等間隔に欠陥が存在する周期場を対象とした 効率的分散解析手法

阿部 和久¹・笥 拓哉²・紅露 一寛³

¹正会員 工博 新潟大学教授 工学部社会基盤工学プログラム (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp

²学生会員 新潟大学大学院生 自然科学研究科 (研究当時) (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

³正会員 博 (工) 新潟大学教授 工学部社会基盤工学プログラム (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

周期複合材の一部に等間隔に欠陥を配置した周期弾性波動場を対象に、効率的分散解析法を構成した。具体的には、欠陥部からの波動散乱と等価な外力を設定することにより、欠陥の無い周期構造 1 ユニットの問題に帰着して解く方法を採用した。さらに Floquet 変換を適用することで、欠陥を持たない周期場の小さなユニットセルでの加振問題により表現することで効率化を図った。本手法では、分散曲線が非線形固有値問題より求められるため、その解法として Block SS 法を採用した。この場合、計算過程が容易に並列化可能なため、並列計算適用によるさらなる効率化についても検討した。

Key Words: elastic wave, Floquet transform, block SS method, FEM

1. はじめに

周期構造の波動問題では、如何なる波動モードも伝播し得ない周波数帯の存在が知られており、これをストップバンドと呼ぶ。この特性を活かすことで、特定の周波数帯における波動を遮蔽するなど、波動の透過特性を制御することが可能となる。

波動透過が抑制される周波数域を拡張することは、振動や騒音などの遮蔽性向上につながるため、工学的に重要である。そのため、遮蔽性能の観点から、これまでに様々な試みがなされてきた。例えば、著者らのグループ¹⁾では、弾性波動場を対象に、上下の周期複合材の間にそれと異なる周期層を挿入した場合の波動透過特性について検討した。その結果、両者の周期場が持つストップバンドの重ね合わせにより、波動透過が遮蔽される周波数域を拡張し得ることを確認した。

なお、当該論文では、中間層の長手方向周期長と、上下周期場のそれとが一致している場合を対象に、両者における材料や介在物形状などを違わせることで互いに異なるバンド構造を実現している。一方、同一材料を用いても、周期構造を変えることでストップバンド域を調整することができる。文献 2) では、周期長が互いに異なる層を重合することによる透過特性の改善を試みている。

また、Nakashima ら³⁾は、同一の周期介在物の下、各周期列の長手方向相対位置にランダムなずれを導入する方法について検討し、それによる遮蔽性の向上を確

認している。文献 3) では周期列毎の相対位置にのみバラツキを与えているため、長手方向の周期長自体は不変なままとなっている。これに対して、基本となる周期構造に所定の範囲内でランダムな変動を加えることで、周期性を完全に喪失させる試みもなされている。この場合、波動エネルギーの局在による増幅域が発生し得る⁴⁾ものの、透過する波動エネルギー総量の低減が期待できる⁵⁾。

上述の論文より、周期場に対して何らかの乱れを加えることが遮蔽性能の向上に対して有効であることが分かる。このような観点から、周期配置に欠陥を導入する手法も検討されている。Herrero ら⁶⁾は、音響場を対象に、周期的に配置された円筒散乱体の一部を間引くことで波動透過特性の制御を試みている。

また、Suzuki⁷⁾は、イオン格子に格子定数の 2 倍の間隔で空孔を導入することにより、元の周期特性に空孔が持つ周期性を付加し得ることを報告している。Caballero ら⁸⁾は、この成果に基づき、円筒散乱体の配置に周期的に欠陥を導入した遮音壁について実験と解析を通して検討し、基本周期構造と欠陥による周期性の各々に起因するストップバンドが得られ、遮蔽性能が向上することを見出している。

さらに著者ら⁹⁾は、文献 8) の結果を参考に、弾性波動場を対象として介在物の周期層内に等間隔に欠陥を設けた場合について検討した。その結果、波動透過率が抑制される周波数域が拡張され得ることを確認した。

なお、周期層の波動透過は、層の長手方向 1 周期の

領域における波動問題として解くことができる¹⁾。しかし、文献9)の問題設定のように、欠陥を数周期おきに等間隔に導入する場合、遮蔽層の周期長は欠陥間隔で与えられることとなり、そのサイズが大きくなる。そのため解析領域が大きくなり、従来法では計算負荷が増大する。そこで当該論文では、欠陥による波動場の乱れをそれと等価な加振力に置換し、Floquet 変換^{10),11),12)}援用の下、欠陥の無い周期場 1 ユニットの問題に帰着して解く方法を構築した。

文献9)では、有限な厚さの周期層における波動透過率を議論した。しかし、その基本特性の理解には、当該周期層を厚さ方向に積層して得られる無限周期場における分散曲線の把握が有用となる。通常、分散解析は、周期場を構成する最小単位である 1 ユニットセルに関する固有値問題を解くことでなされる。当該問題に有限要素法を適用する場合、最終的に周波数に関して線形な一般化固有値問題が得られることとなり、通常その解析は容易なものとなる。ただし、欠陥が周期的に配置されている場合、分散解析の際に離散化すべき領域サイズは欠陥の無い周期場のユニットセルに比べ大きくなる。そのため、解くべき固有値問題の規模も大きくなり、計算負荷が大幅に増大する。

