Nitsche法を用いた シェル要素とソリッド要素の接合

山本 剛大¹・山田 貴博²・松井 和己³

¹博 (工) 東北大学助教 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)
E-mail: takeki.yamamoto.c2@tohoku.ac.jp

²学博 横浜国立大学教授 大学院環境情報研究院 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7)

³博 (工) 横浜国立大学准教授 大学院環境情報研究院 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7)

複雑な3次元構造物に対する有限要素解析において、シェル要素とソリッド要素を適切に接続することにより、低コストで高精度な数値計算を実現する手法について検討する。異種要素を接続する手法として提案されている多点拘束法やPenalty法による手法では、接続境界において変位の連続性のみが考慮されており、接続境界近傍でのソリッド要素に不自然な変形状態が生じる。本研究では、接続境界での応力ベクトルの連続性を考慮できるNitsche法を適用することで、シェル要素とソリッド要素を適切に接続する手法を提案する。本手法では、シェル要素とソリッド要素で評価される応力分布から接続境界の応力状態を表現することで、接続境界近傍において自然な変形および応力分布を示すモデル化が実現できる。

Key Words: shell element, solid element, combined modeling, Nitsche's method

1. はじめに

有限要素法を用いた構造解析において、局所的な力学挙動の評価には連続体要素の使用が推奨される。しかしながら、解析対象の形状を考慮せずに解析対象全体を1種類の要素で離散化する手法では、精度の高い数値解を得るためにメッシュ解像度の改良や計算コストの増加が避けられない。たとえば、橋梁などの構造の大部分がシェル構造やはり構造とみなせる解析対象に連続体要素を適用すると、計算コストが膨大となる。それを解決するために、解析対象全体を連続体要素でモデル化するのではなく、部分的に構造要素と連続体要素を使い分ける技術として、構造要素と連続体要素を接続したモデル化手法の開発が望まれている。

解析対象のモデル化において、構造要素と連続体要素の接続を想定する。節点自由度の異なる要素を接続する手法として、変位の従属関係を定義する多点拘束(Multiple Point Constraint, MPC)法^{1,2)}や同様の拘束条件をPenalty法³⁾によって課す手法が提案されている。これらの手法では、並進変位のみを自由度に持つソリッド要素と並進変位と回転角を自由度とするはり要素、シェル要素に対して、節点の接続条件が検討されてきた。そのため、応力状態やひずみ状態が複雑となる構造物を対象とする数値計算では、接続部分を含めて計算結果に対する信頼性が低下する。さらに、変形に対する連続性のみが考慮される場合、構造要素の変形状態に対する制約から、接続境界近傍でのソリッド要素に不自然な変形状態が生じる。それに対して、接続される2種類の要素間の特性を結びつける特殊な接合要素⁴⁾や接合部分の界面において応力仕事のつりあい方程式を離散化する手法⁵⁾は、接続部分の変位に対する連続性を課すMPC法に加えて、応力状態の連続性を課す手法として提案されている。

近年、連続体要素において分割された領域の解を接続する手法^{6,7)}が注目されている。メッシュが整合しない2領域間の解の接続手法⁷⁾や重複するメッシュの界面における解の接続⁸⁾において、Nitsche法⁹⁾が適用されている。Nitsche法は内部Penalty不連続Galerkin法(Interior Penalty Discontinuous Galerkin Method, IP-DGM)¹⁰⁾の背景にも用いられる手法であり、連続体のモデル化に加えて、不連続体のモデル化¹¹⁾や2物体の接触問題¹²⁾への有用性が示されている。また、Nitsche法による解の接続では変位ベクトルに加えて、応力ベクトルの連続性が考慮されるため、構造要素の変形状態に対する制約から生じるソリッド要素の不自然な変形を改善することが可能となる。はり要素とソリッド要素の接続にNitsche法を適用した手法¹³⁾では、はり理論から計算できる応力分布をソリッド要素でモデル化された領域の接続境界における応力ベクトルとして

いる。そこで本研究では、連続体における分割された領域の解を接続する考え方を用いることにより、接続境界で3次元の応力ベクトルの連続性を考慮し、シェル要素とソリッド要素を接続する手法を開発する。本論文は、Nitsche法に基づくシェル要素とソリッド要素

図-1 領域分割

の接続手法を提案し、数値計算例においてその有用性を示すものである。

2. 領域分割に基づく定式化

(1) 問題設定

本研究では、図-1に示すような全体領域 Ω をソリッド要素によってモデル化されるソリッド領域 $\Omega^{(d)}$ とシェル要素によってモデル化されるシェル領域 $\Omega^{(l)}$ に分割し、それぞれの領域における変位を接続する。ソリッド領域 $\Omega^{(d)}$ の境界を $\Gamma^{(d)}$ 、シェル領域 $\Omega^{(l)}$ の境界を $\Gamma^{(l)}$ とし、 $\Gamma^{(d)}$ と $\Gamma^{(l)}$ の共通部分である領域間境界を $\Gamma^{(dl)} = \Gamma^{(d)} \cap \Gamma^{(l)}$ とする。

