混合型剛塑性有限要素法における 辺ベース要素の適用とその有効性

西藤 潤¹・春日井 健太²・小林 俊一³

¹正会員 博士(工学) 京都大学准教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C クラスター)
E-mail: saito.jun.3n@kyoto-u.ac.jp

²学生会員 学士(工学) 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C クラスター)
E-mail: kasugai@basewall.kuciv.kyoto-u.ac.jp

³正会員 博士(工学) 金沢大学准教授 理工研究域 (〒 920-1192 石川県金沢市角間町)

下界定理に基づく剛塑性有限要素解析において、通常の三角形要素内で一定の応力場を仮定した場合、ロッキングが生じ崩壊荷重を実際よりも大きく見積もるという問題がある。ロッキングを回避するため、節点ベース要素の適用が考えられるが、問題の設定によっては崩壊メカニズムが正しく求められないことがある。そこで、本研究では新たに辺ベース要素の適用を試み、その有効性を検証した。数値解析例として、4つの問題を解き、通常の三角形要素、節点ベース要素、辺ベース要素によって得られる解析結果を比較した。その結果、辺ベース要素を用いた場合、拘束の強い問題においてはロッキングが生じるが、それ以外の問題では適用可能であることが分かった。

Key Words: Edge-based Element, Limit Analysis, Mixed Formulation, Finite Element Method

1. はじめに

剛塑性有限要素法とは、極限解析の問題を有限要素法により解く数値解析手法であり、塑性変形に比べ弾性変形が無視できる程小さい場合に用いられる。土木分野では地盤の安定解析でしばしば用いられ、材料分野では金属加工の問題に対して適用されることがある。剛塑性有限要素法は弾塑性有限要素法に比べ必要となる材料パラメータの数が少なく、数値的に安定して終局状態を計算できるという特徴を有している。

剛塑性有限要素法の定式化は変位型と混合型に分けられる。変位型の剛塑性有限要素法は上界定理によって導出され、未知数として変位速度を持つ。一方、混合型の剛塑性有限要素法は下界定理に基づいて定式化され、最適化問題を解く過程で双対問題として上界定理が現れる。よって、応力だけでなく、変位速度も未知数となっている。

本研究で対象とする混合型の剛塑性有限要素法は、制約条件付きの最適化問題の形で定式化される。この最適化問題をはじめて非線形問題として解いたのが Zouain ら¹⁾である。Zouain らの手法では、三角形要素により二次元領域を離散化し、要素内で応力を一定としている。塑性を対象とする問題において三角形要素を用いているため、平面ひずみ状態の問題においてはロッキングが生じる可能性がある。これは、三角形要素で応力が一定となる場合、要素ごとに流れ則を満足する必

要があり、自由度の数に比べ制約条件の数が過多となることが原因である。ロッキングが生じない定式化として、Lyamin ら²⁾の手法がある。Lyamin らは、不連続ガラキン法のように三角形要素の頂点に応力を与え、要素内で線形補間する新しい離散化手法を提案している。この手法はロッキングを回避できる点では優れているが、双対問題の物理的意味が不明であるため、双対問題の解である変位速度が求められないという欠点を有している。また、西藤ら³⁾は混合型剛塑性有限要素法に Dohrmann ら⁴⁾が提案した節点ベース要素の適用を行った。節点ベース要素を用いた場合、要素ごとではなく節点ごとに流れ則を満足させることになる。これにより、自由度の数を減少させることなく、制約条件の数をおよそ半分にできる。また、通常の三角形要素ではひずみ速度を3つの節点の変位速度から計算していたが、節点ベース要素ではより多くの節点の変位速度からひずみ速度を計算するため、ロッキングを回避することが可能となる。しかしながら、4.2章で示すように、節点ベース要素を用いて地盤の支持力解析問題を解くと、崩壊メカニズムが正しく得られない問題がある。

節点ベース要素は Smoothed Element の一種であり、二次元の場合はこの他に辺ベース要素が存在する。Liu ら⁵⁾の研究によると、これらの要素を弾性解析の問題に適用すると、通常の三角形要素は解を実際よりも剛に、節点ベース要素は柔に評価し、辺ベース要素ではそ