そこで本論文では、欠陥が等間隔に配置された無限周期場を対象に、効率的分散解析手法の構築を試みる。具体的には、文献9,10)と同様に、欠陥による波動の乱れをそれと等価な加振力に置き換える。さらに、上述の加振問題に二次元 Floquet 変換を適用することで、欠陥の無い周期場における 1 ユニットセルの動的解析に帰着して解く。最終的に分散解析は、当該加振力を固有ベクトルとした固有値問題で与えられることとなる。なお、その際の行列成分は振動数を陰的に含む関数となるため、非線形固有値問題となる。この求解に非線形固有値問題の数値解法である Block SS 法^{13),14)}を適用する。

本論文の最後では、解析例を通して提案手法の妥当性や計算効率について検証する。また、Block SS 法は固有値が定義された複素平面における周回積分に帰着するため、これに数値積分を適用すると、本問題は各積分点を複素加振振動数とした動的問題で構成されることとなる。そのため、積分点毎に容易に並列計算可能であり、解析例ではその効果についても調べる。

2. 波動モードの分散解析

(1) 対象とする問題

本論文では二次元平面ひずみ面内弾性波動場を対象とする。介在物の配置により、図-1 に示すような周期場が構成されている問題を考える。

図-1 欠陥を有する周期場のユニットセル Ω_1

図-1 において、基底ベクトル $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ で与えられる領域を Ω_0 とする。当該領域を $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ 各々の方向に無限に繰り返すことで、この周期場の基本構造が与えられている。その下で、 $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ 方向にそれぞれ N_1, N_2 個おきに Ω_0 とは異なる介在物が配置されているものとする。なお、本論文では、 Ω_0 と異なる介在物を欠陥と呼ぶ。欠陥を等間隔に配置することで、この動弾性場は $\mathbf{D}_1 = N_1 \mathbf{d}_1, \mathbf{D}_2 = N_2 \mathbf{d}_2$ で規定されたユニットセル Ω_1 に関する周期構造を持つこととなる。

以降では Ω_1 で与えられる周期場における波動モードの分散曲線を求める問題について議論する。

(2) 従来法による分散解析

本論文では、2.(1) に示した問題を対象とした効率的分散解析法について、従来法との比較を通して検討する。そのため、ここでは有限要素法に基づく従来法による分散解析の定式過程について、その概略を述べる。

$\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ で与えられる周期構造における定常応答解 $\mathbf{u}$ は Bloch の定理¹⁵⁾をみたすため、以下の関係式が成り立つ。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + n_j \mathbf{D}_j) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i \mathbf{k} \cdot n_j \mathbf{D}_j}, \quad (n_j \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

ここで、変位解は円振動数 ω の下、時間 t について $\mathbf{u} e^{i \omega t}$ で与えられているものとする。 $\mathbf{k}$ は当該周期場における Bloch 波数である。なお、 n_j は任意の整数であり、繰り返し指標は総和規約 (2 次元問題では $j=1,2$) に従うものとする。

図-1 のユニットセル Ω_1 を有限要素により離散化して得られる運動方程式を次式により与える。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{BB} & \tilde{\mathbf{K}}_{BT} & \tilde{\mathbf{K}}_{BL} & \tilde{\mathbf{K}}_{BR} & \tilde{\mathbf{K}}_{BM} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{TB} & \tilde{\mathbf{K}}_{TT} & \tilde{\mathbf{K}}_{TL} & \tilde{\mathbf{K}}_{TR} & \tilde{\mathbf{K}}_{TM} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{LB} & \tilde{\mathbf{K}}_{LT} & \tilde{\mathbf{K}}_{LL} & \tilde{\mathbf{K}}_{LR} & \tilde{\mathbf{K}}_{LM} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{RB} & \tilde{\mathbf{K}}_{RT} & \tilde{\mathbf{K}}_{RL} & \tilde{\mathbf{K}}_{RR} & \tilde{\mathbf{K}}_{RM} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{MB} & \tilde{\mathbf{K}}_{MT} & \tilde{\mathbf{K}}_{ML} & \tilde{\mathbf{K}}_{MR} & \tilde{\mathbf{K}}_{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_T \\ \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{F}_T \\ \mathbf{F}_L \\ \mathbf{F}_R \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{K}}_{ij} = \mathbf{K}_{ij} - \omega^2 \mathbf{M}_{ij}$ であり、 $\mathbf{K}_{ij}, \mathbf{M}_{ij}$ はそれぞれ剛性行列と質量行列の部分行列である。また、部分行列の下添字の B, T, L, R, M はそれぞれ Ω_1 の底辺、上辺、左辺、右辺およびそれ以外の領域内部における節点に関する成分であることを意味している。 $\mathbf{U}_i, \mathbf{F}_i$ は節点変位と節点力の部分ベクトルであり、領域内に外力は作用せず、そのため $\mathbf{F}_M = \mathbf{0}$ としている。

