流れの水深積分モデルと非平衡流砂モデル による反砂堆不安定性

井上 卓也¹・岩崎 理樹²・音田 慎一郎³

¹正会員 博(工) 研究員 (国研) 土木研究所 寒地土木研究所 (〒062-8602 札幌市豊平区平岸1-3-1-34)
E-mail: inoue-t@ceri.go.jp

²正会員 博(工) 研究員 (国研) 土木研究所 寒地土木研究所 (〒062-8602 札幌市豊平区平岸1-3-1-34)
E-mail: iwasaki-t@ceri.go.jp

³正会員 博(工) 京都大学大学院助教 工学研究科都市社会工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)
E-mail: onda.shinichiro.2e@kyoto-u.ac.jp

流れの抵抗に影響を及ぼす小規模河床波の発生・発達、河川工学分野における重要テーマの一つである。本研究では、ブシネスク方程式と非平衡流砂モデルを組み合わせたモデルに対して線形安定解析を行った。また浅水流方程式や平衡流砂モデルを用いた場合の分析も行い、ブシネスク項や流砂の非平衡性が河床波の不安定性と波長へ与える影響を考察した。この結果、ブシネスク方程式のみ、もしくは非平衡流砂モデルのみでは、反砂堆の不安定性を表現できないが、2つを組み合わせることにより、既往の反砂堆実験結果と良好な整合性が得ることが確認された。

Key Words : antidunes, linear stability analysis, Boussinesq equation, non-equilibrium sediment transport

1. はじめに

急流河川では出水時に部分的に反砂堆が発生し、それにより水面が恐竜の背びれのように盛り上がる現象がしばしば観測される(写真-1)。この水面波は時に 2m~3m の巨大な波に発達するため、橋桁への衝突などが危惧されている。また、反砂堆や砂堆などの小規模河床波の発達・遷移は、流れの抵抗に影響を及ぼすことから、河川工学分野において重要なテーマである。

上述のような小規模河床波の発生機構を説明するために、これまでに数多くのモデルが提案されている。例えば、Kennedy¹⁾や Hayashi²⁾はポテンシャル流解析に局所流速と流砂量の位相差を加味することで砂堆・反砂堆の発生領域を分析している。また、Engelund³⁾によってレイノルズ平均した鉛直 2 次元 Navier-Stokes 方程式 (RANS) を用いた線形安定解析が提案されると、この理論は Fredsøe⁴⁾、Colombini⁵⁾や泉・Parker⁶⁾によって発展を遂げ、小規模河床波の発生機構やその遷移過程を物理的に説明するに至っている。

鉛直 2 次元 RANS を用いた線形安定解析^{3)~6)}では、河床せん断力と流砂移動の間に位相差の無い平衡流砂量モデルが採用されている。これらのモデルでは、小規模河床波の発生は、鉛直方向の流速を直接計算することで得

写真-1 実験で観測された反砂堆と水面波

られる、水深平均流速と河床せん断応力間の位相差により説明される。しかし、流砂の非平衡性(慣性)によって、河床せん断応力と流砂輸送の応答に位相差が生じ、これが小規模河床波の発生要因になりうる。中川・辻本⁸⁾は、流砂の非平衡性に加え、流速と河床せん断応力の位相差も考慮することにより、小規模河床波の不安定性を説明している。音田・細田⁹⁾は、ポテンシャル流解析を用いて行われた中川・辻本⁸⁾の研究を発展させ、鉛直加速度を考慮した水深積分モデル(原形ブシネスクモデル)と非平衡流砂量式を組み合わせることにより、砂堆・反砂堆の発生・発達過程を数値解析で再現することに成功している。このように小規模河床波の発生要因を合理的にモデルに組み込むことにより、鉛直方向の流れを直接計算せずとも河床波の表現が可能なモデルが提案されている^{10),11)}。

図-1 座標系の説明図

音田・細田の数値計算モデル⁹⁾は、計算負荷や複雑場への適用等の面から利点が大いだが、水深積分モデルを用いた場合は採用する流れ、流砂モデルの組み合わせが河床波不安定性を決定する。数値解析ではどちらのモデルが河床波不安定性にどのような影響を及ぼしているのかわかりにくい。そこで本研究では、音田・細田モデルに対して線形安定解析を行い、反砂堆に関する既往実験結果^{12),13),14)}と比較するとともに、ブシネスク項や流砂モデル（平衡・非平衡）が河床波不安定性や波長へ与える影響を明らかにする。

