otimes \Delta \mathbf{u})^T) \quad (31)$$

$$\delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \delta \Delta \mathbf{u} + (\nabla \otimes \delta \Delta \mathbf{u})^T) \quad (32)$$

$${}^t\delta R^e = \int_{S_t^e} {}^t\mathbf{t}_b \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{V^e} {}^t\mathbf{b} dV \quad (33)$$

ここで、 δ は変分を表す記号であり、 V^e は有限要素 e の体積を表す。 ${}^t\delta R^e$ は、表面力や体積力といった外力による作用を表す項である。

式 (30) 中の $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ は、式 (21) を増分分解することで得られる。本解析手法では、 ${}^t\mathbf{D}$ が温度依存性を持つことを考慮して、式 (21) を温度に関して線形化することで、伝熱から構造への影響を表す項を導く。未知変数である $\Delta \mathbf{u}$ 、 ΔT の2次以上の項を無視すれば、 $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ は次式 (34) のように求まる。

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = {}^t\mathbf{D} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{d^t\mathbf{D}}{d^tT} : {}^t\boldsymbol{\varepsilon} \Delta T \quad (34)$$

式 (34) を式 (30) に代入することで、次式 (35) ~ (39) が得られる。

$${}^tW_{ss} + {}^tW_{st} = {}^t f_s - {}^t q_s \quad (35)$$

$${}^tW_{ss} = \sum_e \int_{V^e} ({}^t\mathbf{D} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) : \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (36)$$

$${}^tW_{ST} = \sum_e \int_{V^e} \left(\frac{d^t \mathbf{D}}{d^t T} : {}^t \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta T : \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \Delta T dV \quad (37)$$

$${}^t f_s = \sum_e {}^t \delta R^e \quad (38)$$

$${}^t q_s = \sum_e \int_{V^e} ({}^t \boldsymbol{\sigma} : \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV \quad (39)$$

式(35)において、 $\delta \Delta \mathbf{u}$ は任意の値をとりうることを利用して、接線剛性方程式が導かれる。このとき、 ${}^t W_{SS}$ から $[{}^t K_{SS}]^{(i+1)}$ の成分が、 ${}^t W_{ST}$ から $[{}^t K_{ST}]^{(i+1)}$ の成分が、 ${}^t f_s$ から ${}^t \mathbf{f}_s^{(i)}$ の成分が、 ${}^t q_s$ から ${}^t \mathbf{q}_s^{(i)}$ の成分が導かれる。

(3) 伝熱に関する剛性方程式

本項では、伝熱に関する成分である $[{}^t K_{TT}]$ と、構造が伝熱に与える影響を表す成分である $[{}^t K_{TS}]$ の計算方法について述べる。

時刻 t' における熱伝導方程式(25)を各有限要素について Galerkin 法により離散化することで、時刻 t' における伝熱に関する弱形式が、次式(40)のように得られる²⁰⁾。

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{V^e} \left(\rho C_v \frac{D^t T}{Dt} \delta T + \kappa (\nabla^t T) \cdot (\nabla \delta T) \right) dV \\ & - \frac{\omega}{2} \sum_e \int_{V^e} ({}^t \boldsymbol{\varepsilon} : {}^t \mathbf{B} : {}^t \boldsymbol{\varepsilon}) \delta T dV \\ & = \sum_e \int_{S_h^e} \mathbf{n} \cdot {}^t \mathbf{h} \delta T dS \end{aligned} \quad (40)$$

式(40)において、温度の時間微分はCrank-Nikolson法により、次式(41)のように近似する。

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{V^e} \rho C_v \frac{{}^t T - {}^{t-1} T}{\Delta t} \delta T dV \\ & + \frac{1}{2} \sum_e \int_{V^e} \kappa (\nabla^t T + \nabla^{t-1} T) \cdot \nabla \delta T dV \\ & - \frac{\omega}{4} \sum_e \int_{V^e} ({}^t \boldsymbol{\varepsilon} : {}^t \mathbf{B} : {}^t \boldsymbol{\varepsilon} + {}^{t-1} \boldsymbol{\varepsilon} : {}^{t-1} \mathbf{B} : {}^{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}) \delta T dV \\ & = \sum_e \int_{S_h^e} \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot ({}^t \mathbf{h} + {}^{t-1} \mathbf{h}) \delta T dS \end{aligned} \quad (41)$$