Bloch の定理 (式 (1)) より、第一 Brillouin zone の Bloch 波数に対して、式 (2) の節点ベクトルは次の関係をみたす。

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_T &= \mathbf{U}_B e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_2}, & \mathbf{F}_T &= -\mathbf{F}_B e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_2} \\ \mathbf{U}_R &= \mathbf{U}_L e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_1}, & \mathbf{F}_R &= -\mathbf{F}_L e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_1} \end{aligned} \quad (3)$$

式 (3) を式 (2) に適用し、 Ω_1 の右辺と上辺における節点ベクトル成分を消去すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}'_{BB} & \tilde{\mathbf{K}}'_{BL} & \tilde{\mathbf{K}}'_{BM} \\ \tilde{\mathbf{K}}'_{LB} & \tilde{\mathbf{K}}'_{LL} & \tilde{\mathbf{K}}'_{LM} \\ \tilde{\mathbf{K}}'_{MB} & \tilde{\mathbf{K}}'_{ML} & \tilde{\mathbf{K}}'_{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{K}}'_{ij}$ は、式 (3) に基づき部分ベクトルを消去することで縮約された部分行列である。

$\tilde{\mathbf{K}}'$ を剛性行列と質量行列に関する項に分離すると、最終的に ω^2 を固有値とする次の一般固有値問題を得る。

$$[\mathbf{K}'] \{\mathbf{U}'\} = \omega^2 [\mathbf{M}'] \{\mathbf{U}'\} \quad (5)$$

ここで、 $[\mathbf{K}'], [\mathbf{M}']$ と $\{\mathbf{U}'\}$ は、それぞれ式 (4) における行列を構成している剛性行列と質量行列、および節点変位ベクトルである。

従来の分散解析では、式 (1) における Bloch 波数 $\mathbf{k}$ をある値に設定して、式 (5) を解き固有振動数を求める。これを所定の範囲の $\mathbf{k}$ について走査することで分散曲線が求められることとなる。

3. 提案手法の概要

図-1 のユニットセル Ω_1 における欠陥部を囲むように境界 Γ_s を設定して、波動場を当該境界の外部と内部とに分けて考える。

図-2 欠陥の無い周期場のユニットセル Ω'_0 の加振

図-3 欠陥部 Ω_a の解

外部の波動場については、 Ω_0 のみで構成される欠陥を含まない周期場を用いて表現する。具体的には、図-2のように、欠陥に起因する波動の乱れと等しい波動場が、 Ω_0 で構成される周期場 Ω'_0 における境界 Γ_s の外部領域で与えられるように、加振力 $\{\mathbf{F}_s\}$ を Γ_s 上に作用させる問題を考える。ただし、 Ω'_0 を $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ 方向に平行移動して得られる他のユニットセルに作用する加振力については、式 (1) のように位相差を与えるものとする。 Γ_s 外部領域における解の、当該境界上での節点変位ベクトルを $\{\mathbf{U}_o\}$ 、内部節点力ベクトルを $\{\mathbf{F}_o\}$ と表し、加振力 $\{\mathbf{F}_s\}$ とこれらとの関係を与える行列を、それぞれ $[\mathbf{A}], [\mathbf{B}]$ と置き、次式のように定義する。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}_o\} &= [\mathbf{A}] \{\mathbf{F}_s\}, \\ \{\mathbf{F}_o\} &= [\mathbf{B}] \{\mathbf{F}_s\} \end{aligned} \quad (6)$$

一方、欠陥部を含む内部 Ω_a (図-3) の波動場については、 Γ_s 上での節点変位ベクトル $\{\mathbf{U}_a\}$ と内部節点力ベクトル $\{\mathbf{F}_a\}$ との関係を与えるインピーダンス行列 $[\mathbf{K}_a]$ を次式のように定義する。

$$[\mathbf{K}_a] \{\mathbf{U}_a\} = \{\mathbf{F}_a\} \quad (7)$$

なお、 $[\mathbf{K}_a]$ は、内部領域を有限要素で離散化して得られる行列を、 Γ_s 上の節点ベクトルに関して縮約することで容易に導出できる。

上述の外部問題と内部問題は、何れも図-1 の波動場を表現している。従って、 Γ_s 上において次の変位の適

図-4 Γ_s 上節点 i の加振問題

合条件と、力のつり合い条件が成り立つ。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}_o\} &= \{\mathbf{U}_a\}, \\ \{\mathbf{F}_o\} + \{\mathbf{F}_a\} &= \{\mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (8)$$

式 (8) の関係を (7) の $\{\mathbf{U}_a\}$, $\{\mathbf{F}_a\}$ に代入すると次式を得る。

$$[\mathbf{K}_a]\{\mathbf{U}_o\} = -\{\mathbf{F}_o\} \quad (9)$$

さらに、式 (9) の $\{\mathbf{U}_o\}$, $\{\mathbf{F}_o\}$ に式 (6) の関係を代入すると次式を得る。

$$[\mathbf{K}_a \mathbf{A} + \mathbf{B}]\{\mathbf{F}_s\} = \{\mathbf{0}\} \quad (10)$$