の中間となることが分かっている．また，ポアソン比が 0.5 に近い時，つまり非圧縮性材料においては，通常の三角形要素と辺ベース要素ではロッキングが生じるという結果を示している．Smoothed Element を剛塑性解析に適用した研究としては，Nguen-xuan ら⁶⁾ が知られている．Nguen-xuan らは Smoothed Element を変位型の剛塑性有限要素法に適用しており，結論として，通常の三角形要素より辺ベース要素の方が精度が高く，節点ベース要素はさらに精度が高いことを示している．しかし，極限解析において最も一般的な支持力解析を扱っておらず，結論が一般的なものとは言い難い．Smoothed Element を用いて支持力解析を解いた研究としては，vu Hoang ら⁷⁾ および Le ら⁸⁾ が挙げられる．前者は節点ベース要素，後者は辺ベース要素を変位型剛塑性有限要素法に適用しているが，両者とも Nagtegaal⁹⁾ の論文で取り扱われた規則的な配置の三角形要素を用いており，一般的な不規則な配置の三角形要素に関する検証がなされていない．

以上を踏まえ，本研究では辺ベース要素を混合型剛塑性有限要素法へ適用し，その有効性について検証を行った．例題として，支持力解析を含む不規則配置の三角形要素からなる 4 つの問題を解いた．

2. 混合型剛塑性有限要素解析

(1) 問題の設定

図-1 剛塑性境界値問題のモデル

剛塑性境界値問題のモデルを図-1 に示す．対象を剛完全塑性体と仮定する．境界は変位速度を 0 とする斉次ディリクレ境界 S_u とトラクションを与えるノイマン境界 S_σ とする．領域およびノイマン境界に対して，荷重係数 α に比例した荷重，つまり評価したい荷重 αb_1 と荷重係数 α のかからない荷重，つまり評価したい荷重以外の一定荷重 b_0 を作用させ，物体が塑性崩壊するときの荷重係数 α を求める．

(2) 問題の定式化

領域全体における力の釣り合い式の弱形式は以下の式で与えられる．

$$B^T \sigma = \alpha b_1 + b_0 \quad (1)$$

ここに，行列 B は微分作用素であり具体的な式については次章で述べる． σ は各要素における応力を並べたベクトルである．ただし，式 (1) は斉次ディリクレ境界上の点に対応する成分は含んでいない．また，塑性条件として応力は降伏基準を満足する必要がある，その条件は次式で与えられる．

$$f(\sigma) \leq 0 \quad (2)$$

ここに， f は各要素における降伏関数を並べたベクトルである．なお，ベクトル同士の不等式は，全ての成分において成り立つものとする．

下界定理より，「力の釣り合い式と応力境界条件を満たす (静力学的許容な) 応力場が降伏条件を満たす (静力学的可容である) とき，荷重係数 α は真の崩壊時の荷重係数 α^* の下界値を与える」ことが知られている．すなわち，式 (1), (2) を同時に満たすとき，荷重係数 α は以下の式で表される．

$$\alpha \leq \alpha^* \quad (3)$$

式 (1)–(3) より，荷重係数 α の近似解を求めるには，以下の非線形最適化問題を解けば良いことが分かる．

$$\begin{aligned} \min_{\sigma, \alpha} \quad & -\alpha \\ \text{subject to} \quad & \begin{cases} \alpha b_1 + b_0 = B^T \sigma \\ f(\sigma) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

式 (4) を解くために，ラグランジアン L を定義する．

$$\begin{aligned} L(\sigma, \alpha, u, \lambda) &= \begin{cases} -\alpha + u^T (\alpha b_1 + b_0 - B^T \sigma) + \lambda^T f(\sigma) & (\lambda \geq 0) \\ -\infty & (\lambda < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

ここに u, λ はそれぞれ，節点および要素の中心で与えられるラグランジュ乗数 u_i, λ_i を並べたベクトルである．

ラグランジアン (5) から，以下のカルーシュ・キューン・タッカー条件を得る．

$$\alpha b_1 + b_0 - B^T \sigma = 0 \quad (6)$$

$$\Lambda f(\sigma) = 0, \quad \lambda \geq 0, f(\sigma) \leq 0 \quad (7)$$

$$G^T \lambda - B u = 0 \quad (8)$$

$$b_1^T u = 1 \quad (9)$$

ここに， Λ は λ_i からなる対角行列であり， G は以下の式で表される行列である．

$$G_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_j} \quad (10)$$

式の形から、式 (8) は流れ則であり、ラグランジュ乗数 u_i, λ_i の物理的意味はそれぞれ変位速度、塑性乗数であることが分かる。そのため、非線形最適化問題 (4) を解くと、ラグランジュ乗数として変位速度および塑性乗数が得られる。式 (9) は外部仕事率を 1 に基準化している式で、変位速度の大きさを定めている。剛塑性解析においては変位速度の大きさ自体に意味はなく、比が重要となることに注意されたい。