本解析手法では、式(41)において、左辺第4項に含まれる応力、ひずみ、損失係数を線形化することで、一体型連成に基づく接線剛性方程式を導く。構造に関する接線剛性方程式と整合性をとるために、伝熱に関する接線剛性方程式は、各時間ステップ内で、変位増分に関する非線形項である摩擦発熱項をNewton-Raphson法によって求めるための方程式とする必要がある。そのため、式(41)中の時刻 t を参照している変数は、Newton-Raphson法の反復では更新されない。このことを区別するために、式(41)を次式(42)のように書き直す。

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{V^e} \rho C_v \frac{{}^t T - {}^{t-1} T^{(0)}}{\Delta t} \delta T dV \\ & + \frac{1}{2} \sum_e \int_{V^e} \kappa (\nabla^t T + \nabla^{t-1} T^{(0)}) \cdot \nabla \delta T dV \\ & - \frac{\omega}{4} \sum_e \int_{V^e} ({}^t \boldsymbol{\varepsilon} : {}^t \mathbf{B} : {}^t \boldsymbol{\varepsilon} + {}^{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} : {}^{t-1} \mathbf{B}^{(0)} : {}^{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}) \delta T dV \\ & = \sum_e \int_{S_h^e} \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot ({}^t \mathbf{h} + {}^{t-1} \mathbf{h}^{(0)}) \delta T dS \end{aligned} \quad (42)$$

右上の添え字(0)は、前の時刻 t における値を参照し、Newton-Raphson法の反復内では更新しないことを示す。

式(42)について、時刻 t における各変数が全て既知だと仮定する。各項を応力とひずみ、温度に関して増分分解し、未知変数である $\Delta \mathbf{u}$ 、 ΔT の2次以上の項を無視すれば、次式(43)～(50)が得られる。

$${}^t W_{TT}^{(i+1)} + {}^t W_{TS}^{(i+1)} = {}^t f_T + {}^t q_T^{(i)} \quad (43)$$

$${}^t W_{TT}^{(i+1)} = {}^t W_{TT_CAP}^{(i+1)} + {}^t W_{TT_COND}^{(i+1)} + {}^t W_{TT_MEC}^{(i+1)} \quad (44)$$

$${}^t W_{TT_CAP}^{(i+1)} = \sum_e \int_{V^e} \frac{\rho C_v}{\Delta t} \Delta T^{(i+1)} \delta \Delta T dV \quad (45)$$

$${}^t W_{TT_COND}^{(i+1)} = \frac{1}{2} \sum_e \int_{V^e} \kappa (\nabla \Delta T^{(i+1)}) \cdot (\nabla \delta \Delta T) dV \quad (46)$$

$${}^t W_{TT_MEC}^{(i+1)} = \frac{\omega}{4} \sum_e \int_{V^e} ({}^t \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} : \frac{d^t \mathbf{B}^{(i)}}{dt} : {}^t \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \Delta T^{(i+1)}) \delta \Delta T dV \quad (47)$$

$${}^t W_{TS}^{(i+1)} = -\frac{\omega}{4} \sum_e \int_{V^e} ({}^t \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} : {}^t \mathbf{B}^{(i)} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)}) \delta \Delta T dV \quad (48)$$

$$- \frac{\omega}{4} \sum_e \int_{V^e} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)} : {}^t \mathbf{B}^{(i)} : {}^t \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \delta \Delta T dV$$

$$\begin{aligned} {}^t f_T &= \frac{1}{2} \sum_e \int_{S_h^e} \mathbf{n} \cdot {}^t \mathbf{h}^{(0)} \delta \Delta T dS \\ & - \sum_e \int_{V^e} \rho C_v \frac{{}^t T^{(0)}}{\Delta t} \delta \Delta T dV \\ & - \frac{1}{2} \sum_e \int_{V^e} \kappa (\nabla {}^t T^{(0)}) \cdot (\nabla \delta \Delta T) dV \end{aligned} \quad (49)$$