分散曲線の計算は、式 (10) の条件をみたす円振動数 ω と Bloch 波数 $\mathbf{k}$ の集合を求める問題として与えられる。

4. $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$ の導出

(1) $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$ 導出の概要

式 (6) の行列 $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$ は、文献 9) に示したものと同様の手法により導出する。以下にその概要を述べる。

図-4 に示す加振問題を考える。具体的には、 Γ_s 上のいずれか 1 つの節点 i に、水平または鉛直方向調和加振力を加える。なお、図-1 に示した波動問題の解は式 (1) をみたすため、 Ω'_0 の反復で得られている無限周期場において、図-4 の加振力 P を次式に従い与えるものとする。

$$P(\mathbf{x}_i + n_j \mathbf{D}_j) = e^{-i\mathbf{k} \cdot n_j \mathbf{D}_j}, \quad (n_j \in \mathbb{Z}) \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{x}_i$ は $n_1 = n_2 = 0$ で与えられるユニットセルにおける Γ_s 上の i 番節点の座標である。

図-4 の加振問題を解いて、 Γ_s 上に位置する全節点の変位および節点力ベクトルを求める。同様の問題を、 Γ_s 上の加振節点 i および加振方向 (水平, 鉛直) について順次解き、節点変位・節点力ベクトルを縦ベクトルとして並べて得られる正方行列 $[\mathbf{U}]$, $[\mathbf{F}]$ を作成する。すると、 $[\mathbf{U}]$, $[\mathbf{F}]$ の各縦ベクトルに対応する加振力ベク

トルとの間に式 (6) が成り立つので、次の関係を得る。

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}] &= [\mathbf{A}][\mathbf{P}], \\ [\mathbf{F}] &= [\mathbf{B}][\mathbf{P}] \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $[\mathbf{P}]$ は上述の加振力節点ベクトルを縦ベクトル成分に持つ正方行列である。

式 (11) のように単位加振力を設定する場合、加振する節点 i とその方向を順次変えて得られる行列 $[\mathbf{P}]$ は恒等行列となるので、式 (12) より $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$ は次式で与えられる。

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{U}], \quad [\mathbf{B}] = [\mathbf{F}] \quad (13)$$

(2) 加振問題の Floquet 変換

4.(1) より、 $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$ の導出は、図-4 に示した加振問題の求解に帰着する。本論文では、これを欠陥を含まない周期場における小さなユニットセル Ω_0 の問題に変換して解くことで、分散解析の効率化を図る。

Ω'_0 は Ω_0 の反復配置により与えられているので、 $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ に関する次の二重 Floquet 変換^{11),12)}を適用して当該加振問題を解くこととする。

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x} + n_j \mathbf{d}_j) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot n_j \mathbf{d}_j} \quad (14)$$

ここで $\boldsymbol{\kappa}$ は、次式をみたす $\mathbf{d}_j$ の双対基底 $\mathbf{b}_j$ に関して、 $S_b = 2\pi \mathbf{b}_1 \times 2\pi \mathbf{b}_2$ により与えられる領域内で定義される Floquet 波数ベクトルである。

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{d}_j = \delta_{ij} \quad (15)$$

なお、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。また式 (14) より、 $\tilde{\mathbf{u}}$ は $\mathbf{d}_j$ に関して次の周期条件をみたす。

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x} + n_j \mathbf{d}_j, \boldsymbol{\kappa}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot n_j \mathbf{d}_j} \quad (16)$$

図-4 における加振力が式 (11) により与えられているため、その応答解は式 (1) をみたす。式 (1) の条件を式 (14) の $\mathbf{u}$ に課すと、多少の計算の後に次式を得る²⁾。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}) &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \{ \\ &\quad \mathbf{u}(\mathbf{x} + n_j \mathbf{d}_j + m_j \mathbf{D}_j) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot (n_j \mathbf{d}_j + m_j \mathbf{D}_j)} \} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \mathbf{u}(\mathbf{x} + n_j \mathbf{d}_j) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot n_j \mathbf{d}_j} \\ &\quad \times \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} e^{i(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k}) \cdot m_1 \mathbf{D}_1} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} e^{i(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k}) \cdot m_2 \mathbf{D}_2} \end{aligned} \quad (17)$$

式 (17) の最後の項の評価のために、次式で与えられる関数 f を考える。

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{m_1} e^{i\mathbf{r} \cdot m_1 \mathbf{D}_1} \quad (18)$$

ここで、波数空間におけるベクトル $\mathbf{r}$ を $\mathbf{r} = (2\pi/N_1)\mathbf{b}_1\alpha_1 + (2\pi/N_2)\mathbf{b}_2\alpha_2$ と表すと、式 (18) は次

式のように変形できる。

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{m_1} e^{i2\pi m_1 \alpha_1} = \delta_1(\alpha_1) \quad (19)$$

