3次元弾性波動場の空洞およびクラックの位置 推定のためのリニアサンプリング法

東平 光生¹・二階堂 拓²

¹正会員 工博 東京理科大学教授 理工学部土木工学科 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

E-mail: touhei@rs.noda.tus.ac.jp

²学生会員 東京理科大学大学院 理工学研究科 土木工学専攻

本論文は三次元弾性波動場の近接場方程式に対して、特性関数を定義する散乱逆解析手法を展開する。方法論そのものは Colton と Kirsch によって展開されたりニアサンプリング法とその後 Fata と Guzina によって導入された近接場方程式を用いる方法に基礎を置いている。この方法では、近接場方程式の解の発散の評価に必要とするコスト関数を用いる複雑な手続きが不要となる。そして、特性関数は近接場方程式に現れる作用素の特異値分解から容易に計算できることに特徴がある。本論文で展開した手法の有効性の検討は、三次元無限弾性波動場中の空洞ならびにクラックの検出問題を通して行う。

Key Words: *inverse scattering problem, elastic wavefield, linear sampling method, singular value decomposition, charactersitic function*

1. はじめに

媒質の変動領域に波動を照射し、生じた散乱波動から媒質の変動領域を再構成する散乱逆問題は、医療画像診断、非破壊検査、資源探査、震源探査などに関わる広い裾野を持つ研究分野である。そして、数理学、物理学や工学分野からの多くの文献が蓄積されている。こうした中、Colton と Kress は、その著作において散乱逆解析における膨大な数に上る著作のサーベイを行うとともに、音響場と電磁場における散乱逆解析手法について論じている¹⁾。

Colton と Kress の著作によれば、散乱逆解析のオーソドックスな方法は、計測された遠方場パターン (far-field pattern) を用いた第 1 種 Fredholm 方程式を出発点として、そこに正則化手法やコスト関数を定義し、Fredholm 方程式の解を評価することに基づく。Fredholm 方程式の作用素に用いる核関数には波動場の Green 関数を用いる方法や計測された散乱波の遠方場パターンを用いる方法がある。Colton と Kirsch によって提案されたりニアサンプリング法 (linear sampling method)²⁾ は、計測された遠方場パターンを Fredholm 作用素の核として用いる手法に属する。Colton と Kirsch の成果は散乱物体の境界条件が Dirichlet 条件、Neumann 条件のみならず、波動が散乱物体内部に透過する場合においても、方程式に用いる検査点が散乱体の外部に存在する場合には、Fredholm 方程式の解が発散することを数学的に示した点にある。そして、この性質によって散乱体の位置と

形状の再構成が可能になっている。

なお、Pelekanos らの source-contrast inversion³⁾、Kirsch の factorization 法⁴⁾、Gintides らの MUSIC アルゴリズム⁵⁾ に基づく方法など多様な散乱逆解析の方法も展開されている。リニアサンプリング法の展開を多様な方法論の中で位置付ける上で、これらの研究論文も注目すべきものである。

Colton と Kirsch のリニアサンプリング法への貢献は遠方場の方程式の解の性質を数学的に厳密に論じた点にあるものの、半無限弾性波動場中の散乱問題ではこの議論をすすめることには限界がある。こうした背景の中で、Fata と Guzina⁶⁾ および Baganas et al⁷⁾ は遠方場の方程式の代わりに近接場 (near-field) 方程式を用いる方法を提示した。近接場方程式においては遠方場パターンのかわりに計測された散乱波そのものを用いることになる。Fata と Guzina および Baganas et al はこうした場合でも、検査点が散乱物体の外部にある場合には方程式の解のノルムが発散する性質を数学的に示すことに成功し、数値計算の上でもその有効性を実証している。

こうした一連の研究の背景を基に、著者らの研究グループでは近接場の方程式を用いた新たなリニアサンプリング法を半無限弾性波動場で試みている⁸⁾⁹⁾。ここでは、散乱逆解析の方程式の解の発散特性を用いて不均質領域の位置を再構成するのではなく、観測散乱波の集合をヒルベルト空間¹⁰⁾ と考え近接場の方程式の作用素の値域と共役作用素の核がヒルベルト空間を直交分

解する性質に着目している。そしてこの性質に基づく特性関数を定義することで、媒質の非均質領域の位置の再構成について効果的なアルゴリズムが実現できることを示している。

本論文では、以上のように半無限弾性波動場で用いた著者らの方法⁸⁾⁹⁾を全無限弾性波動場に適用し、有効性を検討することを目的とする。近接場方程式においては、計測された散乱波から遠方場パターンを取り出すことなく、散乱波そのものを用いることができるため、この点でも散乱逆解析の効率化が期待できる。さらに前述の特性関数を用いる方法の有効性が実証できれば、著者らの半無限弾性波動場の解析理論の妥当性の裏付けとなると考えられる。このような背景の下で、本論文では、特に、三次元の弾性波動場での空洞とクラックの位置と形状推定に着目して検討を行う。