式 (6)–(9) を満たすことは、力の釣り合い式、塑性条件、流れ則を満たすことを意味する。極限解析においては、この 3 つの条件を同時に満足するとき、真の荷重係数が得られることが知られている。つまり、最適化問題 (4) を解くことにより、確かに正しい荷重係数が求まることが分かる。

なお、非斉次ディリクレ条件を含む問題（変位速度制御の問題）の場合、下界定理の主張は「応力場が力の釣り合い式および降伏条件を満たすとき、外部仕事率は真の崩壊時の外部仕事率の下界値を与える」となる。つまり、次式を解くことで近似解が得られる。

$$\begin{aligned} \min_{\sigma, p} \quad & -v^T p \\ \text{subject to} \quad & \begin{cases} B_N^T \sigma = b \\ B_D^T \sigma = p \\ f(\sigma) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 v は非斉次ディリクレ境界に与える変位速度、 p はその境界上の反力、 b は領域およびノイマン境界に作用する荷重である。微分作用素の行列 B は領域およびノイマン境界上の点に対応する成分を持つ行列 B_N と、非斉次ディリクレ境界上の点に対応する成分を持つ行列 B_D に分けられる。この問題も非斉次ディリクレ条件を含まない問題とほぼ同様の手順で解くことが出来る。

(3) 制約条件付きの最適化問題の解法

式 (6)–(9) を満足する解は、ニュートンラフソン法によって求められる。その際に数式を縮約すると、最終的に解くべき線形方程式の行列はバンド型の正定値対称行列となり¹⁾、汎用的なソルバーサブルーチンで解を得ることができる。ただし問題によっては、条件数が大きくなるため、直接解法を選択する必要がある。なお、本研究ではインテル社のコンパイルに同梱されている Math Kernel Library (MKL) に含まれている粗行列ソルバーの pardiso¹⁰⁾ を用いた。

また、最適化問題 (4) を二次錐計画問題の形で式変形することができれば、最適化問題用のソフトウェア（例えば、MOSEK¹¹⁾ など）を使用することも可能である。

3. 辺ベース要素の適用

辺ベース要素とは、図-2 に示すように辺の両端と隣接する三角形の中心によって囲まれるようにしてできる要素である。変位速度の評価は通常の三角形要素と同様に節点上で行うが、応力と塑性乗数は辺ベース要素内で一定とし、辺の中点上で評価する。

図-2 辺ベース要素

通常の三角形要素では、微分作用素は以下のように作られる。要素 J ($J = 1, \dots, N_e, N_e$: 全要素数) の節点を J_k ($k = 1, 2, 3$)、節点 J_k の x_i 座標を x_{iJ_k} ($i = 1, 2$) とする。要素 J の面積 S_J は次式で表される。

$$S_J = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_{1J_1} & x_{2J_1} \\ 1 & x_{1J_2} & x_{2J_2} \\ 1 & x_{1J_3} & x_{2J_3} \end{bmatrix} \quad (12)$$

要素 J の B マトリクス B_J の非零成分は次式によって定義される。

$$B_{Jik} = \frac{\partial S_J}{\partial x_{iJ_k}} \quad (13)$$

これを解くと、 B_J の非零成分は以下のように表される。

$$B_{J11} = \frac{x_{2J_2} - x_{2J_3}}{2}, \quad B_{J21} = \frac{x_{1J_3} - x_{1J_2}}{2} \quad (14)$$

$$B_{J12} = \frac{x_{2J_3} - x_{2J_1}}{2}, \quad B_{J22} = \frac{x_{1J_1} - x_{1J_3}}{2} \quad (15)$$

$$B_{J13} = \frac{x_{2J_1} - x_{2J_2}}{2}, \quad B_{J23} = \frac{x_{1J_2} - x_{1J_1}}{2} \quad (16)$$