ここで、 $\delta_1(\alpha_1)$ は $\alpha_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に特異点を持つ周期デルタ関数である。

すると、式 (17) の最後の級数項は次式で与えられる。

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} e^{i(\boldsymbol{\kappa}-\mathbf{k}) \cdot m_1 \mathbf{D}_1} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} e^{i(\boldsymbol{\kappa}-\mathbf{k}) \cdot m_2 \mathbf{D}_2} = \frac{S_b}{N_1 N_2} \delta_b(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k}) \quad (20)$$

ここで、 $\delta_b(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k})$ は $\mathbf{k} + (2\pi/N_1)\mathbf{b}_1 m_1 + (2\pi/N_2)\mathbf{b}_2 m_2$ に特異点を持つ二次元周期デルタ関数である。

式 (20) を式 (17) に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}) &= \frac{S_b}{N_1 N_2} \delta_b(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k}) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}), \\ \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}) &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \mathbf{u}(\mathbf{x} + n_j \mathbf{d}_j) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot n_j \mathbf{d}_j} \end{aligned} \quad (21)$$

なお、式 (16) より、 $\hat{\mathbf{u}}$ に対して次式が成り立つ²⁾。

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x} + n_j \mathbf{d}_j, \boldsymbol{\kappa}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot n_j \mathbf{d}_j} \quad (22)$$

集中荷重の Floquet 変換は同一の集中荷重で与えられるため、 $\hat{\mathbf{u}}$ の求解は Ω_0 内における Γ_s 上の節点 i の加振問題に帰着する。また式 (22) より、 $\hat{\mathbf{u}}$ は、 Ω_0 で与えられるユニットセルの左右・上下の辺における変位・節点力ベクトルに対して、式 (3) と同様の周期条件を課すことで求解可能となる。

(3) 逆 Floquet 変換

Ω_0 の加振問題より $\hat{\mathbf{u}}$ を求めたら、式 (21) で与えられる $\hat{\mathbf{u}}$ に逆 Floquet 変換を適用して図-4 の解 $\mathbf{u}$ を求める。

逆 Floquet 変換は次式で与えられる^{11),12)}。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + m_j \mathbf{d}_j) = \frac{S_d}{(2\pi)^2} \int_{S_b} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot m_j \mathbf{d}_j} dS_b \quad (23)$$

ここで、 S_d は $|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2|$ で与えられる Ω_0 の領域面積である。

式 (23) に (21) を代入すると、 $\hat{\mathbf{u}}$ に周期デルタ関数が含まれていることから、逆 Floquet 変換における積分は容易に処理できて、最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x} + m_j \mathbf{d}_j) &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{k} + \frac{2\pi}{N_1} \mathbf{b}_1 n_1 + \frac{2\pi}{N_2} \mathbf{b}_2 n_2) \right. \\ &\quad \times e^{-i(\mathbf{k} + 2\pi \mathbf{b}_1 n_1 / N_1 + 2\pi \mathbf{b}_2 n_2 / N_2) \cdot m_j \mathbf{d}_j} \left. \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

式 (24) より、図-4 の応答解は、 $\mathbf{k} + 2\pi \mathbf{b}_1 n_1 / N_1 + 2\pi \mathbf{b}_2 n_2 / N_2$ で与えられる $N_1 \times N_2$ 個の離散波数に対し

て小さなユニットセル Ω_0 の加振問題を解き、それらを重畳することで求められることとなる。

以上より、式 (10) における行列 $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$ は、 Ω_0 のみを離散化することで求めることが可能となる。

5. Block SS 法による固有値の計算手順

本論文では、式 (10) より分散曲線を求める際に、波数 $\mathbf{k}$ を所定の区間で走査して、各 $\mathbf{k}$ の下で式 (10) をみたす円振動数 ω を求める方法を採用することとする。この場合、式 (10) の行列は ω を陰的に含んでいるため、当該方程式は非線形固有値問題を与える。これを解くために、本論文では Block SS 法^{13),14)} を適用する。以下にその計算手順のみ示す。なお、詳細については文献^{13), 14)} を参照されたい。

次の非線形固有値問題を考える。

$$[\mathbf{G}(\omega)]\{\phi\} = 0 \quad (25)$$

ここで、 $[\mathbf{G}]$ は $n \times n$ の正方行列、 $\{\phi\}$ は固有ベクトルとする。

まず、 n 次元の縦ベクトルを乱数により生成し、適当な数 (L_B) 並べて $n \times L_B$ の行列 $[\mathbf{V}]$ を作成する。

次に、 ω の複素平面に中心 γ 、半径 ρ の円周境界 C を設定する。Block SS 法では、 C で囲まれた円形領域内に存在する固有値が求められることとなる。

当該円周上の ω において、次の方程式の解 $[\mathbf{y}]$ を求める。

$$[\mathbf{G}][\mathbf{y}] = [\mathbf{V}] \quad (26)$$

その下で、 C 上の周回積分により、次の行列 $[\hat{\mathbf{S}}_k]$ を求める。

$$[\hat{\mathbf{S}}_k] = \int_C z^k [\mathbf{y}] d\omega, \quad z = (\omega - \gamma) / \rho \quad (27)$$