ソリッド領域 $\Omega^{(d)}$ において定義される変位場 $\mathbf{u}^{(d)}$ 、シェル領域 $\Omega^{(l)}$ において定義される変位場 $\mathbf{u}^{(l)}$ に対して、次のような境界値問題を考える。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(d)}(\mathbf{u}^{(d)}) + \mathbf{b}^{(d)} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega^{(d)} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(l)}(\mathbf{u}^{(l)}) + \mathbf{b}^{(l)} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega^{(l)} \quad (2)$$

$$\mathbf{u}^{(d)} = \bar{\mathbf{u}}^{(d)} \quad \text{on } \Gamma_u^{(d)} \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^{(l)} = \bar{\mathbf{u}}^{(l)} \quad \text{on } \Gamma_u^{(l)} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(d)}(\mathbf{u}^{(d)})\mathbf{n}^{(d)} = \bar{\mathbf{t}}^{(d)} \quad \text{on } \Gamma_t^{(d)} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(l)}(\mathbf{u}^{(l)})\mathbf{n}^{(l)} = \bar{\mathbf{t}}^{(l)} \quad \text{on } \Gamma_t^{(l)} \quad (6)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}^{(d)}(\mathbf{u}^{(d)})$ はソリッド領域 $\Omega^{(d)}$ における変位場 $\mathbf{u}^{(d)}$ から算出される Cauchy 応力テンソル、 $\boldsymbol{\sigma}^{(l)}(\mathbf{u}^{(l)})$ はシェル領域 $\Omega^{(l)}$ における変位場 $\mathbf{u}^{(l)}$ から算出される Cauchy 応力テンソル、 $\mathbf{b}^{(d)}$ 、 $\mathbf{b}^{(l)}$ は物体力ベクトル、 $\mathbf{t}^{(d)}$ 、 $\mathbf{t}^{(l)}$ は表面力ベクトルである。また、 $\mathbf{n}^{(d)}$ はソリッド領域の境界 $\Gamma^{(d)}$ に対する外向き単位法線ベクトル、 $\mathbf{n}^{(l)}$ はシェル領域の境界 $\Gamma^{(l)}$ に対する外向き単位法線ベクトルとする。領域間境界 $\Gamma^{(dl)}$ 上では、

$$\mathbf{n}^{(d)} = -\mathbf{n}^{(l)} = \mathbf{n} \quad (7)$$

の関係が成り立つ。境界については、 $\Gamma_u^{(d)}$ 、 $\Gamma_u^{(l)}$ が変位場 $\mathbf{u}$ に対して幾何学的境界条件が課される境界、 $\Gamma_t^{(d)}$ 、 $\Gamma_t^{(l)}$ が表面力 $\mathbf{t}$ に対して力学的境界条件が課される境界

を意味する。これらの境界に対して、

$$\Gamma_u^{(d)} \cup \Gamma_t^{(d)} \cup \Gamma^{(dl)} = \Gamma^{(d)} \quad (8)$$

$$\Gamma_u^{(d)} \cap \Gamma_t^{(d)} = \emptyset \quad (9)$$

$$\Gamma_u^{(d)} \cap \Gamma^{(dl)} = \emptyset \quad (10)$$

$$\Gamma_t^{(d)} \cap \Gamma^{(dl)} = \emptyset \quad (11)$$

$$\Gamma_u^{(l)} \cup \Gamma_t^{(l)} \cup \Gamma^{(dl)} = \Gamma^{(l)} \quad (12)$$

$$\Gamma_u^{(l)} \cap \Gamma_t^{(l)} = \emptyset \quad (13)$$

$$\Gamma_u^{(l)} \cap \Gamma^{(dl)} = \emptyset \quad (14)$$

$$\Gamma_t^{(l)} \cap \Gamma^{(dl)} = \emptyset \quad (15)$$

を仮定する。

領域間の解に対する接続条件は、変位ベクトルおよび応力ベクトルの連続性として、

$$\mathbf{u}^{(d)} = \mathbf{u}^{(l)} \quad \text{on } \Gamma^{(dl)} \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(d)}\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^{(l)}\mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma^{(dl)} \quad (17)$$

と表現される。

(2) 変分法的定式化

本研究では弾性体の大変形問題を想定し、材料構成則が超弾性体として記述されるものとする。このとき、式 (1) から式 (6) のソリッド領域 $\Omega^{(d)}$ とシェル領域 $\Omega^{(l)}$ において定義される変位場 $\mathbf{u}^{(d)}$ 、 $\mathbf{u}^{(l)}$ に対する境界値問題は、全ポテンシャルエネルギー汎関数 Π の最小化問題として、

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}^{(d)}, \mathbf{u}^{(l)}) = & \int_{\Omega^{(d)}} W^{(d)}(\mathbf{F}^{(d)}) d\Omega \\ & - \int_{\Omega^{(d)}} \mathbf{u}^{(d)} \cdot \mathbf{b}^{(d)} d\Omega - \int_{\Gamma^{(d)}} \mathbf{u}^{(d)} \cdot \bar{\mathbf{t}}^{(d)} d\Gamma \\ & + \int_{\Omega^{(l)}} W^{(l)}(\mathbf{F}^{(l)}) d\Omega \\ & - \int_{\Omega^{(l)}} \mathbf{u}^{(l)} \cdot \mathbf{b}^{(l)} d\Omega - \int_{\Gamma^{(l)}} \mathbf{u}^{(l)} \cdot \bar{\mathbf{t}}^{(l)} d\Gamma \end{aligned} \quad (18)$$