辺ベース要素の微分作用素 B は辺に隣接する三角形要素の微分作用素に $1/3$ を乗じたものを足し合わせて作る。係数 $1/3$ は、三角形要素の微分作用素が三辺に均等に影響を与えるという仮定による。計算手順の概略を以下に示す。辺 L における辺ベース要素の面積 $\hat{S}_L$ は、辺 L に隣接する三角形要素 J の面積 S_J を用いて以下のように定める。

$$\hat{S}_L = \sum \frac{1}{3} S_J \quad (17)$$

辺 L における辺ベース要素の微分作用素 $\hat{B}_L$ をこの面

積 $\hat{S}_L$ を用いて以下のように定義する．

$$\hat{B}_L = \begin{bmatrix} B_{L11} & 0 & \dots & B_{L1N_n} & 0 \\ 0 & B_{L21} & \dots & 0 & B_{L2N_n} \\ B_{L21} & B_{L11} & \dots & B_{L2N_n} & B_{L1N_n} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$B_{LiI} = \frac{\partial \hat{S}_L}{\partial x_{iI}} \quad (19)$$

ここに， N_n は全節点数， I は節点番号を表す．式 (18) で得られた $\hat{B}_L$ を並べた行列を B とし，前章における力の釣り合い式に用いる．

なお，式 (18),(19) より，三角形要素ではなく， n 角形要素でメッシュ分割を行った場合も，同様にして辺ベース要素の微分作用素が作成可能であることが分かる．

また，節点ベース要素は，節点を中心とした隣接する三角形要素の $1/3$ の領域を集めた要素（図-3）である．変位速度，応力，塑性乗数は全て節点上で評価し，微分作用素 B は辺ベース要素と同様，隣接する三角形要素の微分作用素に $1/3$ を乗じたものを足し合わせて作る．

図-3 節点ベース要素

4. 数値解析例

(1) 有円孔平板問題

図-4に示すように，一辺の長さ L の正方形の中央に直径 $L/5$ の円孔がある平板を対象とする．外力として，鉛直方向に等分布荷重 p を，水平方向に等分布荷重 βp を与える． $\beta = 1$ （等方引張）， $\beta = 0$ （一軸引張）， $\beta = -1$ （せん断引張）の3通りの荷重パターンにおける崩壊荷重 p_c を求めた．降伏関数として，式 (20) で表される平面応力状態における von Mises の破壊基準を用いるため，ロッキングが生じない問題である．

$$f(\sigma) = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2} - \sigma_{11}\sigma_{22} - k \quad (20)$$

問題の対称性から解析領域を右上 $1/4$ のみとした．解析に用いたメッシュを図-5に示す．

理論解¹²⁾ および数値解析の結果を表-1に示す．表中の値は，円孔のない平板の崩壊荷重 p'_c で正規化した崩壊荷重である．辺ベース要素を用いて得られた結果は，

図-4 有孔平板問題

図-5 解析に用いたメッシュ

$\beta = \pm 1$ のときは，上界値と下界値の間に挟まっている． $\beta = 0$ においては，理論解よりも大きな値を取っているものの工学的には十分良好な一致を示している．da Silva ら¹³⁾ は変位型の剛塑性解析を，要素数 3200 の規則的な配置のメッシュを用いて行った．本手法は，要素数 794 の不規則な配置のメッシュを用いて，da Silva ら¹³⁾ と同程度の精度を出している．また，通常の三角形要素，辺ベース要素，節点ベース要素の順に解が小さくなっているが，精度に大きな差は見られないことが分かる．

表-1 無次元化した崩壊荷重 p_c/p'_c

	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = -1$
理論解 (上界値) ¹²⁾	0.907	0.800	0.876
理論解 (下界値) ¹²⁾	0.894	0.800	0.777
通常の三角形要素	0.900	0.813	0.843
辺ベース要素	0.898	0.807	0.834
節点ベース要素	0.895	0.804	0.826
da Silva ら ¹³⁾	0.899	0.807	—

辺ベース要素を用いた場合の $\beta = 0$ におけるひずみ速度の大きさの分布を図-6に示す．理論解とよく似た

滑り線が得られていることがわかる．通常の三角形要素および節点ベース要素を用いた場合も，辺ベース要素と似た分布が得られた．

図-6 ひずみ速度の大きさの分布 ($\beta = 0$ ，辺ベース要素)

以上より，この問題では平面応力状態を想定しており，ロッキングが生じないため，いずれの要素を用いても正しく崩壊荷重，崩壊メカニズムが得られることが分かった．

(2) 押し出し問題

図-7に示す押出加工の問題を考える．ピレットの幅に対するダイスの幅の比 β が $1/3$ と $1/2$ の場合を考える．平面ひずみ状態と仮定するため，この問題ではロッキングが生じ得る．降伏関数は以下の von Mises の破壊基準を用いる．

$$f(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2} - c \quad (21)$$

コンテナとピレットには摩擦は作用しないと仮定する．ダミーブロックは変形することなく水平方向に移動するものとし，変位速度制御問題として扱う．解析領域は，対称性より上半分のみとした．図-8 は $\beta = 1/3$ のときに用いたメッシュ（要素数 5202）である．