$$+ \frac{\omega}{4} \sum_e \int_{V^e} ({}^t \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} : {}^t \mathbf{B}^{(0)} : {}^t \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}) \delta \Delta T dV$$

$$\begin{aligned} {}^t q_T^{(i)} &= \frac{1}{2} \sum_e \int_{S_h^e} \mathbf{n} \cdot ({}^t \mathbf{h}^{(i)}) \delta \Delta T dS \\ & - \sum_e \int_{V^e} \rho C_v \frac{{}^t T^{(i)}}{\Delta t} \delta \Delta T dV \\ & - \frac{1}{2} \sum_e \int_{V^e} \kappa (\nabla {}^t T^{(i)}) \cdot (\nabla \delta \Delta T) dV \\ & + \frac{\omega}{4} \sum_e \int_{V^e} ({}^t \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} : {}^t \mathbf{B}^{(i)} : {}^t \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}) \delta \Delta T dV \end{aligned} \quad (50)$$

ここで、式(43)ではNewton-Raphson法による添え字を表記することで、どの変数がNewton-Raphson法の反復ループで更新されるかを明示している。

式(43)において、 $\delta \Delta T$ は任意の値をとりうることを利用して、接線剛性方程式が導かれる。このとき、 ${}^t W_{TT}^{(i+1)}$ から $[{}^t K_{TT}]^{(i+1)}$ の成分が、 ${}^t W_{TS}^{(i+1)}$ から $[{}^t K_{TS}]^{(i+1)}$ の成分が、 ${}^t f_T$ から ${}^t \mathbf{f}_T$ の成分が、 ${}^t q_T^{(i)}$ から ${}^t \mathbf{q}_T^{(i)}$ の成分が導

かれる。

5. 数値計算例

本論文で提案した手法と、*staggered* 法による解析結果との差異を検証するため、実装したソルバーを用いて、継続時間が長い外乱での粘弾性ダンパーの温度時刻歴の解析を行う。(1) 項で、モデルの概要について述べ、(2) 項で構成則について述べる。(3) 項で、検証のために行う数値計算の概要について述べる。

(1) モデルの概要

解析を行う粘弾性ダンパーの立体図を図-2 に示す。この粘弾性ダンパーのモデルは、笠井らが行った解析⁷⁾で用いられているものと同様である。図-2 について、粘弾性体以外の領域は弾性体としてモデル化する。

図-2 に示したモデルの三面図を、図-3 に示す。図-3 における A, B, C, D の点では、温度の時刻歴の実験結果、計算結果が笠井らによって与えられている⁷⁾。そこで、本解析手法により求めた A, B, C, D の点に

図-2 粘弾性ダンパーのモデルの立体図

図-3 粘弾性ダンパーのモデルの三面図

おける温度時刻歴を、笠井らによる計算結果、実験結果と比較することで、本解析手法の検証を行う。

図-2 に示した粘弾性ダンパーのモデルに対して、正弦波荷重 1 周期を模した線形静解析を行う。まず、図-4 に示すように、構造系の境界条件として、リブ端面の全方向の変位を拘束し、中板端面の X 軸正方向に初期形状から 6.6 mm の強制変位を与え、中板端面の Y 軸, Z 軸方向の変位を拘束する。次に、伝熱系の境界条件として、雰囲気温度を 24 °C として、粘弾性ダンパーの表面全体に、熱伝達を考慮する。最後に、以上の境界条件に基づいて、3 節で述べた構成則に基づく線形静解析を行う。以上の計算を、時間ステップ 1 つ分の解析とすることで、正弦波荷重 1 周期とそれに伴う内部発熱を模擬する。正弦波荷重の周期は 3.0 秒であり、式 (35), (43) に含まれる ω の値は、およそ 2.094 rad/s となる。時間ステップ 1 つ分の解析が終了した後、粘弾性ダンパーについて内部の温度分布はそのまま保存し、形状については初期形状に戻す。これにより、各時間ステップにおいて、中板端面の X 軸正方向の変位は、初期形状より 6.6 mm の状態に保たれることになる。以上の解析を繰り返すことで、正弦波荷重下の粘弾性ダンパーを模擬する。