2. 解析手法

(1) 問題の定義

図-1に示すように散乱体の領域を D 、その境界を ∂D で表す。散乱体から離れた場所に設定した領域 Γ_1 に点振源を設定し、散乱体に向けて波動を照射する。そして生じた散乱波を領域 Γ_2 で計測する。数学的な定式化の上では領域 Γ_1 と Γ_2 には共通部分があっても良い。すなわち、

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \quad (1)$$

である必要はない。なお、前述のように本論文では散乱体は空洞とする。本論文の課題は、領域 Γ_1 での加振条件と Γ_2 で計測された観測散乱波を既知として、空洞の形状と位置を推定することである。

図-1 解析モデルの概念

ここでの波動場は3次元の弾性体とし、弾性波動の伝播を記述する支配方程式は次式のようなになる。

$$(\lambda + \mu)\partial_i\partial_j u_j(x) + \partial_j^2 u_i(x) + \rho\omega^2 u_i(x) = 0 \quad (2)$$

ここに、 x は波動場の位置を表し、成分表示する場合は、

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad (3)$$

のように添字をつけて表現する。また、 u_j は変位場、 ∂_j は j 座標成分に関する偏微分の作用素である。これらの座標成分の添字は総和規約に従う。また λ および μ は Lamé の定数、 ρ は質量密度、 ω は角振動数である。本論文では入射波動場を $u_i^{(I)}$ 、散乱波動場を $u_i^{(S)}$ で表す。そして、全波動場は

$$u_i(x) = u_i^{(S)}(x) + u_i^{(I)}(x) \quad (4)$$

とし、特に上付きの添字は用いない。また、散乱体の境界 ∂D においては表面力はゼロである。この条件は次式で示される。

$$p_i(x) = 0, \text{ at } x = \partial D \quad (5)$$

ここに、

$$p_i(x) = n_j (\lambda\delta_{ij}\partial_m + \mu\delta_{im}\partial_j + \mu\delta_{jm}\partial_i) u_m(x) \quad (6)$$

であり、 n_j は境界の法線ベクトルの方向を示す。本論文では、弾性波動場の Green 関数が定式化および数値計算で重要な役割を果たす。Green 関数は次式で示される。

$$\begin{aligned} G_{ij}(x, y) &= \frac{\delta_{ij}}{4\pi\mu} \left[W_1^T(r) + W_2^T(r) - \left(\frac{c_T}{c_L} \right)^2 W_2^L(r) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\mu} \partial_i r \partial_j r \left[-W_3^T(r) + \left(\frac{c_T}{c_L} \right)^2 W_3^L(r) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 x は観測点、 y は振源であり、 r は x と y の距離である。すなわち、

$$r = |x - y| \quad (8)$$

また、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ、 c_T および c_L は S 波および P 波の波速である。式 (7) に用いている W は波動関数で次式で定義されている。

$$W_1^p(r) = \frac{1}{r} \exp(-ik_p r) \quad (9)$$

$$W_2^p(r) = -\left(\frac{1}{k_p^2 r^2} + \frac{i}{k_p r} \right) W_1^p(r) \quad (10)$$

$$W_3^p(r) = W_1^p(r) + 3W_2^p(r) \quad (11)$$

ここに、 W の添字の p は T または L をとり、それぞれ S 波および P 波の波動関数であることを示す。特に k_T および k_L は S 波と P 波の波数を示す。この Green 関数は無限領域で定義されたもので、放射条件を満足する。すなわち、Green 関数による波動は無限遠方に伝播し、無限遠方からの反射波は存在しない。なお、領域 Γ_1 および Γ_2 で波動関数の内積を考える場合がある。この場合、たとえば、 Γ_1 での内積は次のように表記する。

$$\begin{aligned} (f_i, g_i)_{L_2(\Gamma_1)} &= \int_{\Gamma_1} f_i^*(x) g_i(x) d\Gamma_1(x), \\ &\quad (f_i, g_i \in L_2(\Gamma_1)) \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、関数の添字 $*$ は複素共役を表す。また座標成分の添字については、総和規約を用いている。この内積を

通して波動場の L_2 ノルムが定義され、それは $\|f_i\|_{L_2(\Gamma_1)}$ と表記する。

(2) 散乱逆解析における近接場方程式

図-1 に示す波動場における散乱逆解析の数学的定式化の出発点は Fata と Guzina の用いた近接場方程式である。

$$(F_{ij}\tau_j)(x) = G_{ij}(x, z)d_j, \quad (\tau_j \in L_2(\Gamma_1), x \in \Gamma_2) \quad (13)$$