と定義できる。ここで、 $\mathbf{F}^{(d)}$ はソリッド領域の変位場 $\mathbf{u}^{(d)}$ から算出される変形勾配テンソル、 $\mathbf{F}^{(l)}$ はシェル領域の変位場 $\mathbf{u}^{(l)}$ から算出される変形勾配テンソルであり、 $W^{(d)}(\mathbf{F}^{(d)})$ はソリッド領域でのひずみエネルギー密度関数、 $W^{(l)}(\mathbf{F}^{(l)})$ はシェル領域でのひずみエネルギー密度関数である。

汎関数 (18) の最小化問題に対する付帯条件は、変位場 $\mathbf{u}^{(d)}$ 、 $\mathbf{u}^{(l)}$ に対する幾何学的境界条件 (3)、(4) と領域間境界 $\Gamma^{(dl)}$ における変位場の接続条件 (16) となる。

(3) 変位場に対する接続条件

ソリッド領域を六面体 1 次要素で離散化すると、変位場 $\mathbf{u}^{(d)}$ は節点の変位ベクトル $\bar{\mathbf{u}}^{(d)}$ を用いて、

$$\mathbf{u}^{(d)} = \bar{\mathbf{u}}^{(d)}(\xi^{(d)}, \eta^{(d)}, \zeta^{(d)}) \quad (19)$$

図-2 領域間境界における変位の接続

と表される．ここで、 $\xi^{(d)}$ 、 $\eta^{(d)}$ 、 $\zeta^{(d)}$ は六面体要素で定義されるアイソパラメトリック座標を意味する．一方、シェル領域を退化シェル要素で離散化すると、変位場 $\mathbf{u}^{(l)}$ は中央面に配置された節点の変位ベクトル $\bar{\mathbf{u}}^{(l)}$ 、初期配置、現配置において節点で定義されるディレクターベクトル $\mathbf{V}_\Gamma^{(l)}$ 、 $\mathbf{v}_\Gamma^{(l)}$ 、板厚 h_e と、節点の位置を基準として定義される面外方向の座標 $\zeta^{(l)}$ を用いて、

$$\mathbf{u}^{(l)} = \bar{\mathbf{u}}^{(l)}(\xi^{(l)}, \eta^{(l)}) + \zeta^{(l)} \frac{h_e}{2} (\mathbf{v}_\Gamma^{(l)}(\xi^{(l)}, \eta^{(l)}) - \mathbf{V}_\Gamma^{(l)}(\xi^{(l)}, \eta^{(l)})) \quad (20)$$

と表現される．ここで、シェル要素で定義される板厚 h_e は要素内で一定と仮定し、 $\xi^{(l)}$ 、 $\eta^{(l)}$ は面内方向に対するアイソパラメトリック座標である．

図-2に示すように、領域間境界 $\Gamma^{(dl)}$ における変位場の連続性条件 (16) は、ソリッド要素の変位場 (19) と退化シェル要素の変位場 (20) を用いて、

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{u}}^{(d)}(\xi^{(d)}, \eta^{(d)}, \zeta^{(d)}) \\ &= \bar{\mathbf{u}}^{(l)}(\xi^{(l)}, \eta^{(l)}) + \zeta^{(l)} \frac{h_e}{2} (\mathbf{v}_\Gamma^{(l)}(\xi^{(l)}, \eta^{(l)}) - \mathbf{V}_\Gamma^{(l)}(\xi^{(l)}, \eta^{(l)})) \\ & \quad \text{on } \Gamma^{(dl)} \end{aligned} \quad (21)$$

と定義できる．変位場の連続性条件 (21) を線形化し、離散化された後の節点自由度に対して適用すると、複数の節点変位を線形関係式として表現でき、一般的な多点拘束条件 (Multiple Point Constraint, MPC) ²⁾ が得られる．

3. 領域間接続手法

前節の定式化では、領域間境界における変位場の接続条件 (16) は付帯条件として扱われる．しかし、変位場に対して制約条件を課すと、領域間境界における力のつりあい、すなわち、応力ベクトルの連続性条件 (17) は、近似問題において満足されない．そこで本研究では、変位ベクトルの連続性と応力ベクトルの連続性の双方を考慮するために、領域間境界における接続条件に Nitsche 法を適用する．

(1) Penalty 法

変位場の接続条件 (16) からギャップベクトル $\mathbf{g}$ を

$$\mathbf{g} = \mathbf{u}^{(d)} - \mathbf{u}^{(l)} \quad (22)$$

と定義する．Penalty ポテンシャル W^P は、ギャップベクトル $\mathbf{g}$ のノルムと Penalty 係数 p を用いて、

$$W^P(\mathbf{u}^{(d)}, \mathbf{u}^{(l)}) = \int_{\Gamma^{(dl)}} \frac{p}{2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \, d\Gamma \quad (23)$$

と表せる．式 (23) の Penalty ポテンシャル W^P を式 (18) の汎関数 Π に加えることで、Penalty 法に基づく汎関数 Π^P は、

$$\Pi^P(\mathbf{u}^{(d)}, \mathbf{u}^{(l)}) = \Pi(\mathbf{u}^{(d)}, \mathbf{u}^{(l)}) + W^P(\mathbf{u}^{(d)}, \mathbf{u}^{(l)}) \quad (24)$$