図-7 押し出し問題

数値解析結果を，理論解および既存研究の結果と併せて表-2に示す．表中の値は崩壊荷重を破壊強度 σ_Y で正規化した値，括弧内の数字は理論解との誤差である．

図-8 解析に用いたメッシュ（不規則）

Borges ら¹⁴⁾ は通常の三角形要素を用いて混合型剛塑性解析を行い，アダプティブ法により解の精度を高めている．アダプティブ法によって得られたメッシュの要素数は， $\beta = 1/3$ のとき 10255， $\beta = 1/2$ のとき 12247 である．春日井ら¹⁵⁾ は節点ベース要素を混合型剛塑性解析に適用し，同様にアダプティブ法を用いた．最終的なメッシュの要素数は 8349 である．

$\beta = 1/3$ ， $\beta = 1/2$ どちらの場合も，節点ベース要素は理論解と良好な一致を示している．それに対し，通常の三角形要素および辺ベース要素と理論解の差は無視できないほど大きく，ロッキングが生じていることが分かる．Borges ら¹⁴⁾ は通常の三角形要素を用いながらもアダプティブ法を使用することで精度の高い解を得ているが，節点ベース要素を用いた春日井ら¹⁵⁾ はさらに高い精度の解を得ている．

表-2 無次元化崩壊荷重 $P/(L\sigma_Y)$

	$\beta = 1/3$	$\beta = 1/2$
理論解 ¹⁶⁾	1.979	1.484
通常の三角形要素	2.888(45.9%)	2.032(36.9%)
辺ベース要素	2.328(17.6%)	1.699(14.5%)
節点ベース要素	2.049(3.5%)	1.528(3.0%)
Borges ら ¹⁴⁾	1.969(0.51%)	1.478(0.40%)
春日井ら ¹⁵⁾	1.982(0.15%)	—

$\beta = 1/3$ のときのひずみ速度の大きさの分布を図-9，図-10に示す．通常の三角形要素では滑り線が不明瞭であるのに対し，辺ベース要素では理論的に得られる滑り線と同じ形状となる．節点ベース要素でも辺ベース要素の分布と似た分布が得られた．以上より，この問題においては崩壊荷重および崩壊メカニズムが正しく得られる節点ベース要素が最も優れていると言える．

(3) 支持力解析

図-11に示すように，自重のない十分大きな領域に垂直な等分布荷重 p を与える支持力解析を考える．平面ひずみ状態を仮定するため，ロッキングが生じ得る問題である．降伏関数として，Abbo ら¹⁷⁾ が提案した平

図-9 ひずみ速度の大きさの分布（通常の三角形要素）

図-10 ひずみ速度の大きさの分布（辺ベース要素）

図-12 解析に用いたメッシュ（不規則）

図-13 解析に用いたメッシュ（規則的）

滑化パラメータ a を導入した Mohr-Coulomb の破壊基準（式 (22)）を用いる．

$$f(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2 + a^2 \sin^2 \phi} + \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin \phi - c \cos \phi \quad (22)$$

ここで、 c は見かけの粘着力、 ϕ は内部摩擦角である．通常の Mohr-Coulomb の破壊基準（式 (22)）において $a = 0$ としたもの）には、内部摩擦角が 0 でないときに微分不可能な点が存在し、計算が不安定となることがある．本研究では、複数の試行の結果、収束性が良く、その値の前後で値が大きく変化しない $a = 0.05c \cot \phi$ を用いて平滑化を行った．内部摩擦角を変化させ、その際の崩壊荷重 p_c をそれぞれ計算する．解析領域は問題の対称性から右側 1/2 のみとした．解析には、図-12 に示す不規則な配置のメッシュ（要素数 1676）と図-13 に示す規則的な配置のメッシュ（要素数 320）を用いた．

図-11 支持力解析問題

内部摩擦角を 0 としたとき、得られる崩壊荷重を表-3 に示す．崩壊荷重は粘着力 c で除している．括弧内の数字は理論解との誤差である．この問題においても通常の三角形要素、辺ベース要素、節点ベース要素の順に解が小さくなっていることが確認できる．表中の vu Hoang ら⁷⁾、Le ら⁸⁾の手法は、節点ベース要素、辺ベー