ここに F_{ij} は近接場方程式の作用素 (near-field operator) であり、次のように表現される。

$$(F_{ij}\tau_j)(x) = \int_{\Gamma_1} G_{ij}^S(x, y)\tau_j(y)d\Gamma_1(y) \quad (14)$$

ただし、近接場方程式の作用素の核に用いる $G_{ij}^S(x, y)$ は散乱テンソルである。すなわち、 $y \in \Gamma_1$ 点を j 方向に加振して $x \in \Gamma_2$ 点で観測される i 方向の散乱波である。散乱テンソルそのものは、計測によって取得されるべきものであるが、本論文では数値シミュレーションによって取得し、手法の妥当性について検討することになる。また、式 (13) の右辺の z は検査点 (probing point) と呼ぶ。以降に示すように検査点ごとに近接場方程式の可解性を検討し、空洞の形状や位置を再構成する。ここで用いる d_j は検査点に作用させる力のベクトルである。近接場方程式の未知関数 τ_j は物理的には加振領域 Γ_1 に加える分布荷重である。

なお、加振領域 Γ_1 に分布荷重 τ_j を与えた場合の入射波動場は

$$u_i^{(I)}(x) = \int_{\Gamma_1} G_{ij}(x, y)\tau_j(y)d\Gamma_1(y), \quad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\Gamma_1 \cup \partial D \cup D)) \quad (15)$$

となり、この入射波動場に対応する散乱波の Γ_2 での観測結果が

$$u_i^{(S)}(x) = (F_{ij}\tau_j)(x), \quad (x \in \Gamma_2) \quad (16)$$

である。数学的には Fata と Guzina⁶⁾ が示しているものの、この問題を直感的に理解することも容易であろう。近接場方程式そのものは $x \in \Gamma_2$ で与えられている。しかし、Holmgren の唯一性定理¹¹⁾ を用いて観測点 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\Gamma_1 \cup \partial D \cup D)$ に拡大することで近接場方程式の物理的な意味が明確になる。すなわち、 Γ_1 における分布荷重によって生じる散乱波は、検査点からの Green 関数と等値できるか、という問題設定が近接場方程式の意味である。Fata と Guzina はこの問題に対して次の定理を提示し解答を与えている。

定理 1 (Fata and Guzina) $z \in D$ のとき、 $\forall \epsilon > 0$ に対して

$$\left\| (F_{ij}\tau_j)(\cdot, z, \epsilon) - G_{ij}(x, z)d_j \right\|_{L_2(\Gamma_2)} < \epsilon \quad (17)$$

となる $\tau_j(y, z, \epsilon) \in L_2(\Gamma_1)$ が存在する。さらに、

$$\lim_{z \rightarrow \partial D} \|\tau_j(y, z, \epsilon)\|_{L_2(\Gamma_1)} = \infty \quad (18)$$

定理 1 の主張は検査点 z が空洞 D の内部にある場合には、検査点から放射される波動と、加振領域から照射される波動で生成される散乱波は、 $L_2(\Gamma_2)$ の意味で検査点から放射される波動により、いくらでも近似できるということである。さらに、検査点が境界 ∂D に近づく場合には解のノルムが発散することを述べている。通常のリニアサンプリング法ではこの解のノルムが発散する性質が散乱体の位置と形状を推定する上でより重要な意味を持っている。

(3) 近接場方程式に対する新たな指標について

Fata と Guzina は定理 1 の結果に基づき、近接場方程式の解を検査点ごとに追跡することで半無限弾性波動場の位置を推定している。すなわち、検査点に関する近接場方程式の解のノルムが発散する場合にはその検査点は空洞外部にあるものと判定する。この方法では、各検査点に対して正則化パラメータを考慮した Tikhonov 汎関数の最小化を図ることで近接場方程式の解を評価している⁶⁾。リニアサンプリング法におけるこのような方法は Colton と Kirsch²⁾ も用いており、このような意味でリニアサンプリング法におけるスタンダードな方法であるとも言える。

本論文では近接場方程式に対して、このようなやや煩雑と考えられる方法を改善するために、方程式の解を評価するかわりに、次の特性関数を定義する。

$$\phi(z) = \inf_{\tau_j \in L_2(\Gamma_1)} \left\| (F_{ij}\tau_j)(\cdot) - G_{ij}(\cdot, z)d_j \right\|_{L_2(\Gamma_2)} \quad (19)$$

定理 1 に示された式 (17) より

$$\phi(z) = 0, \quad \text{when } z \in D \quad (20)$$

が成立することは明らかである。

次に、 $z \notin D \cup \partial D$ の場合の近接場方程式

$$(F_{ij}\tau_j)(x) = G_{ij}(x, z)d_j, \quad (x \notin D \cup \partial D, \tau_j \in L_2(\Gamma_1)) \quad (21)$$