図-2 に示したモデルに基づき作成した、有限要素解析用のメッシュを、図-5 に示す。要素は全て六面体アイソパラメトリック一次 B-bar 要素²⁾であり、要素数は 27,539、節点数は 32,984 となった。本解析手法では、各節点に 3 次元の変位と温度を持たせるため、自由度数は節点数に 4 を乗じた 131,936 となる。なお、笠井らが作成したメッシュでは、ダンパーの下半分だけを解析メッシュとし、粘弾性体部分の要素数は 8,260 となっている。一方で、本論文で取り扱うモデルでは、粘弾性体部分のメッシュは下半分で 6,256 要素となっている。従って、笠井らが作成したメッシュに比べ、今回作成したメッシュの方が、粘弾性体部分の要素数は少ない。笠井らの解析における物性値を表-1 に示す⁷⁾。粘弾性体の Poisson 比については、次項で述べる。

図-4 粘弾性ダンパーのモデルに指定する境界条件

図-5 粘弾性ダンパーのモデルの解析用のメッシュ

なお、笠井らの解析では材料の違いを無視して、全ての表面領域に、表-1で示される熱伝達係数を指定している⁹⁾。熱伝達係数は、材料の種類や状態に依存するが、笠井らの解析では、計算結果が実験結果に適合するように試行錯誤から決定している。本解析は、摩擦発熱項の計算に staggered 法を採用している笠井らの解析事例に対し、一体型連成を採用した本解析手法ではどれだけ粘弾性体領域の温度時刻歴の解析能力に差が生じるかを検証することを目的としている。そのため、熱伝達係数は、笠井らの解析事例と同じ値を用いる。

(2) 構成則の概要

次式(51)～(55)により与えられる構成則を取り扱う^{7)13)～15)}。

$${}^t\mathbf{D} = 2 {}^tG \left(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i + \frac{2\nu}{1-2\nu} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \quad (51)$$

$${}^tG = G_r \frac{1 + a_r b_r \omega^{2\beta} \lambda^{2\beta} + (a_r + b_r) \omega^{\beta} \lambda^{\beta} \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)}{1 + a_r^2 \omega^{2\beta} \lambda^{2\beta} + 2a_r \omega^{\beta} \lambda^{\beta}} \quad (52)$$

表-1 笠井らの解析における物性値

物性値	粘弾性体	鋼板
熱伝導率 [N/(s・K)]	0.188	43.128
密度×比熱 [N/(m ² ・K)]	193.97×10 ⁴	363.79×10 ⁴
熱伝達係数 [N/(m・s・K)]	25	25
Poisson 比 [-]	0.47	0.30
Young 率 [N/m ²]		2.05×10 ¹¹

表-2 笠井らの構成則に関する材料物性値

β [-]	G_r [N/m ²]	a_r [-]	b_r [-]	T_r [K]	p_1 [-]	p_2 [-]
0.609	6.52×10 ⁴	0.0115	21.157	273.35	19.5	80.2

$${}^t\lambda = \exp\left(-\frac{p_1({}^tT - T_r)}{p_2 + {}^tT - T_r}\right) \quad (53)$$

$${}^t\mathbf{B} = {}^t\boldsymbol{\eta} \mathbf{D} \quad (54)$$

$${}^t\eta = \frac{(-a_r + b_r) \omega^{\beta} \lambda^{\beta} \sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)}{1 + a_r b_r \omega^{2\beta} \lambda^{2\beta} + (a_r + b_r) \omega^{\beta} \lambda^{\beta} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)} \quad (55)$$

ここで、 $\mathbf{e}_i$ は正規直交基底ベクトル、 ν は Poisson 比、 β 、 G_r 、 a_r 、 b_r 、 p_1 、 p_2 、 T_r は材料物性に関するパラメータである。また、式(51)では、添え字 k 、 l について、Einstein の規約を適用する。式(51)～(55)は、笠井らが提案した構成則^{13)～15)}に基づいて、笠井らが行った解析⁹⁾において構成則として用いられている式を、本論文で述べてきた枠組みに適用したものである。笠井らの構成則に関する物性値を表-2に示す⁹⁾。本解析では、式(52)、(53)、(55)に含まれるパラメータも笠井らの解析と同様にした。