ここで k は、適当な正の整数 K_B の下、 $1 \sim 2K_B$ の範囲の整数値をとるものとする。

さらに、次の $K_B L_B \times K_B L_B$ の正方行列を求める。

$$[\hat{\mathbf{H}}] = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_1 & \hat{\mathbf{M}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{M}}_{K_B} \\ \hat{\mathbf{M}}_2 & \hat{\mathbf{M}}_3 & \cdots & \hat{\mathbf{M}}_{K_B+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{M}}_{K_B} & \hat{\mathbf{M}}_{K_B+1} & \cdots & \hat{\mathbf{M}}_{2K_B-1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$[\check{\mathbf{H}}] = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_2 & \hat{\mathbf{M}}_3 & \cdots & \hat{\mathbf{M}}_{K_B+1} \\ \hat{\mathbf{M}}_3 & \hat{\mathbf{M}}_4 & \cdots & \hat{\mathbf{M}}_{K_B+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{M}}_{K_B+1} & \hat{\mathbf{M}}_{K_B+2} & \cdots & \hat{\mathbf{M}}_{2K_B} \end{bmatrix} \quad (29)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{M}}_k$ は次式で与えられる行列である。

$$[\hat{\mathbf{M}}] = [\mathbf{V}^*][\hat{\mathbf{S}}_k] \quad (30)$$

なお、 $[\mathbf{V}^*]$ は $[\mathbf{V}]$ の共役転置行列である。

図-5 解析対象のユニットセル

続いて $[\hat{\mathbf{H}}]$ を次式のように特異値分解する.

$$[\hat{\mathbf{H}}] = [\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^* \\ \mathbf{P}_2^* \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここで, $[\mathbf{e}_i]$ は特異値の対角行列であり, 理論上 $[\mathbf{e}_2]$ の成分はゼロとなる. 実際の計算においては $[\mathbf{e}_1]$ の成分に比べ十分小さな値として, 絶対値が 10^{-10} 以下のものを $[\mathbf{e}_2]$ と置いている.

$[\mathbf{e}_2]$ をゼロと見なし, 次の行列 $[\mathbf{R}]$ を求める.

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{e}_1^{-1/2}] [\mathbf{Q}_1^*] [\hat{\mathbf{H}}] [\mathbf{P}_1] [\mathbf{e}_1^{-1/2}] \quad (32)$$

なお, 行列 $[\mathbf{R}]$ は $[\mathbf{e}_1]$ と同サイズとなる.

$[\mathbf{R}]$ に関して, 次の標準固有値問題を解く.

$$[\mathbf{R}]\{\psi\} = z\{\psi\} \quad (33)$$

行列 $[\mathbf{R}]$ のサイズは円周 C 内に存在する固有値 ω の個数に一致する. 通常, このサイズは, 式 (5) の従来法における固有値問題に比べて十分に小さなものとなる. 式 (33) の固有値 z を求めたならば, 固有円振動数 ω は次式により与えられる.

$$\omega = \gamma + \rho z \quad (34)$$

6. 解析例

(1) 解析条件

提案手法の妥当性や計算効率を確認する目的で, 具体的な周期動弾性場を対象に分散解析を実施した.

解析例に用いたユニットセルとその要素分割の様子を図-5に示す. $L \times L$ の正方形ユニットセル Ω_0 を水平・鉛直方向に3個ずつ配列して, 中央部に欠陥を設けている. 図-5のユニットセルは, 文献9)において解析対象としたものと同一である. 母材をエポキシ樹脂, 円形介在物(直径 $L/2$)をアルミニウムとし, 欠陥部はアルミニウムと質量密度が大きく異なる同一形状の鉛

図-6 分散曲線 (黒:従来法, 赤:提案法)

図-7 第一 Brillouin zone における分散曲線の展開波数

によって置換している. なお, 介在物と欠陥部の質量密度, せん断弾性係数を, 母材のそれらの値との比により無次元化し, それぞれ 2.23, 16.34 および 9.6, 3.5 と設定した. また, 母材, 介在物, 欠陥部のポアソン比をそれぞれ 0.37, 0.35, 0.3 とした. Ω_0 の有限要素による離散化に当り, 精度を確認の上²⁾, 4 節点四辺形要素により各辺 12 分割している.

従来法による分散解析の際は, 図-5に示したように $3L \times 3L$ のユニットセルを離散化して, 式 (5) を解いて固有円振動数 ω を求めた.

一方, 本提案法による解析の際には, 図-5中に示した小さなユニットセル Ω_0 のみを離散化して, 3., 4., 5. に述べた手順により固有円振動数を求めた. なお, 加振境界 Γ_s は介在物と母材との円形界面に設定した.