2. 基礎式の誘導過程

本研究では、主目的である(A)ブシネスク方程式×非平衡流砂量モデルの線形安定解析だけでなく、(B)浅水方程式×非平衡流砂量モデル、(C)ブシネスク方程式×平衡流砂量モデル、(D)浅水方程式×平衡流砂量モデルの線形安定解析も行う。4つのモデルの解析結果を比較することで、ブシネスク項や流砂モデル（平衡・非平衡）が及ぼす影響を分析する。

(1) ブシネスク方程式

ここでは、流体の鉛直加速度に起因する非静水圧分布を考慮した1次元流れの基礎式（ブシネスク方程式）^{9),15)}について説明する。まず、音田・細田⁹⁾による誘導過程を簡単に記載する。流下方向 x^* の流速成分 u^* の水深方向の一様性を仮定すると、次式となる。

$$u^*(x^*, z^*) = U^*(x^*) \quad (1)$$

ここで、 u^* は流速ベクトルの x^* 方向成分、 z^* は水深方向軸、 U^* は水深平均流速である。 $*$ は次元量を表す。式(1)を連続の式、

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (2)$$

に代入し、 z^* から自由水面まで積分すると次式を得る。

$$w^* = mA^* - B^* \quad (3)$$

$$A^* = U^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*}, \quad B^* = U^* \frac{\partial z_b^*}{\partial x^*}, \quad m = \frac{z_b^* + z^*}{h^*} \quad (4)$$

ここで、 w^* は流速ベクトルの z^* 方向成分、 h^* は水深、 z_b^* は下向きを正とした河床高の摂動（図-1）である。

式(1)、式(3)を水深方向の運動方程式

$$u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = -gh^* \cos \theta - \frac{1}{\rho^*} \left(\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) \quad (5)$$

に代入し、 z^* から自由水面まで積分すると以下の圧力分布式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{p^*}{\rho^*} = & g(h^* - z_b^* - z^*) \cos \theta - U^* A^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2}{2} \right) \\ & + U^* A^* \frac{\partial z_b^*}{\partial x^*} (1-m) + U^* h^* \frac{\partial A^*}{\partial x^*} \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2}{2} \right) \\ & - U^* h^* \frac{\partial B^*}{\partial x^*} (1-m) + A^{*2} \left(\frac{1}{2} - \frac{m^2}{2} \right) - A^* B^* (1-m) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 p^* は圧力、 ρ^* は水の密度、 θ は河床勾配である。また、式(5)を x^* 方向の運動方程式に代入し、河床から水面まで積分すると、次のような基礎式が得られる。ただし、式(6)は連続式である。

$$\frac{\partial (U^{*2} h^*)}{\partial x^*} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial (U^{*2} h^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial P^*}{\partial x^*} - \left(\frac{p^*}{\rho^*} \right)_b \frac{\partial z_b^*}{\partial x^*} = gh^* \sin \theta - \frac{\tau_{bx}^*}{\rho} \quad (8)$$

ここで、 τ_{bx}^* は河床せん断力、添え字の b は路床における値を表し、 P^* は水深積分された圧力である。

$$P^* = \int_{-z_b^*}^{h^*-z_b^*} \frac{p^*}{\rho^*} dz^* \quad (9)$$

音田・細田⁹⁾は、非回転条件を満足する流速分布形を求め、その河床近傍流速を用いて河床せん断応力を評価している。また、局所的な加速・減速効果を考慮して河床せん断応力を補正している。このため、河床波の不安定性が、河床せん断応力の補正によって生じているのか、それともブシネスク方程式と非平衡流砂量モデルの組み合わせによって生じているのかが不明確である。本研究では、この点を明らかにするために、河床せん断応力は水深平均流速 U^* と河床抵抗係数 C_f を用いて以下のように単純に評価する。

$$\frac{\tau_{bx}^*}{\rho^*} = C_f U^{*2} \quad (10)$$

ここでは基本変数に対して以下のような無次元化と線形化を行う。

$$\begin{aligned} x^* &= h_0^* x \\ U^* &= U_0^* U = U_0^* (1 + a U_1) \\ h^* &= h_0^* h = h_0^* (1 + a h_1) \\ z_b^* &= h_0^* z_b = a h_0^* z_{b1} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、添え字の0は等流状態の値を、添え字の1は摂動を表している。 a は摂動の振幅であり、線形安定解析では無限小であると仮定する。式(11)を式(7)、式(8)に代入し、 $\alpha(a)$ について整理すると次式が得られる。