なお、表-1で粘弾性体の Young 率が定義されていないのは、代わりに表-2の G_r と式(52)、(53)により計算する剛性率 tG を与えているためである。

(3) 数値計算の概要

本解析手法の解析能力を検証するために、staggered 法に基づく従来の解析手法を新たに実装した。実装した手法について、接線剛性マトリクス成分のうち、連成項を考慮していない $[{}^tK_{SS}]$ 、 $[{}^tK_{TT}]$ については、簡単な引張試験解析、熱伝導解析を行い、従来の計算結果と比較することで正しく実装されていることを確認している。そこで、本解析手法について、連成項における妥当性を検証するため、笠井らの数値計算⁹⁾と同様の条件を設定したうえで、本解析手法、staggered 法での解析を行う。得られた結果を笠井らの数値計算結果と比較することで、実装が正しくなされているかを検証する。

次に、本解析手法と staggered 法との解析能力の差異を検証するため、まず解析モデルにおいて、初期温度を 0

℃，周期を 1.0 秒に変更する。笠井らの構成則では，低温，高周波になると式 (52)，(55) 中の G ， η の値が大きくなり，結果として摩擦発熱が増大する。これにより，本解析手法と staggered 法による解析能力の差異が明確に表れることが期待できる。笠井らは，粘弾性ダンパーについて，0℃，1 Hz での加振実験を行っており，これらの設定は，実用性に欠く仮定ではない¹⁵⁾。また，本検証では，構造変形－伝熱間の相互作用を厳密に評価した場合，摩擦発熱の解析にどのように影響するかを検証することを目的としているため，熱伝達を無視する。

このモデルについて，1 ステップあたりの時間増分を 1.0 秒，2.0 秒，5.0 秒，10.0 秒，20.0 秒と変化させて解析を行う。このとき，時間増分の取り方が，解析結果にどのような影響を与えるかについて検証する。

6. 計算結果

5 節で述べたモデルの温度時刻歴を，一体型連成による本解析手法，及び staggered 法により解析した結果を，

図-6 雰囲気温度を 24℃，周期を 3.0 秒，熱伝達を考慮した場合の温度時刻歴の計算結果

図-6 に示す。図-6 に示す温度時刻歴を一体型連成による本解析手法で計算するにあたって，Newton-Raphson 法の反復回数は 3 ステップ程度であった。図-6 には，文献⁹⁾中の笠井らによる計算結果を図中にプロットしてある。

図-6 を見ると，一体型連成による本解析手法の計算結果と，staggered 法による計算結果はほぼ一致している。また，これらの計算結果と，笠井らの計算結果についても，C 点以外の箇所でおおよそ一致している。

一方で，粘弾性体中心部である C 点では，本解析手法，staggered 法共に，笠井らの計算値に対して定常時の温度に約 0.015℃ の誤差が存在する。この原因として，本論文で取り扱っている解析メッシュと，笠井らが解析に用いたメッシュが完全には一致していないことが挙げられる。本論文では，各メッシュが立方体に可能な限り近づくようにメッシュを作成している。一方，笠井らの解析モデルでは，Z 軸方向に薄い板状の形状となっている。この形状の差により，笠井らの計算結果に対し，やや温度時刻歴に誤差を生じているものと考えられる。

いずれにせよ，既存の計算例とほぼ同等の計算結果が得られており，本解析手法，及び検証用に実装した参照手法は，正しく実装されているといえる。

次に，雰囲気温度を 0℃ とし，1 ステップあたりの時間増分を 1.0 秒として温度分布を解析した結果を，図-7 に示す。図-7 を見ると，1 ステップあたりの時間増分を 1.0 秒とした場合，本解析手法と staggered 法による従来