(2) 分散曲線

従来法と本提案法とにより, それぞれ当該問題の分散曲線を求めた. 結果を図-6に示す. また, 当該周期場の波数平面における第一 Brillouin zone を図-7に示す. 図-6は, 図-7に示した波数点 Γ, X, M を頂点とした

図-8 Block SS 法における周回積分

境界線に沿って求めた分散曲線を展開したものである。図-6の縦軸は無次元振動数 $\bar{\omega} = \omega L / C_T$ により表示している。ただし、 C_T は母材における横波伝播速度である。なお、当該分散曲線に基づく伝播波動モード特性の議論と解釈については文献9)を参照されたい。

図-6には、従来法と提案法により求めた分散曲線をそれぞれ黒線と赤線で描いた。これらはほぼ完全に一致しており、提案法の妥当性が確認できる。

提案法により固有円振動数を求める際に用いた Block SS 法では、 $0 \leq \bar{\omega} \leq 6$ の範囲内の分散曲線を求めることを念頭に、図-8に示すように複素周波数平面における周回積分の中心を $\gamma = 3.0$ と実軸上にとり、半径を $\rho = 3.0$ に設定した。なお、実固有値のみを探索対象とする場合、積分経路を実軸近傍に設定すれば十分である。ただし、経路の設定(実軸からの距離等)について検討を要する。ここでは、Block SS 法の適用可能性を確認することを主目的として、積分経路には最も単純な円形経路を採用した。また、周回積分には台形公式を用い、試計算の結果に基づき円周上を50等分割して評価した。ランダムに生成したベクトルから成る行列 $[\mathbf{V}]$ を構成するベクトル数は $L_B = 10$ 、式(27)の行列 $[\hat{\mathbf{S}}_k]$ に関する数も $K_B = 10$ と設定した。この場合、式(28)、(29)の行列 $[\hat{\mathbf{H}}]$ 、 $[\tilde{\mathbf{H}}]$ のサイズは 100×100 となる。ちなみに、数値的に求めた固有値は多少の虚部を持つ。そのため、 $|\text{Im}(\bar{\omega})| < 10^{-4}$ を基準値として実固有値を判定した。

(3) 計算時間に関する検討

図-6の分散曲線を求めるために要した計算時間について調べた。式(5)による従来法と本提案法とで要した計算時間は、それぞれ約37,383(s)および約3,606(s)となり、提案法の適用により1/10以下に短縮することができた。

なお、従来法による分散解析では、Householder法による三重対角化と二分法とに基づく標準的固有値計算法を用いた。このとき、計算時間はユニットセルのサイ

ズ $N_1 \times N_2$ の3乗に比例して増加する。ちなみに、疎行列を対象とする Lanczos 法による場合、固有ベクトルの近似度は一般に Krylov の部分空間のサイズに依存する。そのため計算精度と効率とはトレードオフの関係にあり、本問題においては提案法に匹敵する程の計算量の削減は得られなかった。

一方、提案法では、図-4に示した加振問題の求解に要する時間が支配的となっており、そのため行列 $[\mathbf{A}]$ 、 $[\mathbf{B}]$ の作成にほとんどの計算時間を費やしている。式(24)に示したように、当該計算量は離散波数点の数に比例するため、 $N_1 \times N_2$ に関して線形に増大する。したがって、欠陥の配置間隔 N_1 および N_2 が大きい程、提案法の従来法に対する優位性はより顕著に現れることとなる。

また、Block SS 法による固有値計算は図-8の複素振動数平面における円周 C 上の積分に帰着するが、行列 $[\mathbf{A}]$ 、 $[\mathbf{B}]$ を求めるための加振応答解析は、数値積分点毎に独立に計算可能である。そこで、当該計算過程について、MPIによる並列計算の適用を試みた。前述の通り、周回積分における積分点数を50としているので、プロセッサ数が50の約数に一致しないケースでは各プロセッサに割り当てられる積分点数は均等とならない。そのため、例えばプロセッサ数を10とした場合と12とした場合とで1プロセッサが分担する最大積分点数は5点となり、計算時間は同一となる。このように計算時間が同じとなる条件のうち、最もプロセッサ数が少なくなる場合を対象に、プロセッサ数と計算の加速率との関係をまとめた結果を図-9に示す。図-9に示すように、並列化による加速率はプロセッサ数に概ね比例しており、並列計算により効率良く計算時間が短縮できている。なお、17プロセッサを用いて並列計算した場合の本手法による計算時間は約211(s)であり、従来法に比べて約1/180まで計算時間が短縮されている。

本解析では一連の計算を並列実行するため、使用メモリはプロセッサ数に比例する。ただし、対象となる問題は小さなユニットセル Ω_0 に縮小されるため、メモリ負荷はそれ程大きな負担とはならない。

以上より、本提案法に Block SS 法の並列化を組み合わせることで、更なる効率化が容易に実現可能であることが確認できた。

7. おわりに

周期複合材中に等間隔に欠陥を配置した周期弾性波動場を対象に、効率的分散解析法の構成を試みた。具体的には、欠陥による波動の乱れを、それと等価な強制加振に置き換え、当該加振力を固有ベクトルとした非線形固有値問題を導出した。また、この加振問題に