を考察する。ここでは、 x は散乱体とその境界を含まない点として用いていることに注意する。式 (21) の左辺は有界であるにも関わらず、右辺は有界でないから、明らかにどんな $\tau_j \in L_2(\Gamma_1)$ をとつても、近接場方程式は成立しない。今、こうした状況下でも

$$\left\| G_{ij}(\cdot, z)d_j - (F_{ij}\tau_j)(\cdot) \right\|_{L_2(\Gamma_2)} = 0 \quad (22)$$

が成立すると仮定する。このとき、Holmgren の唯一性定理¹¹⁾ を用いた Fata と Guzina⁶⁾ の考察を参考にすれば、式 (22) の τ_j によって、次式が成立することになる。

$$(F_{ij}\tau_j)(x) = G_{ij}(x, z)d_j, \quad (x \notin D \cup \partial D \cup V_\delta(z)) \quad (23)$$

ここに、 $V_\delta(z)$ は z の δ 近傍である。 $\delta > 0$ はいくらでも小さくとることができるから、式 (22) が成立することは、式 (21) の議論からあり得ない。以上より、結局 $z \notin (D \cup \partial D)$ の場合には、次式が成立することになる。

$$\forall \tau_j \in L_2(\Gamma_1), \left\| G_{ij}(\cdot, z) d_j - \left(F_{ij} \tau_j \right) (\cdot) \right\|_{L_2(\Gamma_2)} > 0 \quad (24)$$

したがって、式 (19) の特性関数の値は、

$$\phi(z) \geq 0, (z \notin D \cup \partial D) \quad (25)$$

を得る。

式 (20) と式 (25) の比較を通して、検査点 z における $\phi(z)$ の値は $\partial D \cup D$ の内部と外部で値に差が生じることが期待でき、ここから空洞の位置と形状が再構成される可能性が提示できる。ただし、式 (25) に示すように $z \notin \partial D \cup D$ において $\phi(z)$ が明示的に非ゼロの値を取ることを示していないことにも注意する必要がある。このため、特性関数を用いた方法論の有効性の検証は、実際の数値計算に依ることが大きくなる。

ところで、式 (19) はヒルベルト空間 $L_2(\Gamma_2)$ の元 $G_{ij}(\cdot, z) d_j$ とこのヒルベルト空間の閉部分空間 $\text{ran } F_{ij}$ との距離であることを示している。ヒルベルト空間の射影定理を用いればこの距離は次式で表現できることになり、 $\phi(z)$ の定義式に現れた下限をとる演算は射影作用素を構成することに帰着できる。

$$\phi(z) = \left\| G_{ij}(\cdot, z) d_j - P_{ij} G_{jk}(\cdot, z) d_k \right\|_{L_2(\Gamma_2)} \quad (26)$$

ここに、 P_{ij} は $L_2(\Gamma_2)$ から $\text{ran } F_{ij}$ への射影作用素である。最短距離定理と射影作用素の概念的な模式図は図-2 に示している。

図-2 最短距離定理と特性関数の概念

本論文での射影作用素の構成は特異値分解¹⁾を用いて行う。ただし、ここからは、実際の数値計算のために、射影作用素の構成方法を有限次元空間で展開する。すなわち、加振領域 Γ_1 および観測領域 Γ_2 を有限個グリッドで離散化する。このため、以下では射影作用素は射影行列と呼ぶことにする。ここで、加振領域の β 番目のグリッド点の座標 $x^{(\beta)}$ で表す。同様に観測領域

の α 番目の座標を $x^{(\alpha)}$ とする。 $x^{(\beta)}$ を単位加振力で加振して、 $x^{(\alpha)}$ で計測される散乱波を $a_{\alpha\beta}$ とすれば、これは式 (14) で示した近接場作用素の核 G_{ij}^S を用いて

$$a_{\alpha\beta} = G_{ij}^S(x^{(\alpha)}, x^{(\beta)}) \quad (27)$$

のように表すことができる。ここで明らかなように、加振方向と観測散乱波は3次元解析の性質上、3成分を有するから $a_{\alpha\beta}$ は 3×3 の行列となる。この $a_{\alpha\beta}$ をサブマトリックスと考え、これを成分とする行列 $[A]$ を構成する。このような約束の下で、特異値問題を定義すれば次式で表せる。

$$[A]^H [A] \vec{\varphi}_n = \kappa_n^2 \vec{\varphi}_n \quad (28)$$

ここに、 $[A]$ の添字に用いた H は共役転置をとることとし、 κ_n^2 は特異値、 $\vec{\varphi}_n$ は特異値 κ_n^2 に対応する固有ベクトルである。また、添字の n は特異値ならびに固有ベクトルを識別するための番号である。行列 $[A]^H [A]$ は非負でエルミート性を有することから特異値 κ_n^2 も非負の実数となる。さらに、行列のエルミート性から固有ベクトルは正規直交基底を形成する。すなわち、