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

$$Fr^2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + 2Fr^2 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{1}{3} Fr^2 \frac{\partial^3 h_1}{\partial x^3} - \frac{1}{2} Fr^2 \frac{\partial^3 z_{b1}}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial z_{b1}}{\partial x} \right) = h_1 \tan \theta - Fr^2 2C_f U_1 \quad (13)$$

Fr はフルード数 ($Fr^2 = U_0^2 / g h_0 \cos \theta$) である。

摂動は次のように表されるとする。

$$(U_1, h_1, z_{b1}) = e^{\Omega t} e^{i(\lambda x - \omega t)} (U_1, h_1, z_{b1}) \quad (14)$$

ここで、 Ω は増幅率、 ω は角周波数、 λ は擾乱の無次元波数である。式(12)と式(13)に式(14)を代入すると次式が得られる。

$$i\lambda h_1 + i\lambda U_1 = 0 \quad (15)$$

$$\left(Fr^2 i\lambda - \frac{1}{3} Fr^2 i\lambda^3 + i\lambda - \tan \theta \right) h_1 + \left(2Fr^2 i\lambda + 2Fr^2 C_f \right) U_1 + \left(\frac{1}{2} Fr^2 i\lambda^3 - i\lambda \right) z_{b1} = 0 \quad (16)$$

(2) 浅水流方程式

静水圧を仮定した場合の1次元流れの基礎式（浅水流方程式）を以下に記述する。なお、連続式は式(6)と同じため省略する。

$$\frac{\partial(U^{*2} h^*)}{\partial x^*} + g h^* \cos \theta \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*} - \frac{\partial z_b^*}{\partial x^*} \right) = g h^* \sin \theta - \frac{\tau_{bx}^*}{\rho} \quad (17)$$

これに、式(11)の無次元化と線形化を導入し、 $\alpha(a)$ について整理すると次式が得られる。

$$Fr^2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + 2Fr^2 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial z_{b1}}{\partial x} \right) = h_1 \tan \theta - Fr^2 2C_f U_1 \quad (18)$$

式(13)と式(18)を比較すると、非静水圧分布を考慮した影響により、式(13)に水深と河床高の3階微分項が追加されていることが分かる。

上述の線形化方程式に式(14)の摂動を与えると、以下の式が得られる。

$$\left(Fr^2 i\lambda + i\lambda - \tan \theta \right) h_1 + \left(2Fr^2 i\lambda + 2Fr^2 C_f \right) U_1 + (-i\lambda) z_{b1} = 0 \quad (19)$$

(3) 非平衡流砂モデル

河床堆積土砂の質量保存則をpick-up rate (= entrainment rate) E^* とdeposition rate D^* を用いて表すと以下となる⁸⁾。

$$\frac{\partial z_b^*}{\partial t^*} = \frac{1}{1 - \lambda_p} (E^* - D^*) \quad (20)$$

ここで、 t^* は時間、 λ_p は空隙率である。中川・辻本⁸⁾によると、平衡状態において流砂量を平均step length L_s^* で除すとentrainment rateになる。

$$E^* = q_b^* / L_b^* \quad (21)$$

q_b^* は平衡流砂量式を使って求める。Deposition rateについては、以下のように求める。

$$D^* = \int_0^\infty E^*(x^* - s^*) f_p(s^*) ds^* \quad (22)$$

s^* は主流方向軸 (x^* とはゼロ点が異なり、pick-upされた地点がゼロ)、 f_p はstep length 確率密度関数であり、以下のように指数分布とする。

$$f_p(s^*) = \frac{1}{L_s^*} \exp\left(-\frac{s^*}{L_s^*}\right) \quad (23)$$

上述の基礎式に以下の無次元化を導入する。

$$t^* = T_0^* t, \quad d^* = h_0^* d, \quad s^* = d^* s, \quad L_s^* = d^* L_s, \quad T_0^* = (1 - \lambda_p) h_0^{*2} / q_{b0}^*, \quad E^* = \frac{q_{b0}^*}{h_0^*} E, \quad q_b^* = q_{b0}^* q_b \quad (24)$$

$$q_{b0}^* = 8(\tau_0 - \tau_c)^{3/2} \sqrt{\Delta g d^{*3}}, \quad \tau_0 = \frac{C_f U_0^{*2}}{\Delta g d^*}$$