と定義できる．ここで、Penalty 係数 p を十分大きな値に設定することで、拘束条件が近似的に満足される．

(2) Nitsche 法

Nitsche 法では、変位ベクトルおよび応力ベクトルの連続性が成立している状態において、領域間境界における表面力による仕事が 0 となることを以下の式で表す．

$$\int_{\Gamma^{(dl)}} \mathbf{u}^{(d)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(d)}(\mathbf{u}^{(d)}) \mathbf{n}^{(d)} \, d\Gamma + \int_{\Gamma^{(dl)}} \mathbf{u}^{(l)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(l)}(\mathbf{u}^{(l)}) \mathbf{n}^{(l)} \, d\Gamma = 0 \quad (25)$$

ここで、 $\mathbf{n}^{(d)}$ 、 $\mathbf{n}^{(l)}$ は現配置において領域間境界 $\Gamma^{(dl)}$ 上で定義される単位法線ベクトルである．現配置での領域間境界で記述される関係式 (25) は、初期配置を参照することで、

$$\int_{\Gamma^{(dl)}} \mathbf{u}^{(d)} \cdot \mathbf{P}^{(d)}(\mathbf{u}^{(d)}) \mathbf{N}^{(d)} \, d\Gamma + \int_{\Gamma^{(dl)}} \mathbf{u}^{(l)} \cdot \mathbf{P}^{(l)}(\mathbf{u}^{(l)}) \mathbf{N}^{(l)} \, d\Gamma = 0 \quad (26)$$

と表現できる．ここで、 $\mathbf{P}^{(d)}$ はソリッド領域 $\Omega^{(d)}$ における変位場 $\mathbf{u}^{(d)}$ から算出される 1st Piola-Kirchhoff 応力テンソル、 $\mathbf{P}^{(l)}$ はシェル領域 $\Omega^{(l)}$ における変位場 $\mathbf{u}^{(l)}$ から算出される 1st Piola-Kirchhoff 応力テンソルである．また、 $\mathbf{N}^{(d)}$ はソリッド領域の境界 $\Gamma^{(d)}$ に対する外向き単位法線ベクトル、 $\mathbf{N}^{(l)}$ はシェル領域の境界 $\Gamma^{(l)}$ に対する外向き単位法線ベクトルである．式 (7) と同様に、領域間境界 $\Gamma^{(dl)}$ 上における $\mathbf{N}^{(d)}$ 、 $\mathbf{N}^{(l)}$ について、

$$\mathbf{N}^{(d)} = -\mathbf{N}^{(l)} = \mathbf{N} \quad (27)$$

の関係が成り立つ．式 (26) より、Nitsche ポテンシャル W^N は、

$$W^N(\mathbf{u}^{(d)}, \mathbf{u}^{(l)}) = - \int_{\Gamma^{(dl)}} (\mathbf{u}^{(d)} - \mathbf{u}^{(l)}) \cdot ([[\mathbf{P}]] \mathbf{N}) \, d\Gamma \quad (28)$$

と定義できる．ここで、

$$[[\mathbf{P}]] = \alpha \mathbf{P}^{(d)}(\mathbf{u}^{(d)}) + (1 - \alpha) \mathbf{P}^{(l)}(\mathbf{u}^{(l)}) \quad (29)$$

であり、Nitsche パラメータ α は $0 \leq \alpha \leq 1$ をとる．式 (28) の Nitsche ポテンシャル W^N を式 (24) の Penalty 法に基づく汎関数 Π^P に追加することで、Nitsche 法に基づく汎関数 Π^N を

$$\begin{aligned}
\Pi^N(\mathbf{u}^{(d)}, \mathbf{u}^{(l)}) &= \Pi^P(\mathbf{u}^{(d)}, \mathbf{u}^{(l)}) + W^N(\mathbf{u}^{(d)}, \mathbf{u}^{(l)}) \\
&= \Pi(\mathbf{u}^{(d)}, \mathbf{u}^{(l)}) \\
&\quad + W^P(\mathbf{u}^{(d)}, \mathbf{u}^{(l)}) + W^N(\mathbf{u}^{(d)}, \mathbf{u}^{(l)}) \\
&= \int_{\Omega^{(d)}} W^{(d)}(\mathbf{F}^{(d)}) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Gamma^{(d)}} \mathbf{u}^{(d)} \cdot \mathbf{b}^{(d)} d\Omega - \int_{\Gamma^{(d)}} \mathbf{u}^{(d)} \cdot \bar{\mathbf{t}}^{(d)} d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Omega^{(l)}} W^{(l)}(\mathbf{F}^{(l)}) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Gamma^{(l)}} \mathbf{u}^{(l)} \cdot \mathbf{b}^{(l)} d\Omega - \int_{\Gamma^{(l)}} \mathbf{u}^{(l)} \cdot \bar{\mathbf{t}}^{(l)} d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma^{(dl)}} \frac{p}{2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Gamma^{(dl)}} (\mathbf{u}^{(d)} - \mathbf{u}^{(l)}) \cdot ([[\mathbf{P}]] \mathbf{N}) d\Gamma \quad (30)
\end{aligned}$$

と定義する．ここで，式(28)で定義される Nitsche ポテンシャルに式(22)のギャップベクトル $\mathbf{g}$ が含まれていることから，Nitsche 法に基づく定式化では Penalty ポテンシャルと Nitsche ポテンシャルによって，変位に対する拘束条件が課される．