$$\vec{\varphi}_n^H \vec{\varphi}_m = \delta_{nm} \quad (29)$$

また、ゼロでない特異値とそれに対応する固有ベクトルを用いて

$$\vec{\psi}_n = \frac{1}{\kappa_n} [A] \vec{\varphi}_n \quad (30)$$

を構成すれば、このベクトルは正規直交基底を形成し、しかもその定義から $[A]$ の値域を張る基底であることがわかる。ここで、 $[A]$ の値域は離散化された近接場作用素の値域である。したがって、射影行列 $[P]$ は次のように構成できる。

$$[P] = \sum_{\kappa_n \neq 0} \vec{\psi}_n \vec{\psi}_n^H \quad (31)$$

特性関数を計算するために、検査点 z を固定し、検査点 z をソース点とする観測グリッド α 点での Green 関数を計算する。この Green 関数は $G_{kl}(x^{(\alpha)}, z) d_l$ と表せる。ここで k については3成分あることに注意する。この Green 関数をすべての観測グリッドで計算し、列ベクトルとしてまとめたものを $\vec{S}(z, d)$ とすれば、特性関数の具体的な値は次のように計算できる。

$$\phi(z) = \left| [I - P] \vec{S}(z, d) \right| \quad (32)$$

ここに $[I]$ は単位行列、 $|\cdot|$ はベクトルの大きさである。なお、本論文の数値計算例では、検査点に加える加振力 d の依存性を次のように考慮する。

$$\phi(z) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left| [I - P] \vec{S}(z, e_i) \right|^2} \quad (33)$$

ここに、 e_i は3次元ユークリッド空間の単位基本ベクトルである。すなわち、特性関数の値は検査点に3方向の単位加振力を加えて評価する。

図-3 空洞再構成のためのターゲットモデル

図-4 観測点と振源の分布

3. 数値計算例

(1) 複数の球状の空洞の再構成

本論文で示した方法の妥当性を検証するために、まず複数の球状の空洞の再構成の問題を扱う。ここでは図-3に示すように3つの空洞が隣接する状況を考察する。空洞の直径はそれぞれ20 cmであり、これらの空洞はP波とS波の波速2000 m/sと1000 m/sの波動場に埋め込まれている。定式化で述べた、加振領域 Γ_1 と散乱波の観測領域 Γ_2 は空洞を覆う半径2 mの球面とする。球面上に設置した振源と観測点の分布を図-4に示す。ここでの振源と観測点の数はそれぞれ26点と122点である。定式化でも述べたように、加振および観測は3方向の成分を考慮する。解析に用いる振源と観測点の適切な数については、今後詳細な検討に待つことも多い。ここでは、暫定的にこのポイント数で計算を行い、提案手法の妥当性の検討を行うものとする。

散乱波の取得のために、ここでは境界要素法を用いる。球状の空洞に対する境界要素分割は図-3に示すとおりであり、球面は三角形一定要素に分割している。この三角形の一辺の長さは概ね2.0 cmである。空洞に照射する波動は1 kHz、4 kHz、7 kHzとし、照射する波動の波長と空洞の再構成の結果の考察を主眼とする。なお、解析振動数が7 kHzの場合、S波の波長はおよそ14 cmであり、境界要素の大きさは波長に比べ十分小さいものとなっている。

空洞の再構成結果の提示に先立ち、まず再構成に必要な近接場作用素の特異値分解の結果を示す。各解析振動数における特異値の分布状況を示したものが図-5である。ここでは、横軸に特異値の次数を縦軸に特異値の値を示している。なお、ここでの特異値は式(28)の解析に基づいている。この図からも明らかなように解析振動数が1 kHzの場合、特異値は次数の増大とともに急速にゼロに近づいてゆく。一方、解析振動数が4 kHzと7 kHzの場合には、特異値のゼロへの漸近の様子は

図-5 特異値の分布図

緩くなってゆく。定式化でも述べたように特性関数の評価は式(33)を用いる。また、加振領域の加力方向および観測領域での散乱波の観測はそれぞれ3成分を考慮する。この計算プロセスの途上では、式(30)に基づく正規直交基底 $\vec{\psi}_n$ が必要で、この正規直交基底の構成には特異値の逆数 κ_m^{-1} が用いられる。この意味で非常に小さい特異値は数値計算で問題を起こす可能性がある。しかし、これに関する議論は、特性関数の空間分布の状況の考察で行うことにする。そして、ここでは得られた特異値をすべて用い、スペクトルカットオフ(spectral cut off)¹⁾を行うことなく特性関数を計算する。

式(33)で与えた特性関数の空間分布を図-6から図-8に示す。ただし、特性関数の計算を行う検査面(検査点の集合を含む平面)は $x_3 = 0$ mとする。この面はターゲットモデルの3つの空洞の中心を横切る面である。定式化でも述べたように特性関数の値の小さな領域は空洞と判定されるべき領域である。ここでは、異なる解析振動数の解析結果の比較を容易とするための特性関数の値の最大値を1に正規化し、また、ターゲットモデルの空洞の位置を緑のラインで囲んでいる。