図-7 初期温度を 0℃，周期を 1.0 秒，熱伝達を無視した場合の温度時刻歴の計算結果

手法との間には、ほとんど誤差が見られない。図-8に、C点における、1ステップあたりの時間増分を3.0秒とした場合の、本解析手法に基づく計算結果に対する、staggered法に基づく計算結果の誤差を示す。また、図-9に、1ステップあたりの時間増分を3.0秒とした場合の、本解析手法に基づく計算結果に対する、staggered法に基

図-8 初期温度を0℃、周期を1.0秒、熱伝達を無視した場合の、C点における温度差

図-9 初期温度を0℃、周期を1.0秒、熱伝達を無視した場合の、C点における相対的な温度差

図-10 1ステップの時間増分を変化させたときのA点における温度時刻歴の相対誤差

づく計算結果の、初期温度に対する変化の相対誤差を示す。図-8と図-9を見ると、解析の初期では、100%に近い大きな相対的な温度差が生じるが、誤差、相対誤差共に急峻に減少し、300秒経過した時点で、誤差は0.01℃、相対誤差は0.1%まで低下する。

図-11 1ステップの時間増分を変化させたときのB点における温度時刻歴の相対誤差

図-12 1ステップの時間増分を変化させたときのC点における温度時刻歴の相対誤差

図-13 1ステップの時間増分を変化させたときのD点における温度時刻歴の相対誤差

続いて、A点、B点、C点、D点について、1ステップあたりの時間増分を変化させて、一体型連成手法、staggered 法による温度時刻歴の相対誤差をまとめたものを、図-10、図-11、図-12、図-13 にそれぞれ示す。これらの図は、一体型連成手法、staggered 法のそれぞれについて、1ステップ辺りの時間増分を1.0秒としたときの温度時刻歴に対する相対誤差を示したものである。図-10 から図-13 を見ると、いずれの点においても一体型連成手法による計算結果では、staggered 法の計算結果に比べ、時間増分を大きくした場合でも、相対誤差の上昇が抑えられていることがわかる。特に、相対誤差の変化が定常に至った場合でも、一体型連成手法による相対誤差と staggered 法による相対誤差には、最大で1桁程度の差異が存在する。

以上により、一体型連成手法によって正弦波荷重下での線形粘弾性体の内部摩擦発熱を計算した場合、時間増分を大きく取っても、小さい時間増分の場合に対して小さい誤差で計算できることが確認された。

6. 結言

本論文では、正弦波荷重下での内部摩擦発熱を考慮した一体型熱構造連成解析に取り組んだ。具体的には、線形粘弾性体に正弦波荷重が加わる問題に、一体型熱構造

連成解析の枠組みを適用し、定式化を行った。一体型連成を実現するために必要な剛性マトリクス成分は、平衡方程式、熱伝導方程式の弱形式を線形化することで導出した。

笠井らによる粘弾性ダンパーの解析⁹⁾⁷⁾と同様のモデルに対して、一体型連成手法による本解析手法を適用し、実装が正しく行われていることを確認した。また、従来法である staggered 法による計算結果と、本解析手法による計算結果を比較することで、本解析手法が持つ解析能力の検証を行った。数値計算の結果、本解析手法では、1時間ステップあたりの時間増分を大きくした場合、staggered 法による従来の手法に比べ、相対誤差に最大で1桁程度小さいことを確認した。