Nitsche 法に基づく汎関数 Π^N の $\mathbf{u}^{(d)}$ についての変分をとることで，ソリッド領域 $\Omega^{(d)}$ での仮想仕事に対応した弱形式は，

$$\begin{aligned}
G^{(d)}(\mathbf{u}^{(d)}, \mathbf{u}^{(l)}; \delta \mathbf{u}^{(d)}) &= \int_{\Omega^{(d)}} \mathbf{S}^{(d)}(\mathbf{u}^{(d)}) : \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}^{(d)}) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Gamma^{(d)}} \mathbf{b}^{(d)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(d)} d\Omega - \int_{\Gamma^{(d)}} \bar{\mathbf{t}}^{(d)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(d)} d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma^{(dl)}} \delta \mathbf{u}^{(d)} \cdot \{p(\mathbf{u}^{(d)} - \mathbf{u}^{(l)}) - [[\mathbf{P}]] \mathbf{N}\} d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Gamma^{(dl)}} (\mathbf{u}^{(d)} - \mathbf{u}^{(l)}) \cdot \alpha \mathbf{P}^{(d)}(\delta \mathbf{u}^{(d)}) \mathbf{N} d\Gamma \quad (31)
\end{aligned}$$

となる．同様に，Nitsche 法に基づく汎関数 Π^N の $\mathbf{u}^{(l)}$ についての変分をとると，シェル領域 $\Omega^{(l)}$ での仮想仕事に対応した弱形式

$$\begin{aligned}
G^{(l)}(\mathbf{u}^{(d)}, \mathbf{u}^{(l)}; \delta \mathbf{u}^{(l)}) &= \int_{\Omega^{(l)}} \mathbf{S}^{(l)}(\mathbf{u}^{(l)}) : \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}^{(l)}) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Gamma^{(l)}} \mathbf{b}^{(l)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(l)} d\Omega - \int_{\Gamma^{(l)}} \bar{\mathbf{t}}^{(l)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(l)} d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Gamma^{(dl)}} \delta \mathbf{u}^{(l)} \cdot \{p(\mathbf{u}^{(d)} - \mathbf{u}^{(l)}) - [[\mathbf{P}]] \mathbf{N}\} d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Gamma^{(dl)}} (\mathbf{u}^{(d)} - \mathbf{u}^{(l)}) \cdot (1 - \alpha) \mathbf{P}^{(l)}(\delta \mathbf{u}^{(l)}) \mathbf{N} d\Gamma \quad (32)
\end{aligned}$$

が得られる．ここで， $\delta \mathbf{u}^{(d)}$ ， $\delta \mathbf{u}^{(l)}$ はそれぞれ $\mathbf{u}^{(d)}$ ， $\mathbf{u}^{(l)}$ の変分である．式(31)，(32)の仮想仕事式から導出される節点変位に関する連立方程式の係数行列は，Nitsche パラメータ α が 0.5 の場合を除いて非対称行列となる．

図-3 片持ちはりの数値計算モデル

4. 有限要素近似

本研究では，シェル領域の離散化に Reissner–Mindlin の定式化に基づく退化シェル要素³⁾，ソリッド領域の離散化には六面体 1 次要素を用いる．シェル要素については，退化シェル要素で生じるせん断ロックを回避した MITC4 シェル要素¹⁴⁾を採用する．

5. 数値計算例

本章では数値計算例により，提案するモデル化手法を検証する．ここで，材料構成則としてシェル要素とソリッド要素に対して，St. Venant–Kirchhoff 材料モデルを用いる．ただし，シェル要素については，面外方向に平面応力状態が仮定される．

前節までの定式化において，領域間境界での境界積分に関するメッシュ分割の制約は存在しない．本例題では，接続部分でのシェル要素とソリッド要素の節点の位置および面内方向に対するメッシュ分割数を一致させ，シェル要素のレイヤー数に合わせてソリッド要素の面外方向に対するメッシュ分割数を設定する．

(1) 片持ちはりの曲げ解析

本研究で提案するモデル化手法について，図-3に示す片持ちはりを用いて検証する．ここでは接続部分の力学状態に着目するため，境界条件として奥行き方向 (y 方向) を平面ひずみ状態とする．

図-3において， $l^{(d)}$ ， $l^{(l)}$ はそれぞれ，ソリッド領域，シェル領域の長さを表す．ソリッド要素とシェル要素を接続したモデル ($l^{(d)} = 1$ [mm]， $l^{(l)} = 19$ [mm]) とソリッド要素のみで離散化したモデル ($l^{(d)} = 20$ [mm]， $l^{(l)} = 0$ [mm]) を比較する．モデルの離散化では，x 方向に対してソリッド要素のメッシュ長さを 0.25 [mm]，シェル要素のメッシュ長さを 1 [mm] とし，z 方向に対するソリッド要素の分割数とシェル要素のレイヤー数は 10 とする．

図-4 x 方向垂直応力の分布 (q : 0.004 N)

図-5 面外せん断応力の分布 (q : 0.004 N)