ここで、 d は粒径、 τ はShields数、 τ_c は限界Shields数、 Δ は土粒子の水中比重である。無次元化された流砂連続式を以下に示す。

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = E - D \quad (25)$$

$$E = \frac{1}{d L_s} \left(\frac{\tau - \tau_c}{\tau_0 - \tau_c} \right)^{3/2} \quad (26)$$

$$D = \int_0^\infty E(x - ds) f_p(s) ds \quad (27)$$

ここで、

$$f_p(s) = \frac{1}{L_s} \exp\left(-\frac{s}{L_s}\right) \quad (28)$$

次に、Shields数 τ を式(11)に従い線形化する。

$$\tau = \frac{C_f U^{*2}}{\Delta g d^*} = \frac{C_f U_0^{*2}}{\Delta g d^*} \left(1 + 2a U_1^* + a^2 U_1^{*2} \right) \quad (29)$$

摂動の2乗の項は微少と考え無視すると、

$$\tau = \tau_0 (1 + 2aU_1^*) \quad (30)$$

$$\frac{\tau - \tau_c}{\tau_0 - \tau_c} = \frac{\tau_0 - \tau_c}{\tau_0 - \tau_c} + \frac{2\tau_0 U_1}{\tau_0 - \tau_c} = 1 + 2a\Theta U_1 \quad (31)$$

$$\Theta_0 = \frac{\tau_0}{\tau_0 - \tau_c} \quad (32)$$

式(31)を式(26)に代入し、テイラー展開を用いると以下の式となる、

$$E = \frac{1}{dL_s} (1 + 2a\Theta U_1)^{3/2} \approx \frac{1}{dL_s} (1 + 3a\Theta U_1) \quad (32)$$

式(27)に式(32)を代入すると、

$$D = \frac{1}{dL_s} \int_0^\infty \left[(1 + 3a\Theta U_1|_{x=x-d_g s}) f_p(s) \right] ds = \frac{1}{dL_s} \int_0^\infty [f_p(s)] ds + \frac{1}{dL_s} \int_0^\infty [3a\Theta U_1|_{x=x-d_g s} f_p(s)] ds \quad (33)$$

ここで、 $f_p(s)$ は0から無限大まで積分すると、確率密度関数の定義から1となる。従って、

$$D = \frac{1}{dL_s} + \frac{1}{dL_s} \int_0^\infty [3a\Theta U_1|_{x=x-d_g s} f_p(s)] ds \quad (34)$$

式(32)、式(34)を式(25)に代入すると、以下の線形化方程式が得られる。

$$\frac{\partial z_{b1}}{\partial t} = 3\Theta U_1 - \frac{3\Theta}{dL_s} \int_0^\infty [U_1|_{x=x-d_g s} f_p(s)] ds \quad (35)$$

上述の線形化方程式に式(14)の擾乱を与える。なお式(35)の右辺第2項の積分にあたっては、 x と t が s の関数ではないことに注意して以下の関係を利用する。

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty U_1|_{x=x-ds} f_p(s) ds \\ &= \frac{e^{\Omega t}}{L_s} U_1 \int_0^\infty e^{i(\lambda x - \omega t) - i\lambda ds} \exp\left(-\frac{s}{L_s}\right) ds \\ &= \frac{e^{\Omega t} e^{i(\lambda x - \omega t)}}{L_s} U_1 \int_0^\infty \exp(-i\lambda ds) \exp\left(-\frac{s}{L_s}\right) ds \end{aligned} \quad (36)$$

最終的に式(35)は以下の式で表される。

$$(\Omega - i\omega)z_{b1} - 3\Theta \left(\frac{\lambda}{1 + (d\lambda L_s)^2} (i + d\lambda L_s) \right) U_1 = 0 \quad (37)$$

(4) 平衡流砂モデル

河床堆積土砂の質量保存則を単位幅流砂量 q_b^* を用いて表すと以下となる。なお、単位幅流砂量は式(24)に示すMeyer-Peter and Müllerの式から求める。

$$\frac{\partial z_b^*}{\partial t^*} = \frac{1}{1 - \lambda_p} \frac{\partial q_b^*}{\partial x^*} \quad (38)$$

次に式(24)の無次元化を導入する。

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = \frac{\partial q_b}{\partial x} \quad (39)$$

上述の基礎式に式(11)の摂動を与え、 $\mathcal{O}(a)$ について整理すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial z_{b1}}{\partial t} = 3\Theta \frac{\partial U_1}{\partial x} \quad (40)$$

ここで式(14)の擾乱を与えると次式が得られる。

$$(\Omega - i\omega)z_{b1} - 3\Theta i\lambda U = 0 \quad (41)$$

(5) 線形安定解析

線形化された連続式、運動方程式、流砂連続式を行列式で表す。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ h_1 \\ z_{b1} \end{pmatrix} = 0 \quad (42)$$