ス要素をそれぞれ変位型剛塑性解析に適用したときの計算結果であり、要素数は前者が 960、後者が 640 である．西藤ら¹⁸⁾は混合型剛塑性解析により、アウグラスモードを抑制する四角形要素を用いて問題を解いている．要素数は 150 である．vu Hoang ら、Le ら、西藤らいずれも規則的な配置のメッシュを用いている．

この表より、どの要素を用いても、規則的な配置のメッシュを使うことで、数値解析結果が理論解に近づいていることが分かる．規則的な配置のメッシュを用いた場合、ひずみ速度の分布および崩壊メカニズムは、どの要素でも、理論的に得られる滑り線に似た結果が得られる．

なお、規則的な配置のメッシュは、四角形を対角線で分割し、三角形要素を作成する．このような領域分割が可能な対象においては、三角形要素を使う必要はなく、四角形要素に対して西藤らの手法を適用することで、精度の高い解が得られる．

不規則な配置のメッシュを用いて、内部摩擦角を変化させたときの解析結果を図-14 に示す．縦軸は粘着力 c で除した無次元化崩壊荷重 p_c/c であり、横軸は内部摩擦角である．

内部摩擦角によらず、ここでも崩壊荷重の値は、通常の三角形要素、辺ベース要素、節点ベース要素の順に小さくなっている．内部摩擦角が大きくなるに連れ、Prandtl の理論解¹⁹⁾と離れる傾向が見られるものの辺ベース、節点ベースは理論解と良好な一致を示している．通常の三角形要素では、崩壊荷重が内部摩擦角とともに増加する傾向は他と同様であるが、他の二要素

表-3 無次元化崩壊荷重 p_c/c ($\phi = 0^\circ$)

Prandtl ¹⁹⁾ (理論解)	5.142
通常の三角形要素 (不規則)	5.793 (13%)
辺ベース要素 (不規則)	5.392 (4.9%)
節点ベース要素 (不規則)	5.031 (2.1%)
通常の三角形要素 (規則的)	5.404 (5.1%)
辺ベース要素 (規則的)	5.325 (3.5%)
節点ベース要素 (規則的)	5.055 (1.7%)
vu Hoang ら ⁷⁾	5.283 (2.8%)
Le ら ⁸⁾	5.225 (1.6%)
西藤ら ¹⁸⁾	5.185 (0.84%)

と比べると乖離が大きい。

図-14 無次元化崩壊荷重

次に、内部摩擦角が 20° のときのひずみ速度の大きさの分布を図-15、図-16に示す。節点ベースでは理論解と異なり、地盤の浅いところに集中しているのに対して、辺ベース要素では理論的に得られる滑り線とよく似た形状となる。通常の三角形要素においては、崩壊荷重を大きく見積もっているが、滑り線は辺ベース要素と似た結果が得られた。

図-15 ひずみ速度の大きさの分布 ($\phi = 20^\circ$, 辺ベース要素)

図-16 ひずみ速度の大きさの分布 ($\phi = 20^\circ$, 節点ベース要素)

また、内部摩擦角が 20° のときの崩壊メカニズムを図-17、図-18に示す。節点ベース要素では分布荷重を与えている領域の端部付近で変位速度が大きく現れている。一方で、辺ベース要素では既存研究とよく似た結果が得られている。通常の三角形要素でも辺ベース要素とよく似たメカニズムが得られた。

図-17 崩壊メカニズム (辺ベース要素)

図-18 崩壊メカニズム (節点ベース要素)

以上より、崩壊荷重に関しては辺ベース要素、節点ベース要素で正解に近い値が得られることが分かった。しかし、崩壊メカニズムに関しては、節点ベース要素を用いると正しく得られない結果が得られた。この問題を解消するため、アダプティブ法を用いて局所的に細かい要素分割を行ったメッシュを用いて同様の計算を行ったが、崩壊メカニズムは正しく得られなかった。

(4) 氷床貫入問題

支持力解析とよく似た問題として図-19に示す氷床貫入問題を考える。支持力解析と比較するため、厚さ t を十分厚い ($L/t = 0$) と仮定し、平面ひずみ状態とする。支持力解析は等分布荷重を与えていたのに対し、この