図-9 並列計算による計算時間の加速率

Floquet 変換を適用することで、欠陥を持たない周期複合材に関する小さなユニットセルの動弾性問題に帰着して求解可能とした。なお、本来波数領域の積分で与えられる逆 Floquet 変換が、離散波数点における解の重畳により与えられることとなるため、計算量は大幅に削減可能となる。

さらに、上述の非線形固有値問題の求解に Block SS 法の適用を試みた。この場合、固有値計算は複素振動数平面内の周回積分に帰着するため、積分点毎に独立計算が可能であり、容易に並列化を図ることができる。その結果、本論文中で示した計算例の場合、17 個のプロセッサによる並列計算により、従来法に比べて約 1/180 程度にまで計算時間を短縮でき、本手法と Block SS 法の並列化との併用が有効であることを確認した。

参考文献

- 1) 阿部和久, 中山 悠, 紅露一寛: 中間層を有する周期複合材の弾性波動解析, 応用力学論文集, Vol.13, pp.1041-1048, 2010.
- 2) 阿部和久, 笈 拓哉, 紅露一寛, Pher Errol Balde QUINAY: 周期長の異なる複合材層を有する無限動弾性場の波動

透過解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.71, No.2, pp.I.859-I.867, 2015.

- 3) Nakashima, K., Biwa, S. and Matsumoto, E.: Elastic wave transmission and stop band characteristics in unidirectional composites, *J. Solid Mech. Mater. Engng.*, Vol.2, pp.1195-1206, 2008.
- 4) Duclos, G. and Clément, A.H.: Wave propagation through arrays of unevenly spaced vertical piles, *Ocean Engng.*, Vol.31, pp.1655-1666, 2004.
- 5) Chen, Y.-Y. and Ye, Z.: Acoustic attenuation by two-dimensional arrays of rigid cylinders, *Phys. Rev. Lett.*, Vol.87, 184301, 2001.
- 6) Herrero, J.M., García-Nieto, S., Blasco, X., Romero-García, V., Sánchez-Pérez, J.V. and García-Raffi, L.M.: Optimization of sonic crystal attenuation properties by ev-MOGA multiobjective evolutionary algorithm, *Struct. Multidisc. Opt.*, Vol.39, pp.203-215, 2009.
- 7) Suzuki, K.: X-ray studies on precipitation of metastable centers in mixed crystals NaCl-CdCl₂, *J. Phys. Soc. Japan*, Vol.16, pp.67-78, 1961.
- 8) Caballero, D., Sánchez-Dehesa, J., Martínez-Sala, R., Rubio, C., Sánchez-Pérez, J.V., Sanchis, L. and Meseguer, F.: Suzuki phase in two-dimensional sonic crystals, *Phys. Rev. B*, Vol.64, 064303, 2001.
- 9) 笈 拓哉, 阿部和久, 紅露一寛, Pher Errol Balde QUINAY: 欠陥を等間隔に配置した周期層の波動透過解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.72, No.2, pp.I.197-I.206, 2016.
- 10) 阿部和久, 本間広紀, 紅露一寛: 一部に欠陥を有する二次元周期場の動弾性解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.68, pp.I.823-I.831, 2012.
- 11) Clouteau, D., Arnst, M., Al-Hussaini, T.M. and Degrande, G.: Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium, *J. Sound Vib.*, Vol.283, p.173-199, 2005.
- 12) Clouteau, D., Elthabre, M.L. and Aubry, D.: Periodic BEM and FEM coupling, Application to seismic behavior of very long structures, *Comput. Mech.*, Vol.25, pp.567-577, 2000.
- 13) Ikegami, T., Sakurai, T. and Nagashima, U.: A filter diagonalization for generalized eigenvalue problems based on the Sakurai-Sugiura projection method, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.233, pp.1927-1936, 2010.
- 14) Asakura, J., Sakurai, T., Tadano, H., Ikegami, T. and Kimura, K.: A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, *JSIAM Letters*, Vol.1, pp.52-55, 2009.
- 15) 迫田和彰: フォトニック結晶入門, 森北出版, 8.5, 2005.

(2017. 6. 23 受付)

IMPROVEMENT OF DISPERSION ANALYSIS METHOD FOR PERIODIC FIELD WITH A DEFECT ARRAY

Kazuhisa ABE, Takuya KAKEHI and Kazuhiro KORO

An efficient dispersion analysis method is developed for periodic composite materials with a defect array. In the method scattering waves from the defects are represented by equivalent forces. The dispersion analysis is then reduced to a nonlinear eigenvalue problem. Application of Floquet transform to the dynamic excitation makes it possible to solve this with a small unit cell of the periodic composite having no defects. Since, in the present problem, the inverse Floquet transform is given by a sum of solutions at discrete wavenumber vectors, the numerical effort can be reduced effectively. The nonlinear eigenvalue problem is solved by the Block SS method. The parallel computation in this approach enables to accelerate the dispersion analysis. Performance of the developed method is investigated based on a numerical example.