式(42)の可解条件は、左辺の係数行列の絶対値が0となることである。線形安定解析では増幅率の正負を調べるために、この条件から増幅率の方程式を求め、増幅率が正であれば、与えた擾乱は成長する（河床波発生）。また、有限の正の増幅率ピークを持てば、そのときの波数が卓越波数になる。

$a_{11} \sim a_{33}$ は採用するモデルの組み合わせによって異なる。例えば、(A)ブシネスク方程式×非平衡流砂量モデルの場合、式(15)、式(16)、式(37)の組み合わせとなり、(B)浅水流方程式×非平衡流砂量モデルの場合は式(15)、式(19)、式(37)の組み合わせ、(C)ブシネスク方程式×平衡流砂量モデルの場合は式(15)、式(16)、式(41)の組み合わせ、(D)浅水流方程式×平衡流砂量モデルの場合は式(15)、式(19)、式(41)の組み合わせになる。

例として、(A)ブシネスク方程式×非平衡流砂量モデルの $a_{11} \sim a_{33}$ を以下に示す。

$$\begin{aligned} a_{11} &= i\lambda \\ a_{12} &= i\lambda \\ a_{13} &= 0 \\ a_{21} &= 2Fr^2 i\lambda + 2Fr^2 C_f \\ a_{22} &= Fr^2 i\lambda - \frac{1}{3} Fr^2 i\lambda^3 + i\lambda - \tan \theta \\ a_{23} &= \frac{1}{2} Fr^2 i\lambda^3 - i\lambda \\ a_{31} &= -3\Theta \frac{\lambda(\lambda dL_s + i)}{1 + (\lambda dL_s)^2} \\ a_{32} &= 0 \\ a_{33} &= \Omega - i\omega \end{aligned} \quad (43)$$

図-2 成長率のコンター図と既往実験結果

※コンター図は原形ブシネスク方程式と非平衡流砂量式の組合わせによる線形安定解析結果

表-1 井上らの実験条件¹²⁾

	水路幅 (m)	粒径 (mm)	勾配	流量 (l/s)	平均水深 (m)	フルード数	無次元 掃流力	反砂堆 発生有無
Run 1	0.5	1.42	0.0080	15.2	0.045	1.02	0.154	発生
Run 9	0.5	5.00	0.0320	21.7	0.040	1.73	0.155	非発生

3. 結果と考察

(1) 既往研究との比較

(A)ブシネスク方程式×非平衡流砂量モデルによる線形安定解析結果と田中¹²⁾，福岡ら¹³⁾，井上ら¹⁴⁾が行った反砂堆の実験結果との比較を図-2に示す。増幅率 $\Omega > 0$ の領域が不安定領域であり，擾乱が発達する領域である。擾乱が発達しない増幅率 $\Omega < 0$ の領域は図が見づらくなるため描画していない。なお平均step length L_s は一般的によく用いられる粒径の100倍とし，河床抵抗係数は対象とした実験から逆算した C_f の中間値とした（今回用いた実験において C_f は $10^{-2} \sim 20^{-2}$ の範囲にあった）。

図-2によると，本解析結果は概ね既往実験で流下反砂堆（青シンボル），遡上反砂堆（赤シンボル）が発生した領域と一致している。不安定領域から外れている緑の菱形群は，反砂堆ではなくChutes & Poolsである。このことから，本解析モデルの適用範囲は反砂堆に留まる。

泉・Parker⁹⁾のRANSを用いた線形安定解析結果をみると，フルード数が0.8以下で波数0.3付近に砂堆に相当する不安定性が存在しているが，本研究の線形安定解析で

はこれが存在しない。ブシネスク方程式と非平衡流砂量モデルの組合わせは，反砂堆を発生させる位相差を表せるが，砂堆を発生させるのに必要な位相差は表せないと考えられる。砂堆の位相差を評価するためには，中川・辻本⁸⁾，音田・細田⁹⁾，Luchini and Charu¹⁶⁾が指摘しているように，局所的な加速・減速効果を考慮した底面せん断応力評価式を用いる必要がある。底面せん断応力評価式を用いた場合の線形安定解析については後述する。