解析振動数が1 kHzの場合(図-6)、特性関数の値の低

い領域は3つの空洞を覆い、空洞よりはるかに大きい。この意味で特性関数の値は3つの空洞を分離せず、空洞位置を非常に粗く評価しているにすぎない。解析振動数が1 kHzの場合、S波とP波の波長は1 mと2 mであり、直径20 cmの空洞に比べはるかに長い。この意味でこの解析振動数では3つの空洞を分離するだけの分解能が不足していると言うこともできる。また、ここで特性関数の値の低い領域の大きさは概ね1 mから2 mであり、空洞に照射する波長の波長と対応している可能性が考えられる。

解析振動数が4 kHzの場合(図-7)、特性関数の値の低い領域は3つの空洞の位置と形状を分離して再構成している。この解析振動数の場合、S波とP波の波長は25 cmおよび50 cmであり、S波の波長は空洞の直径とほぼ等しくなっている。3つの空洞が分離された理由はS波の波長が空洞のスケールとほぼ等しくなったことによると考えられる。解析振動数が7 kHzの場合の特性関数の分布を図-8に示す。特性関数の空間分布は3つの空洞の存在を分離するものの、分離の明瞭さにおいては、解析振動数4 kHzの場合に比べやや劣っている。ここでは、S波とP波の波長が14 cmおよび29 cmでS波の波長は空洞の直径より小さい。S波の波長が空洞の直径より小さくなった場合の特性関数による分離の明瞭さの劣化の原因については、入射波長と散乱波の発生パターン検討や特性関数の数学的特徴を含めた今後の検討課題である。

いずれにせよ、以上に見るように特性関数の空間分布が3つの空洞を分離して再構成するのは、S波の波長が空洞のスケールと同程度かそれよりも小さな場合である。この意味で、ここでの空洞の再構成ではP波よりもS波がより重要である。この理由としてはこの波動場ではS波によるせん断変形が卓越したためであると考えられる。なお、前述のように解析振動数が1 kHzの場合の近接場作用素の特異値は他の解析振動数と比較して次数の増大とともに急激にゼロへ近づいていく(図-5)。そして、この場合には特性関数の評価に用いる固有関数の構成に問題が生じる可能性が考えられた。しかしながら、図-6から図-8の特性関数の空間分布を見る限り、特性関数には解析振動数の空間分解能がより重要である。ゼロに近い特異値はスペクトルカットオフによる正則化での考慮の対象になるものの、本解析においてはその重要度は低いと考えられる。

(2) クラックの検出についての検討

次の数値計算では、波動場中のクラックの検出問題を扱う。ここではクラックを非常に薄い空洞としてモデル化する。クラックの広がりスケールに比べれば、ここでのクラックの厚さは非常に小さく、このような

図-6 特性関数の空間分布 (1 kHz)

図-7 特性関数の空間分布 (4 kHz)

図-8 特性関数の空間分布 (7 kHz)

場合にも、クラックの位置と形状が再構成できるかどうかがこの課題である。クラックは10 cm×10 cmの広がりを持ち、厚さは1 mmとする。クラックの境界要素モデルを図-9に示す。境界要素は三角形一定要素でクラックの広がりを記述する三角形要素の1辺の長さは1.25 cmである。また、このクラックはS波およびP波速度2130 m/s, 3310 m/sの波動場に埋め込まれているものとする。この波動場の定数はヤング率E=25 GPa, ポアソン比0.15のコンクリート材料を想定して

図-9 クラックモデルの境界要素分割

図-11 特異値の分布図

図-10 解析モデル

いる。

a) クラックの広がり再構成

クラックに向けて波動を照射する振源を設定する領域 Γ_1 はクラックの上方の 20 cm の位置に設定する。同様に散乱波を計測する領域 Γ_2 はクラックの下方 20 cm の位置に設置する。領域 Γ_1 および Γ_2 は一辺 60 cm の正方形とし、加振点と観測点はそれぞれ 36 点と 121 点とする。設置した加振点と観測点およびクラックの位置関係を図-10 に示す。また、解析振動数を 20 kHz および 60 kHz とする。

今回の解析では振源を設定する領域と散乱波を観測する領域を同一の球面上でなく、平行で異なる 2 平面とした。このような設定でもクラックの検出が可能かどうかを検討することも課題となる。

以上の解析条件で得られた近接場作用素の特異値の分布を図-11 に示す。解析振動数が 20 kHz の場合は 60 kHz の場合と比較して、特異値の値は急速にゼロに近づいていく。低い解析振動数での特異値がゼロに急速に近づく性質は、球状の空洞の検出問題でも見られたことである。ここでは球状の空洞の検出問題と同様に、すべての特異値を用いて射影行列を構成する。そして、以下では解析振動数の分解能に関連付けて、特性関数