$x = 0$ の面から領域間境界近傍までの Cauchy 応力の分布について、微小変形に対する計算結果を図-4, 5, 有限変形に対する計算結果を図-6, 7 に示す。Nitsche 法に基づく定式化は、Nitsche ポテンシャルによって変位に対する拘束条件が追加されることから、Penalty 係数 p の値を小さく設定できることが特長である。そのため、Penalty 係数 $p = 10^1$ [N/mm³] として Nitsche 法を適用した計算結果、Penalty 係数 $p = 10^2$ [N/mm³] とした Penalty 法のみでの計算結果、六面体要素のみで離散化したモデルの計算結果を比較する。Penalty 係数は剛性を要素代表長さで除した値であり、本例題の領域間境界での要素代表長さが 1 [mm] であることから、Penalty 係

数は接続部分の剛性を意味する。図-4, 5 から、Penalty 法と Nitsche 法 ($\alpha = 0.0$) の計算結果が六面体要素の計算結果と同様であることが確認できる。一方、 $\alpha \neq 0.0$ を適用した Nitsche 法では、領域間境界近傍において不自然な応力状態が生じる。

図-4, 5 に示す計算結果の特徴から、Nitsche 法に基づく接続手法の概要が説明できる。Penalty 法による接続では、領域間境界において変位に対する強い拘束条件が課される。そこで、Penalty 法の安定化項として Nitsche 法を追加することで応力ベクトルの連続性が考慮され、領域間境界での変位に対する拘束条件が緩和される。Nitsche 法においてシェル領域の応力ベクトルを採用す

(a) $\alpha = 0.0, p = 10^1 \text{ N/mm}^3$

(a) $\alpha = 0.0, p = 10^1 \text{ N/mm}^3$

(b) $p = 10^2 \text{ N/mm}^3$

(b) $p = 10^2 \text{ N/mm}^3$

(c) Hexahedral element

(c) Hexahedral element

図-6 x 方向垂直応力の分布 ($q: 0.2 \text{ N}$)

図-7 面外せん断応力の分布 ($q: 0.2 \text{ N}$)

る場合 ($\alpha = 0.0$)，シェル領域の境界を基準として領域間境界の変位に対する拘束条件が課される．このとき，シェル領域の境界はシェル要素の節点の位置ベクトルおよびディレクターベクトルによって定義され，領域間境界に接する六面体要素はシェル要素のディレクターベクトルに沿って変形する．一方，Nitsche 法においてソリッド領域の応力ベクトルを採用する場合 ($\alpha = 1.0$)，ソリッド領域の境界を基準として領域間境界の変位に対する拘束条件が課される．このとき，ソリッド領域の境界は領域間境界に接するソリッド要素の節点の位置ベクトルで定義され，領域間境界でのシェル要素は接続に関与する六面体要素の各節点の位置ベクトルの平均として表現される境界に沿って変形する．そのため， $\alpha \neq 0.0$ を採用した Nitsche 法では，ソリッド領域の境界に属する六面体要素の節点に対する拘束条件が過度に緩和され，境界が一意に定まらない数値的な不安定

図-8 領域間境界における変位の連続性 (片持ちはり, $q: 0.2 \text{ N}$)

性を示す．この特徴は，本例題で扱った 2 次元問題（平面ひずみ問題）のみならず，3 次元問題においても確認されており，Nitsche 法を適用した数値計算における不安定性といえる．したがって，MITC4 シェル要素と六

表-1 先端における変位の比較（片持ちはり， q : 0.2 N）

	x -dir. [mm]	z -dir. [mm]
Nitsche's method	-10.536	-15.957
Penalty method	-11.402	-16.647
Solid	-10.465	-15.931

Geometry: $h_a = 3$ mm $a = 1$ mm $E = 1.0 \times 10^2$ N/mm²
 Material: $h_b = 1$ mm $b = 19$ mm $\nu = 0.3$

図-9 段付きはりの数値計算モデル

面体 1 次要素の接続に Nitsche 法を適用する場合には、 $\alpha = 0.0$ と設定することで安定的な数値計算を実現できる。以降の検証では、 $\alpha = 0.0$ を適用した Nitsche 法の計算結果について考察する。

有限変形に対して、図-6, 7 に示した Penalty 法の計算結果では、領域間境界において変位が適切に接続されていない。ここで、領域間境界におけるギャップベクトルのノルムを比較したものを図-8 に示す。図中の縦軸は領域間境界での面外方向に対する座標、横軸はギャップベクトルのノルムを意味する。図-8 の Penalty 法の計算結果に着目すると、Penalty 係数として大きな値を設定することで、ギャップベクトルのノルムが小さくなる。そのため、上述の変位に対する連続性は、Penalty 係数をより大きな値に設定することで改善できるが、数値計算モデルの一部に大きな剛性を与えることは適切なモデル化とはいえない。それに対して、Nitsche 法の計算結果は Penalty 係数を小さな値に設定した場合でも、変位に対する連続性が十分に満足される。しかしながら、Nitsche 法は Penalty 係数の値によって変位ベクトルおよび応力ベクトルに対する連続性が制御される。したがって、Nitsche 法を適用する際の Penalty 係数は、ヤング率を要素代表長さで除した値に比べて小さく設定することが望ましい。その条件下において、Nitsche 法は有限変形に対して領域間境界が適切に接続され、表-1 のように六面体要素と同様の計算結果が得られる。