井上らの実験¹²⁾において，反砂堆はShields数が約0.15以上の領域で発生しやすいが，フルード数が高くなると発生しにくいことが報告されている。そこで，ほぼ同じShields数でフルード数の異なるRun 1とRun 9（表-1）を用いて線形安定解析を行った。図-3に増幅率と波数の解析結果を示す。これによると，フルード数が小さいRun 1では正の増幅率の値が大きい領域が波数0.4付近にある。一方，フルード数が大きいRun 9では，増幅率が正の領域があるものの，その値はRun 1に比べ非常に小さい。このことは，高フルード数時に反砂堆が発生しにくくなった既往実験結果と同じ傾向を示しており，モデルの妥当性がうかがえる。

図-3 増幅率と波数の関係

※原形ブシネスク方程式×非平衡流砂量式の組合せ

2) パラメータの違いによる不安定性

河床抵抗係数 C_f と平均 Step length L_s が河床波の不安定性に及ぼす影響を分析した。図-4をみると、河床抵抗係数が大きくなると、波数が小さい領域の増幅率が正になり、不安定領域が増加する。また、図-5をみると、平均 Step length が小さくなると、波数が小さい領域の増幅率が正になり、不安定領域が増加する。このことから、抵抗係数や平均 step length が大きいほど（小さいほど）、波数が小さい領域で反砂堆不安定領域が大きくなる（小さくなる）傾向がうかがえる。

上述の傾向は、鉛直二次元RANSモデルを用いた泉・佐藤¹⁷⁾、泉・Parker⁹⁾の解析結果と同じである。一方、ブシネスク方程式と非平衡流砂量モデルの組合わせたモデルにおいて、これらのパラメータは波数が大きい領域における不安定領域にそれほど影響を与えておらず、不安定領域全体が小さくなる泉・佐藤¹⁷⁾、泉・Parker⁹⁾の結果とは若干傾向が異なっている。この違いについては、実験結果なども踏まえて、さらなる分析が必要である。

図-4 河床抵抗係数が不安定性に及ぼす影響

図-5 平均 Step length が不安定性に及ぼす影響

a) 原形ブシネスク方程式+非平衡流砂モデル

c) 原形ブシネスク方程式+平衡流砂モデル

b) 浅水流方程式+非平衡流砂モデル

d) 浅水流方程式+平衡流砂モデル

図-6 モデルの違いによる不安定領域の違い

(3) モデルの組合わせの違いによる不安定性

図-6は、a) 原形ブシネスク式+非平衡流砂モデル（図-2と同様）、b) 浅水流方程式+非平衡流砂モデル、c) 原形ブシネスク式+平衡流砂モデル、d) 浅水流方程式+平衡流砂モデルの4つのモデルを用いて線形安定解析を行った結果である。これによると、a)のモデルはピークを持った不安定性があり、有限波長を持った波が発達する可能性がある。b)のモデルは、不安定性はあるが波数のピークが無く、波数が大きいほど増幅率が大きいため、波長が決定されない。数値計算に適用した場合、初期に発達する波は、採用した格子サイズで解像可能な最も波長の小さい波となる可能性が高い。c)のモデルは、図からは分かりにくい、非常に緩やかなピークを持っている。ただし、その波数は図-2に示した反砂堆の実験結

果と比較して大きすぎる。d)のモデルは一次元河床変動計算でよく使われる組み合わせであるが不安定領域が現れず、反砂堆は発生しない。

c)のモデルにピークがあることから、ブシネスク項は有限波長の河床波を誘起する効果を持っている。ただし、その波数は反砂堆としては大きく増幅率も弱い。これに、小さい波数に対しての不安定性を有するb)の流砂非平衡性が合わさることにより、ブシネスク項の持つ不安定領域が小さい波数の領域にシフトするとともに、増幅率が強化されたと解釈できる。これは、流砂の非平衡性、ブシネスクモデルの効果はそれぞれ単独では反砂堆の発生を説明するには不十分であるが、組み合わせることにより反砂堆の発生を説明しうることを示唆している。

a) $\Gamma=0, \Delta=0$ の場合 b) $\Gamma=2, \Delta=1$ の場合 c) $\Gamma=1, \Delta=2$ の場合 d) $\Gamma=3, \Delta=0$ の場合 図-7 原形ブシネスク方程式+非平衡流砂モデル+底面せん断応力評価式¹⁸⁾の不安定領域