参考文献

- 1) 特定非営利活動法人・非線形 CAE 協会，<http://www.jancae.org/>，2015/06/23 最終アクセス。
- 2) G. Bérardi, M. Jaeger and R. Martin: Modelling of a thermo-viscoelastic coupling for large deformations through finite element analysis, International Journal Heat and Mass Transfer, Vol. 39, No. 18, pp. 3911-3924, 1996.
- 3) C. Ovalle Rodas, F.Zairi, M. Nait-Abdelaziz: A finite strain thermo-viscoelastic constitutive model to describe the self-heating in elastomeric materials during low-cycle fatigue, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 64, pp. 396-410, 2014.
- 4) T. Netz, S. Hartmann: A monolithic finite element approach using high-order schemes in time and space applied to finite strain thermos-viscoelasticity, Computers and Mathematics with Applications, 2015 (in press).
- 5) H.S. Gopalakrishna, M.L. Lai: Finite element heat transfer analysis of viscoelastic damper for wind applications, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol. 77-78, pp. 283-295, 1998.
- 6) 佐藤大樹，笠井和彦，田村哲郎：継続時間が長い外乱下での粘弾性ダンパーの3次元有限要素解析，日本風工学会誌，Vol. 30，pp.209-210，2005。
- 7) 笠井和彦，佐藤大樹，黄一華：継続時間が長い外乱での温度上昇と熱伝導・伝達を考慮した粘弾性ダンパーの解析手法，日本建築学会構造系論文集，Vol. 599，pp.61-69，2006。
- 8) J. de Cazenove, D.A. Rade, A.M.G. de Lima, C.A. Araújo: A numerical and experimental investigation on self-heating effects in viscoelastic dampers, Mechanics Systems and Signal Processing, Vol. 27, pp. 433-445, 2012.
- 9) A.M.G. de Lima, D.A. Rade, H.B. Lacerda, C.A. Araújo: An investigation of the self-heating phenomenon in viscoelastic materials subjected to cyclic loadings accounting for prestress, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 58-59, pp. 115-127, 2015.
- 10) 張 群，久田 俊明：流体・構造連成有限要素解析における連成手法に関する検討，Vol.67，No.662，pp.1555-1562，2001。
- 11) Richard M. Christensen: Theory of Viscoelasticity: Second Edition, Dover publications, Inc., 2010.
- 12) 坂井建宣，荒井政大：よく分かる粘弾性力学—設計・生産

技術者のための基礎講座 第 14 回一, 一般社団法人日本機械学会, 2012.

- 13) K. Kasai, J. A. Munshi, M. L. Lai, B. F. Maison: Viscoelastic Damper Hysteretic Model: Theory, Experiment, and Application, Proceeding of ATC-17-1 Seminar on Seismic Isolation, Passive Energy Dissipation, and Active Control, Vol.2, pp.521-532, 1993.
- 14) 笠井 和彦, 寺本 道彦, 大熊 潔, 所 健: 粘弾性体の温度・振動数・振幅依存性を考慮した解析モデル (その 1 線形領域における温度・振動数依存のモデル化), 日本建築学会構造系論文集, Vol. 543, pp.77-86, 2001.
- 15) 笠井 和彦, 所 健: 粘弾性体の温度・振動数・振幅依存性を考慮した構成則 (その 2 温度上昇および歪・歪速度がもたらす非線形性のモデル化), 日本建築学会構造系論文集, Vol. 561, pp.55-63, 2002.
- 16) 橋本学, 小野謙二, 野口裕久: レベルセット仮想粒子による界面処理を用いた固定メッシュに基づく流体構造連成解析手法の開発, 日本計算工学会論文集, No. 20080028, pp.1-15, 2008 年.
- 17) 奥田洋司: 並列有限要素解析[II] 並列構造解析ソフトウェア FrontISTR を使いこなす, 培風館, 2008.
- 18) 富田 佳宏: 連続体力学の基礎, 株式会社養賢堂, pp.83-84, 1995.
- 19) 久田 俊明, 野口 裕久: 非線形有限要素法の基礎と応用, pp.70-81, 丸善株式会社, 1995.
- 20) 矢川 元基, 宮崎 則幸: 有限要素法による熱応力・クリープ・熱伝導解析, サイエンス社, 1985.
- 21) T. J. R. Hughes: Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.15, pp.1413-1418, 1980.

(2015. 6. 23 受付)

A Monolithic Thermomechanical Coupling Analysis with Internal Frictional Heating under Sinusoidal Loads

Tatsuhiko SHONO, Gaku HASHIMOTO and Hiroshi OKUDA

We formulate a monolithic thermomechanical coupling method to analyze internal frictional heating of linear viscoelastic material under sinusoidal loads. To construct the monolithic coupled equations, we linearize the weak forms of the equilibrium equations and the heat conduction equation. We apply the present method to a viscoelastic damper model under periodic loads to analyze time histories of the temperature. As a result, we confirm that the present method can decrease the error compared to a staggered method.