問題では変位速度制御の問題となる．降伏関数は式 (23) で表される Reinicke-Ralston の破壊基準²⁰⁾ とする．

$$f(\sigma) = a_6 \left[\frac{1}{4} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2 \right] + \frac{1}{2} (2a_7 + a_9) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \left(1 + \frac{1}{8} \frac{a_9^2}{a_1} \right) \quad (23)$$

ここで， $a_1 = 1.77C_x^{-2}$, $a_6 = 24.62C_x^{-2}$, $a_7 = 6.04C_x^{-1}$, $a_9 = -3.54C_x^{-1}$ である． C_x は強度パラメータである．解析には，前問で用いた図-12 の不規則な配置のメッシュを用いた．

図-19 氷床貫入問題

解析結果を既存の研究結果と併せて表-4 に示す．Lyamin ら²⁾ は下界定理に基づく剛塑性解析により下界値を，Krabbenhoft ら²¹⁾ は Lyamin ら²⁾ の離散化手法を用いて変位型剛塑性解析を行うことで上界値を求めている．通常の三角形要素を用いた場合，崩壊荷重は上界値を超えているが，辺ベース要素および節点ベース要素を用いた場合は，崩壊荷重は理論解に挟まれていることが分かる．また，この問題についても通常の三角形要素，辺ベース要素，節点ベース要素の順に解が小さくなっている．

表-4 無次元化崩壊荷重 $P_c/(LC_x)$

理論解（上界値） ²⁰⁾	4.47
理論解（下界値） ²⁰⁾	3.77
通常の三角形要素	4.95
辺ベース要素	4.38
節点ベース要素	4.03
Krabbenhoft ら ²¹⁾	4.16
Lyamin ら ²⁾	4.08

ひずみ速度の大きさの分布を図-20，図-21 に，崩壊メカニズムを図-22，図-23 に示す．辺ベース要素を用いた場合，滑り線は理論解と同じ形状になるが，節点ベース要素では押し込まれている領域の境界付近で変位速度が大きく出ており，適切な結果が得られていない．

図-20 ひずみ速度の大きさの分布（辺ベース要素）

図-21 ひずみ速度の大きさの分布（節点ベース要素）

図-22 崩壊メカニズム（辺ベース要素）

図-23 崩壊メカニズム（節点ベース要素）

5. 結言

本論文では，混合型剛塑性有限要素法に辺ベース要素の適用を行った．通常の三角形要素および節点ベース要素と解析結果の比較を行うことにより得られた知見は以下の通りである．

- いずれの数値計算例においても，崩壊荷重は大きい方から通常の三角形要素，辺ベース要素，節点ベース要素の順となった．これは弾性解析における剛性と同じ傾向である．
- 辺ベース要素については，平面ひずみ問題でも崩

壊荷重，崩壊メカニズムを正しく計算出来るが，押し出し問題のように変位速度の拘束が強い場合にはロッキングが生じ，崩壊荷重を大きく見積もることが分かった．

- 節点ベース要素を用いた場合，平面ひずみ状態でもロッキングが生じることはない．ただ，支持力解析や氷床貫入問題で示したように，崩壊メカニズムが正しく得られないこともある．実際の設計においては，節点ベース要素を用いた解析だけでなく，辺ベース要素を用いた解析を併用して崩壊メカニズムを比較し，妥当性の確認をする必要がある．

今後の課題としては以下の点が挙げられる．

- 本研究では，節点ベース要素を用いたときに，崩壊メカニズムが正しく得られないことがある理由を明らかにしていない．この結果に対する理論的考察が必要である．
- 節点ベース要素，辺ベース要素ともに，剛塑性解析においては，不完全である．そのため，他の要素を用いた新しい手法の確立が望まれる．例えば，弾性解析においては，剛性マトリクスのせん断変形に関する部分については辺ベース要素を，体積変化に関する部分については節点ベース要素を用いて解く手法⁵⁾が提案されている．剛塑性解析においては，せん断変形に関する部分と体積変化に関する部分とに分けることができないため，この手法はそのまま使えないが，複数の要素を組み合わせるなどの工夫が必要である．