(4) 底面せん断応力の評価

音田・細田の数値計算モデル⁹⁾において、底面せん断応力は細田¹⁸⁾によって提案された評価式によって計算される。細田らは、まず路床からある程度離れた領域の流速分布形の変化を、流れの非回転条件を用いて以下のように求め¹⁸⁾、

$$u_b^* = U^* + \frac{U^*}{3} \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right)^2 - U^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \frac{\partial z_b^0}{\partial x^*} - \frac{U^* h^*}{6} \frac{\partial^2 h^*}{\partial x^{*2}} + \frac{U^* h^*}{2} \frac{\partial^2 z_b^*}{\partial x^{*2}} \quad (44)$$

さらに、Nakagawa & Tsujimoto¹⁹⁾が提案した底面せん断応力の評価式に、路床変動の空間微分を追加した以下の式を提案している¹⁸⁾。

$$\frac{\tau_{bx}^*}{\rho} = C_f u_b^{*2} \left(1 - \Gamma \frac{\partial h^*}{\partial x^*} - \Delta \frac{\partial z_b^*}{\partial x^*} \right) \quad (45)$$

Γ, Δ は定数であり、細田らは実験を通じた経験的な値として $\Gamma=2, \Delta=1$ を提案している。式(44)はブシネスク方程式の考えの範疇にあり、ブシネスク方程式を用いる場合はセットで用いるのが理に適っている。一方、式(45)の括弧内は流れの水深積分モデルで表しきれない境界層の発達に起因する位相差を加味するための付加項である。

図-7 は式(44)、式(45)を線形化し、ブシネスク方程式×非平衡流砂量モデルの組み合わせに導入した場合の線形な安定解析結果を示している。(a)は $\Gamma=0, \Delta=0$ とし付加項を考慮していない場合であり、非回転条件から求めた

路床近傍の流速とそれに応じた底面せん断応力が考慮されている。これとシンプルな式(9)を用いた図-6(a)とを比較すると、不安定領域が若干小さくなるものの傾向は変わらない(砂堆の不安定性が生じていない)ことが分かる。既往研究により、非平衡流砂量式は反砂堆を発生される位相差を表現できるが、砂堆を発生させる位相差を表せないことが確認されている⁷⁾。今回、ブシネスク方程式およびブシネスク方程式から派生する路床近傍の流速分布式も反砂堆を発生される位相差は表せるが砂堆を発生させる位相差を表せないことが確認できた。

次に(b)の $\Gamma=2$, $\Delta=1$ とし付加項を考慮した場合をみると、フルード数1以下の領域に砂堆の不安定性が現れる結果となっており、砂堆と反砂堆の両方を表すためには、式(45)で表される付加項が必要と言える。ただし、 Γ , Δ を加えると反砂堆領域(特に、波数が1以上に多く分布する流下反砂堆)の再現性が低下する(図-2参照)。また、図-7に示したように、 Γ , Δ の組合せによって不安定領域が大きく変化するため、例えば、流下反砂堆である三角波を表現したい場合 $\Gamma=0$, $\Delta=0$ とするなど、対象とする現象に応じて適切な値を採用する必要がある。

4. まとめ

音田・細田⁹⁾が提案する原形ブシネスクモデルと非平衡流砂量式の組み合わせで線形安定解析を行い、既往の反砂堆実験結果と良好な整合性を得た。これは、音田・細田⁹⁾が示した水深積分モデルを用いた反砂堆の数値計算の妥当性に対して理論的な側面から説明を与えたものといえる。

(A)ブシネスク方程式×非平衡流砂量モデルの線形安定解析、(B)浅水流方程式×非平衡流砂量モデル、(C)ブシネスク方程式×平衡流砂量モデル、(D)浅水流方程式×平衡流砂量モデルの4つの組み合わせに対し線形安定解析を行った結果、ブシネスク項や流砂の非平衡性は、それぞれ単独では反砂堆の波長を説明するには不十分であるが、2つの組み合わせにより波長が決定されることが確認された。

(A)ブシネスク方程式×非平衡流砂量モデルに、細田らが提案する底面せん断応力の評価式を加え線形安定解析を行った。まず、細田らの評価式の前半部分、路床近傍流速分布だけを考慮して解析したが、砂堆不安定性は再現できなかった。砂堆の不安定性を評価するためには、境界層の発達に起因する位相差を表す付加項を考慮する必要がある。

今後は、ブシネスク方程式と非平衡流砂量モデルの組合せを平面2次元へ拡張し、急流河川で発生する3次元的反砂堆と水面波を再現しうるかを検討するとともに、数値計算を行うことで非線形領域におけるモデルの挙動