(2) 段付きはりの曲げ解析

図-9 に示す段付きはりを用いて、本研究で提案するモデル化手法の適用範囲を検証する。本例題は、シェル

(a) MITC4 shell element

(b) Hexahedral element

図-10 x 方向垂直応力の分布（段付きはり）

(a) MITC4 shell element

(b) Hexahedral element

図-11 面外せん断応力の分布（段付きはり）

表-2 先端における変位の比較（段付きはり）

	x-dir. [mm]	z-dir. [mm]
Nitsche's method	-9.9166	-15.291
Penalty method	-10.726	-15.900
Solid	-9.9140	-15.293

要素によるモデル化では適切な数値解が得られない状況を想定する。

図-9において、 l^d 、 l^l はそれぞれ、ソリッド領域、シェル領域の長さであり、ソリッド要素とシェル要素を接続したモデル（ $l^d = 2$ [mm]、 $l^l = 18$ [mm]）とソリッド要素のみで離散化したモデル（ $l^d = 20$ [mm]、 $l^l = 0$ [mm]）を比較する。モデルの離散化では、 x 方向、 z 方向に対するソリッド要素のメッシュ長さを 0.1 [mm] とし、シェル要素のメッシュ長さを 1 [mm]、レイヤー数を 10 と設定する。

まず、図-9をシェル要素のみで離散化したモデル（ $l^d = 0$ [mm]、 $l^l = 20$ [mm]）、ソリッド要素のみで離散化したモデル（ $l^d = 20$ [mm]、 $l^l = 0$ [mm]）について、モデル全体と固定端から段付き部分近傍までの変形図および Cauchy 応力の分布を図-10、11に示す。図-10、11から、局所的な力学挙動の評価には、ソリッド要素によるモデル化が適切であることが確認できる。また、シェル要素によるモデル化では、図-9での断面全体を完全固定する境界条件を扱うことは困難であり、境界条件として中央面のみが固定される。

次に、ソリッド要素とシェル要素を接続したモデル（ $l^d = 2$ [mm]、 $l^l = 18$ [mm]）での変形図および Cauchy 応力の分布を図-12、13に示す。図-12、13では、Penalty 法の計算結果は六面体要素のみで離散化したモデルの計算結果に近い応力分布が得られるが、ソリッド領域とシェル領域の領域間境界でソリッド要素とシェル要素の境界が一致せず、変位が適切に接続されていない。それに対して、Nitsche 法ではソリッド要素とシェル要素の境界が一致し、六面体要素のみで離散化したモデルの計算結果と同様の応力分布が得られる。また、段付き部分をソリッド領域としてモデル化することで、応力集中が適切に評価できる。したがって、本研究で提案するモデル化手法では、局所的な力学挙動を評価する部分にソリッド要素を適用することで、精度の高い数値計算結果が得られる。この特徴は、表-2に示す計算結果の傾向と一致する。

(3) 平板の曲げ解析

図-14のような平板の曲げ問題を用いて、提案するモデル化手法の妥当性を検証する。図-14に対して、ソリ

(a) $\alpha = 0.0$, $p = 10^1$ N/mm³

(b) $p = 10^2$ N/mm³

図-12 x 方向垂直応力の分布（ $l^d = 2$ mm, $l^l = 18$ mm）

(a) $\alpha = 0.0$, $p = 10^1$ N/mm³

(b) $p = 10^2$ N/mm³

図-13 面外せん断応力の分布（ $l^d = 2$ mm, $l^l = 18$ mm）

図-14 平板の数値計算モデル

ソリッド要素とシェル要素を接続したモデル ($l^{(d)} = 10$ [mm], $l^{(l)} = 10$ [mm]) とソリッド要素のみで離散化したモデル ($l^{(d)} = 20$ [mm], $l^{(l)} = 0$ [mm]) を比較する。モデルの離散化では、 x 方向に対してソリッド要素のメッシュ長さを 0.5 [mm], シェル要素のメッシュ長さを 1 [mm], y 方向に対するメッシュ長さをそれぞれ、 1 [mm] とし、 z 方向に対するソリッド要素の分割数とシェル要素のレイヤー数は 10 とする。

平板の変形図および Cauchy 応力の分布を図-15, 16 に示す。ここでは、Penalty 係数 $p = 10^0$ [N/mm³] として Nitsche 法 ($\alpha = 0.0$) を適用した計算結果、Penalty 係数 $p = 10^2$ [N/mm³] とした Penalty 法のみでの計算結果、六面体要素のみで離散化したモデルの計算結果を比較する。Penalty 係数は剛性を要素代表長さで除した値であり、本例題の領域間境界での要素代表長さは 1 [mm] であるため、Penalty 係数の値を接続部分の剛性とみなせる。図-15, 16 では、Nitsche 法を適用した計算結果および Penalty 法のみでの計算結果において、領域間境界近傍に不自然な応力分布がみられる。これは、曲げ変形と反り変形によって面内方向に複雑な応力状態が生じるためであると考えられる。このような応力状態に対応した接合を実現するには、領域間境界近傍におけるメッシュの解像度などを検討する必要がある。

3次元の力学挙動に対して提案するモデル化手法の有用性を確認するために、平板の先端における中央および隅での変位を表-3, 4にまとめる。Penalty 法の計算結果に比べて、Nitsche 法を適用することで六面体要素と同様の変形状態が得られることが確認できる。このことから、大域的な変形については、図-15, 16での応力状態の相違による影響が小さいといえる。また、本例題で生じる変形は微小であるが、変形量が大きくなり幾何学的非線形性が強くなるにつれて、片持ち梁の曲げ解析に対する検証で示したように、Nitsche 法の適用が有用となる。