の空間分布を考察する。

まず、特性関数を計算する検査面をクラックの中央を横切る $x_3 = 0$ m の位置にとり、クラックの広がり位置を再構成することを試みる。図-12 は解析振動数 20 kHz のときの特性関数の空間分布である。解析の精度の考察を可能にするために、実際のクラックの位置を緑のラインで明示している。また、ここでの解析振動数においては S 波および P 波の波長はおよそ 11 cm と 17 cm になる。図-12 によれば、特性関数の値の小さな領域は実際のクラックよりもかなり大きくでている。この特性関数の値の低い領域の大きさはおおよそ縦と横方向に 20 cm ほどであり、P 波の波長と概ね一致している。今回の解析ではクラックの上面に振源を設定し、下面で散乱波をキャッチする方法を用いていることから、この散乱問題に P 波が重要な役割を与える。こうした観点で特性関数の値の低い領域の大きさを説明することが可能である。

解析振動数 60 kHz を用いた場合の特性関数の空間分布を図-13 に示す。この解析振動数の場合 S 波と P 波の波長はそれぞれ 3.6 cm 並びに 5.5 cm である。図-13 では特性関数の低い領域はクラックの位置と広がり概ね一致している。クラックに照射する波動の波長を短くし、解析の分解能を上げたことでクラックの水平方向の広がり再構成が可能になったことが理解できる。

次に、図-14 に示すように 2 個のクラックを同一平面上に設定し、クラックの位置と大きさが再構成できるかどうかの検討を行う。ただし、波動場の定数、クラックへの波動の照射方法、散乱波の観測方法は同一とする。検査面を $x_3 = 0$ m として、解析振動数を 60 kHz とした場合の特性関数の空間分布を図-15 に示す。この図より明らかなように、特性関数の空間分布はクラックの広がりをも的確にとらえていることが理解できる。この結果からも本手法の有効性が示される。

図-12 特性関数の空間分布 (20 kHz)

図-15 特性関数の空間分布

図-13 特性関数の空間分布 (60 kHz)

図-16 図-10 の解析モデルによるクラック厚の再構成のための特性関数の空間分布 (60 kHz)

図-14 2つのクラックの解析モデル

b) クラックの厚さの再構成

クラックの厚さを再構成するために、再び図-10 に示す解析モデルを用いる。そして、検査面をクラックの厚さ方向にクロスするようにとる。図-16 は、解析振動数を 60 kHz とした場合の特性関数の分布を示す。この図より明らかなように、特性関数はクラックの位置や厚さを適切に捉えることができていない。この原因として、入射波の波長がクラックの厚さを検出するに十

分小さくなかったこと、また加振領域と散乱波の観測領域がクラックの広がりには平行であったために、散乱波がクラックの厚さの情報を十分に捉えられなかったことが挙げられる。通常はクラックの位置や方向は未知である。この数値実験の結果は、クラック位置を推定するためには、多数の方向から波動を照射し、散乱波を観測することが重要であることを示唆している。

次にクラックへの波動の照射方法と散乱波の観測方法を図-17 に示すように設定する。領域 Γ_1 , Γ_2 は一辺 60 cm の正方形とし、クラックと直交する方向に設定し、その位置はクラックの中心から 20 cm の位置に設置する。また、加振点および観測点をそれぞれ 36 点、121 点とする。

検査面を $x_1 = 0$ m として、解析振動数を 60 kHz とした場合の特性関数の分布図を図-18 に示す。ここでの S 波、P 波の波長は前述の通り 3.6 cm および 5.5 cm である。特性関数の値の低い領域は、横方向では概ねクラックの大きさと一致しているものの、厚さ方向ではクラックの厚さを大きく上回っている。詳細に厚さ方向の特性関数の値の低い領域を観察すると、この厚さはおよそ 7 cm であり、P 波の波長より若干大きくなっ

図-17 解析モデル

図-19 特性関数の空間分布 (120 kHz)

図-18 特性関数の空間分布 (60 kHz)

ている。

特性関数の値の低い領域がP波による分解能に関連すると考え、次に解析振動数を120 kHzに上げて解析を行う。この場合の特性関数の空間分布を図-19に示す。ここでのS波、P波の波長はそれぞれ1.8 cm並びに2.8 cmである。解析振動数を上げたことによりクラック上面と下面の境界要素を細分化し、三角形境界要素の一辺の長さは0.4 cmとする。ただし、境界要素モデルは図-9とほぼ同様であるのでここではあえて明示しない。