を明らかにする予定である。

謝辞：本研究にあたっては、北開水工コンサルタントの長谷川和義先生、River Linkの旭一岳博士、寒地土木研究所の川村里実研究員にご助言を頂きました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Kennedy, J. F. : The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels, J. Fluid Mech., Vol. 16, pp.521-544, 1963.
- 2) Hayashi, T. : Formation of dunes and antidunes in open channels, Journal of Hydraulic Division, Proc. of ASCE, Vol. 96, No.HY2, pp. 357-366, 1970.
- 3) Engelund, F.: Instability of erodible beds, J. Fluid Mech., Vol. 42, pp. 225-244, 1970.
- 4) Fredsøe, J.: On the development of dunes in erodible channel, J. Fluid Mech., Vol. 64, pp.1-16, 1974.
- 5) Colombini, M.: Revisiting the linear theory of sand dune formation, J. Fluid Mech., Vol. 502, pp.1-16, 2004.
- 6) 泉典洋, Gary Parker : 平坦床-反砂堆遷移過程の分岐特性, 水工学論文集, Vol. 53, pp.733-738, 2009.
- 7) Parker, G. ; Sediment inertia as cause of river antidunes, J. Hydraul. Div. ASCE 101, 211-221, 1975.
- 8) 中川博次, 辻本哲郎: 砂礫の運動に伴う移動床砂面の擾乱発生過程, 土木学会論文報告集, No.291, pp.53-62, 1979.
- 9) 音田慎一郎, 細田 尚: 水深積分モデルによる小規模河床波の発生・発達過程と流れの抵抗則の数値解析, 水工学論文集, Vol. 48, pp.973-978, 2004.
- 10) Vesipa, R., Camporeale, C. and Ridolfi, L. : A shallow-water theory of river bedforms in supercritical conditions, Physics of Fluids, Vol.24, 094104, 2012.
- 11) 内田龍彦・福岡捷二: 浅水流の仮定を用いない水深積分モデルによる種々な小規模河床形態の統一解析法の構築, 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol. 69, No. 4, pp.I_1135-I_1140, 2013.
- 12) 田中祐一郎: Antidune に関する実験的研究, 京大防災研年報第13号 B, pp.271-284, 1970..
- 13) 福岡捷二, 奥津一夫, 山坂昌成: 急勾配移動床流れにおける河床波の形状, 伝播特性, 土木学会論文集, Vol.323, pp.77-89, 1982.
- 14) 井上卓也, 長谷川和義, 渡部靖憲, 船木淳悟: 三次元的な反砂堆上の水面波に関する実験的研究, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 71, No. 2, I_739-I_746, 2015.
- 15) 細田尚, 余越正一郎: 三次元波状路床上の流れに関する解析, 広島大学工学部研究報告, Vol. 32, No. 1, pp.47-51, 1983.
- 16) Luchini, P and F. Charru : The phase lead of shear stress in shallow-water flow over a perturbed bottom, J. Fluid Mech., Vol. 665, pp. 516-539, 2010.
- 17) 泉 典洋・佐藤博重: 掃流砂の非平衡性を考慮した河床デューンの線形安定解析, 北海道河川財団 研究所紀要(XVIII), 2007.

18) 細田 尚, 村本嘉雄, 宮本雅章 : 水深積分モデルによる波状
路床上の流れの底面せん断応力解析, 土木学会論文集,
No.558/II-38, pp.81-89, 1997.

19) Nakagawa, H. and Tsujimoto, T. : Sand bed instability due to bed load
motion, Proc. ASCE, Vol.106, HY 12, pp.2029-2051, 1980.

(2016. 6. 24 受付)

ANTIDUNE INSTABILITY ASSOCIATED WITH A DEPTH-AVERAGED MODEL WITH AN ENTRAINMENT-BASED MODEL

Takuya INOUE, Toshiki IWASAKI and Shinichiro ONDA

Dynamics of river bedforms which is an interfacial instability phenomenon between turbulent open channel flow and movable bed significantly affect the flow structures and sediment transport dynamics in rivers, so that this have been an classical and important research topic in the field of river engineering. Here, we perform a linear stability analysis for several combinations of flow and sediment transport submodels, specifically, a shallow flow model and a Boussinesq type depth-integrate model for hydrodynamic model, and an equilibrium and a non-equilibrium bedload transport model for sediment mass conservation model. We then investigate how the submodels adopted determine the linear stability and the wavelength of river bedforms. The results show that the combination of the Boussinesq model and the non-equilibrium bedload transport model can explain the antidune instability and its finite wavelength observed in several published experiments, whereas, use of each submodel alone is insufficient to explain the finite wavelength of antidunes.