(a) $\alpha = 0.0$, $p = 10^0$ N/mm³

(b) $p = 10^2$ N/mm³

(c) Hexahedral element

図-15 x 方向垂直応力の分布 (平板)

表-3 先端 (中央) における変位の比較 (平板)

	x -dir. [mm]	z -dir. [mm]
Nitsche's method	-0.85681	-5.2540
Penalty method	-0.93015	-5.4344
Solid	-0.83172	-5.1926

表-4 先端 (隅) における変位の比較 (平板)

	x -dir. [mm]	z -dir. [mm]
Nitsche's method	-0.84686	-5.2292
Penalty method	-0.91983	-5.4100
Solid	-0.82582	-5.1744

(a) $\alpha = 0.0$, $p = 10^0 \text{ N/mm}^3$

(b) $p = 10^2 \text{ N/mm}^3$

(c) Hexahedral element

図-16 面外せん断応力の分布 (平板)

6. おわりに

本研究では、Penalty 法による変位の連続性と Nitsche 法に基づく応力ベクトルの連続性を考慮することで、シェル要素とソリッド要素を接続するモデル化手法を提案した。本手法は領域分割に基づく定式化において、ソリッド領域とシェル領域に対する全ポテンシャルエネルギー汎関数を定義し、変位に関する連続性として Penalty ポテンシャル、応力ベクトルの連続性を考慮するために Nitsche ポテンシャルを追加することで、領域全体におけるポテンシャルエネルギー汎関数の最小化問題を定義した。数値計算例により、シェル要素とソリッド要素の接続部分近傍において、ソリッド要素の

みでモデル化した場合と同様の応力分布が得られ、変位の連続性のみを考慮する従来の手法では得られない計算結果を示した。本手法の適用範囲として、接続部分の板厚に対する制約は存在しない。ただし、曲げによってせん断変形が卓越する問題では板厚が厚いほど面外せん断変形が顕著となるため、局所的な力学挙動が評価できるようにシェル領域とソリッド領域の大きさを適切に設定する必要がある。今後は、矩形板の角部などの複雑な応力状態が確認される問題に提案手法を適用し、モデル化の妥当性を検証するとともに、適用範囲を拡張していく予定である。

参考文献

- 1) W. Jialin, L. Zhiwen, M. Xing, Z. Jianzheng: A DOF expanding method for connecting solid and shell element, *Commun. Numer. Methods Eng.*, Vol.12, pp.321–330, 1996.
- 2) G. R. Liu, S. S. Quek: *The Finite Element Method: A Practical Course*, 2nd ed., Butterworth-Heinemann, 2013.
- 3) K. J. Bathe: *Finite Element Procedure*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- 4) K. S. Surana: Transition finite elements for three-dimensional stress analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.15, pp.991–1020, 1980.
- 5) D. J. Monaghan, I. W. Doherty, D. M. Court, C. G. Armstrong: Coupling 1D beams to 3D bodies, *7th International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, Dearborn, Michigan, 1998.
- 6) A. Hansbo, P. Hansbo: An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.191, pp.5537–5552, 2002.
- 7) A. Fritz, S. Hübner, B. I. Wohlmuth: A comparison of mortar and Nitsche techniques, *CALCOLO*, Vol.41, pp.115–137, 2004.
- 8) J. D. Sanders, M. A. Puso: An embedded mesh method for treating overlapping finite element meshes, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.91, pp.289–305, 2012.
- 9) J. Nitsche: Über ein variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei verwendung von teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, Vol.36, pp.9–15, 1971.
- 10) D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L. D. Marini: Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.39, pp.1749–1779, 2002.
- 11) J. Mergheim, P. Steinmann: A geometrically nonlinear FE approach for the simulation of strong and weak discontinuities, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.195, pp.5037–5052, 2006.
- 12) P. Wriggers, G. Zavarise: A formulation for frictionless contact problems using a weak form introduced by Nitsche, *Comput. Mech.*, Vol.41, pp.407–420, 2008.
- 13) 山田貴博, 仲田光秀: Nitsche 法に基づくはり要素とソリッド要素の接続手法, *土木学会論文集 A2*, Vol.71, pp.319–326, 2015.
- 14) E. N. Dvorkin, K. J. Bathe: A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis, *Eng. Comput.*, Vol.1, pp.77–88, 1984.

(2017. 6. 23 受付)

Numerical Procedure for Connecting Shell and Solid Elements Based on Nitsche's Method

Takeki YAMAMOTO, Takahiro YAMADA, and Kazumi MATSUI

In the finite element analysis, a structural element is efficient to represent the overall behavior of simulation models. On the other hand, a solid element is used to evaluate local behavior, such as stress concentration for stepped structures. For the purpose of developing a more flexible modeling for the finite element analysis, it is necessary to propose a numerical procedure for connecting shell and solid elements.

In conventional procedures to connect shell and solid elements, a continuity condition for only displacements is imposed at connecting surface. For applying the continuity condition for displacement fields on the interface between shell and solid elements, unreasonable deformation of solid elements near the interface may be observed.

This paper presents a numerical procedure for connecting shell and solid elements by using Nitsche's method, which imposes the continuity conditions for both displacement and stress vectors on the interface. From this approach, shell and solid elements can be connected with reasonable deformation and stress distribution.