図-19に示すように特性関数の値の低い領域は図-18と同様に横方向では概ね一致しているものの、厚さ方向ではやはり過大にクラックの広がり进行评估している。しかしながら、この厚さ方向の長さはおよそ3 cmであり、P波の波長と同程度である。このようにクラックに向けて照射する波長の波長による分解能が、特性関数の評価に重要な役割を与えている。また、波動の照射方向も重要な要素であることも理解できる。

4. 結論

本論文では三次元弾性波動場の近接場方程式に対して、特性関数を定義する散乱逆解析手法を展開した。定式化は、近接場方程式の解を評価するかわりに近接場方程式の作用素の値域と、共役作用素の核がヒルベルト空間を直交分解する性質に基づくものである。ただし、ここでのヒルベルト空間は散乱波の観測領域で定義される L_2 空間である。特性関数は検査点から放射されるGreen関数を、この L_2 空間の元と考え、近接場作用素の値域との距離として評価する。この作用素の値域の基底は特異値分解を用いることで容易に得ることができ、このため、近接場方程式の解の評価のための煩雑な手続きが不要になる。そして、結果として波動場中の散乱体の形状や位置の推定のための簡便なアルゴリズムが提示されることになる。

展開した手法の有効性は三次元無限弾性波動場中の空洞およびクラックの検出問題を通して実証した。数値解析結果によれば、散乱体に照射する波動の波長が十分小さければ、特性関数の空間分布は空洞やクラックの位置と形状を、的確に表現する。すなわち、特性関数の空間分布は、散乱体に向けて照射する波動の波長の空間解像度に強く依存する。

近接場方程式は第1種Fredholm方程式として与えられ、通常はその解の評価においては、適切な正則化手法が必要である。しかしながら、ここでの特性関数を用いる手法は、今回の数値計算結果を見る限り、適切な解像度を持つ波動を散乱体に向けて照射すれば、特にスペクトルカットオフなどの正則化手法は不要のようである。

なお、今回は散乱波の観測ポイントをどのように設定するか、あるいは散乱体に向けて照射する波動の振源をどのように設定するかの議論は、特に行わなかった。しかしながら、本手法の実用化を図る上では、この

問題に対する詳細なテスト計算を行うことのみならず、数学的な問題として考察することも重要である。また、今回は特性関数と照射する波動の解像度との関連が把握できたものの、板構造や梁構造のようなガイド波が重要になる波動場での、特性関数の性状は検討課題として残されている。

参考文献

- 1) Colton, D. and Kress, R.: *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Berlin, Springer.
- 2) Colton, D. and Kirsh, A.: A linear sampling method for solving scattering problems in the resonance region, *Inverse problems*, Vol. 12, pp. 383-393, 1996.
- 3) Pelekanos, G., Abubakar, A. and van den Berg, P.M., 2004, Contrast source inversion methods in elastodynamics, *The Journal of Acoustical Society of America*, 114, 2825-2834
- 4) Kirsch, A., The factorization method for inverse problems, Newton Institute.
<http://www.newton.ac.uk/files/seminar/20110728090009451-152765.pdf>
- 5) Gintides, D., Sini, M. and Tháhn, N. T.: Detection of point-like scatterers using one type of scattered elastic waves, *Journal of computational and applied mathematics*, Vol. 236, pp. 2137-2145, 2012
- 6) Fata, S.N. and Guzina B.B.: A linear sampling method for near-field inverse problems in elastodynamics, *Inverse problems*, Vol. 20, pp. 717-736, 2004.
- 7) Baganas, K., Guzina, B.B., Charalambopoulos, A. and Manoliz, G.F.: A linear sampling method for inverse transmission problem in near-field elastodynamics, *Inverse problems*, Vol. 22, pp. 1835-1853, 2006.
- 8) Touhei, T., Hinago, T. and Fukushima, Y.: Inverse scattering analysis of elastic half space by means of the fast volume integral equation method, *Engineering analysis and boundary elements*, Vol. 44, pp. 130-142, 2014.
- 9) Touhei, T., Fukushima, Y. and Tanaka, T.: A linear sampling method for detecting fluctuations of the wavefield in an elastic half-space, *Int. J. solids and structures*, Vol. 72, pp. 26-37, 2015.
- 10) 新井朝夫: ヒルベルト空間と量子力学, (共立講座 21 世紀の数学), 共立出版, 1991
- 11) Colton, D., *Analytic Theory of Partial Differential Equations*, Pitman, London, 1980.

(2015. 6. 23 受付)

A LINEAR SAMPLING METHOD FOR DETECTING CRACKS IN 3D ELASTIC WAVE FIELD

Terumi TOUHEI and Taku NIKAIDO

A characteristic function for the near-field equation is developed to reconstruct cavities and/or cracks in 3D elastic wavefield. The method itself is originated from the linear sampling method developed by Colton and Kirsch. The present method uses the singular value decomposition of the near-field operator, that realizes a simplified method to reconstruct cavities and/or cracks. Several numerical calculations are carried out to verify the effectiveness of the present formulation.