参考文献

- 1) Zouain, N., Herskovits, J., Borges, L. A., and Feijóo, R. A.: An iterative algorithm for limit analysis with nonlinear yield functions, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.30, No.10, pp.1397–1417, 1993.
- 2) Lyamin, A. V. and Sloan, S.: Lower bound limit analysis using non-linear programming, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.55, No.5, pp.573–611, 2002.
- 3) 西藤潤, ガンバットエンクタイファン, and 小林俊一: 節点ベース均一ひずみ要素を用いた剛塑性有限要素法の開発, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.69, No.2, pp.I.247–I.253, 2013.
- 4) Dohrmann, C., Heinstein, M., Jung, J., Key, S., and Witkowski, W.: Node-based uniform strain elements for three-node triangular and four-node tetrahedral meshes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.47, No.9, pp.1549–1568, 2000.
- 5) Liu, G., Nguyen-Thoi, T., and Lam, K.: An edge-based smoothed finite element method (es-fem) for static, free and forced vibration analyses of solids, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.320, No.4, pp.1100–1130, 2009.
- 6) Nguyen-Xuan, H., Rabczuk, T., Nguyen-Thoi, T., Tran, T., and Nguyen-Thanh, N.: Computation of limit and shake-down loads using a node-based smoothed finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.90, No.3, pp.287–310, 2012.
- 7) Hoang, T. V., Nguyen, H. C., Ong, G. H., and Pham, T. T.: Evaluation of bearing capacity of footing strip based on node-based smoothed finite element method and conic programming, *Proceedings of the IETEC'13 Conference*, Ho Chi Minh City, Vietnam, 2013.
- 8) Le, C. V., Nguyen-Xuan, H., Askes, H., Rabczuk, T., and Nguyen-Thoi, T.: Computation of limit load using edge-based smoothed finite element method and second-order cone programming, *International Journal of Computational Methods*, Vol.10, No.01, 2013.
- 9) Nagtegaal, J. C., Parks, D. M., and Rice, J.: On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol.4, No.2, pp.153–177, 1974.
- 10) Schenk, O. and Gärtner, K.: Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with pardiso, *Future Generation Computer Systems*, Vol.20, No.3, pp.475–487, 2004.
- 11) Mosek, A.: The mosek optimization software, *Online at <http://www.mosek.com>*, Vol.54, 2010.
- 12) Gaydon, F. and McCrum, A.: A theoretical investigation of the yield point loading of a square plate with a central circular hole, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.2, No.3, pp.156–169, 1954.
- 13) Vicente da Silva, M. and Antao, A.: A non-linear programming method approach for upper bound limit analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.72, No.10, pp.1192–1218, 2007.
- 14) Borges, L., Zouain, N., Costa, C., and Feijóo, R.: An adaptive approach to limit analysis, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.38, No.10, pp.1707–1720, 2001.
- 15) 春日井健太, 西藤潤, and 小林俊一: 節点ベース要素を用いた混合型剛塑性有限要素解析へのアダプティブ法の適用, 計算数理工学論文集, Vol.14, pp.61–66, 2014.
- 16) Lubliner, J.: *Plasticity theory*, Courier Corporation, 2008.
- 17) Abbo, A. and Sloan, S.: A smooth hyperbolic approximation to the mohr-coulomb yield criterion, *Computers & structures*, Vol.54, No.3, pp.427–441, 1995.
- 18) 西藤潤 and 小林俊一: 混合型剛塑性有限要素解析におけるアワグラス・ロッキング制御について, *Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. A2 (Applied Mechanics (AM))*, Vol.67, No.1, pp.1–12, 2011.
- 19) Prandtl, L.: Über die härte plastischer körper, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, Vol.1920, pp.74–85, 1920.
- 20) Chen, W. F. and Han, D.-J.: *Plasticity for structural engineers*, Springer Science & Business Media, 2012.
- 21) Krabbenhoft, K., Lyamin, A. V., Hjiaj, M., and Sloan, S. W.: A new discontinuous upper bound limit analysis formulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.63, No.7, pp.1069–1088, 2005.

(2015. 6. 23 受付)

Application of Edge-based element to Mixed Rigid Plastic FEM and Its Effectiveness

Jun SAITO, Kenta KASUGAI, Shun-ichi KOBAYASHI

In the rigid plastic finite element method (RPFEM) the locking phenomenon often arises when three node triangular (T3) elements are used. To avoid the problem, the node-based element can be applied, but the application of the node-based element does not always give a correct failure mechanism. Therefore, we apply the edge-based element to the mixed RPFEM and evaluate its validity. We solve four typical problems and compare the results of the T3 element, the edge-based element and the node-based element. It turns out that the mixed RPFEM with the edge-based element gives valid results except the problem under a strong restriction condition.