1, 2 次元確率変数を含む弾塑性問題および有限変形問題への NISP 確率有限要素法の適用

中川 英則¹

¹ 正会員 博(工) 小山工業高等専門学校准教授 一般科(数学) (〒323-0806 栃木県小山市大字中久喜 771 番地)
E-mail:nakagawa@oyama-ct.ac.jp

本研究では、材料物性に不確定性を含む材料非線形および幾何学的非線形を有する連続体問題を扱う。これまでに、微小変形の範囲ではあるが、NISP 法(Non-Intrusive Spectral Projection Method)と呼ばれるアプローチを接線剛性マトリクスの計算に際して局所的に取り込んだ、NISP 確率有限要素法(NISP-SFEM)を提案している。前著では、ヤング率が確率的に変動する 1 次元確率変数を含む微小変形弾塑性問題に NISP-SFEM を適用し、数値解析を通して有効性を示した。本論文では、ヤング率および降伏応力が独立に正規分布にしたがって確率変動する 2 次元確率変数を含んだ微小変形弾塑性問題、およびヤング率が正規分布にしたがって確率変動する 1 次元確率変数を含んだ有限変形弾塑性問題のそれぞれに対して、拡張した NISP 確率有限要素法を構築し、数値解析を通してその有効性を検討する。

Key Words: Stochastic Finite Element Method, Non-Intrusive Spectral Projection Method

1. はじめに

本研究では、材料特性が正確に分からない物体に対し、そのパラメータの不確かさを確率として表現した確率モデルを効率よく解くための手法として、スペクトル確率有限要素法(SFEM)^{1,2)}を用いた解析を行っている。扱う対象は、非線形固体力学問題である。この場合の非線形性とは、材料非線形性、幾何学的非線形性を含む問題を指している。また、前提条件としては準静的、等方性を仮定している。この条件の下で、ヤング率や降伏応力といった材料物性が確率的に変動する力学問題を扱う。

非線形な問題に対する確率有限要素法の適用において、どのような展開手法を用いても平均値はある程度正確に追うことはできる。しかし、ばらつきを正確に追うことは難しい。特に、材料非線形性問題における降伏曲面への応力のリターンマッピングを例にとると、降伏曲面が確率的に変動することに加えて、弾性予測子や塑性修正子も確率的に変動するため、それらの条件を全て満たす応力を求めることは難しい問題となる。そのために、応力のリターンマッピングに際してばらつきを正確に保てる手法の開発が必要となり、前著³⁾にて微小変形の範囲で NISP (Non-Intrusive Spectral Projection) 法を局所的に導入した、NISP 確率有限要素法(NISP-SFEM)を提案した。具体的には、ヤング率が正規分布にしたがって確率変動す

るような 1 次元確率変数を含んだ平面ひずみ弾塑性問題に対して NISP-SFEM を適用し、モンテカルロ法および Stochastic Collocation 法^{4,5,6)}によって得た確率密度関数と比較することで、手法の妥当性を示した。

本紙では、NISP-SFEM の適用範囲を拡張し、またその有効性を確認するために、以下の 2 つの問題を扱う。1 つ目は、微小変形および平面ひずみ状態の仮定の下で、材料のヤング率および降伏応力が互いに独立な正規分布に基づく確率変数として同時に変動する、2 次元確率変数問題を扱う。もう一つは、平面ひずみ状態の仮定の下での有限変形弾塑性問題として、材料のヤング率が正規分布に基づく確率変数として変動する、1 次元確率変数問題を扱う。前著³⁾で扱った問題と比較すると、確率変数が 1 つ増えた平面ひずみ弾塑性問題、および、確率変数の数は前著³⁾と同じく 1 つであるが幾何学的非線形性が加わった平面ひずみ弾性問題をそれぞれ扱うことになる。

近年に Sett, Jeremić の両氏によって、材料物性が確率的に変動する 1 次元の弾塑性せん断問題に対して、確率微分方程式(Fokker-Planck 方程式)を直接的に解いた論文⁷⁾が発表されている。そこでは、材料に載荷・負荷のせん断変形を与えた場合に、せん断応力の標準偏差(以下 SD と記す)がどのような動き方を示している。Sett, Jeremić の両氏が扱った問題は 1 次元の範囲であり、本研究は平面ひずみ状態での 2 次元の問題ではあるが、

図-1 解析モデル

引張り・圧縮方向に働く応力の SD の変化の傾向については文献と比較ができると考え、1 つ目の問題を設定した次第である。また、将来的には有限変形弾塑性問題を扱う計画があり、その前の段階として有限変形の弾性問題について、total Lagrange 形式（以下 TL 形式）での NISP-SFEM を構築するために 2 つ目の問題を設定している。この点について Acharjee, Zabarar の両氏による研究⁸⁾では、材料定数が確率的に変動する有限変形弾塑性問題をスペクトル確率有限要素法で解いており、TL 形式での取り扱いを通して伝播してゆく確率変動を求めている。本紙では、将来に有限変形弾塑性問題を扱う場合に構成則の関係上の扱い易さから updated Lagrange 形式（以下 UL 形式）での展開を行いたく、UL 形式での NISP-SFEM の構築についても考えてゆく。

2. 2 次元確率変数を含む弾塑性問題に対する NISP-SFEM の概要

(1) 問題設定

図-1 に示す解析モデルの両側面に一様な変位 U を与える平面ひずみ問題を考える。変位 U は、引張り方向、圧縮方向の両方向に対して与え、解析対象として 1/4 領域を取り上げる。有限要素には、 x 軸方向に 6 分割、 y 軸方向に 24 分割の計 144 個のアイソパラメトリック四辺形 1 次要素を用いた。ここで、材料物性としては、Mises の降伏条件および Prandtl-Reuss の構成式を仮定した弾塑性体とする⁹⁾。但し、ヤング率および降伏応力は、互いに独立な正規分布にしたがって確率変動する 2 次元確率変数問題であり、ヤング率の平均値は解析モデル全体で一様とした。これらを式で表すと次のようである。

$$\text{降伏関数: } F(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\omega})) = \frac{1}{3} \left[\bar{\sigma}(\boldsymbol{\omega})^2 - H(\bar{\varepsilon}^p(\boldsymbol{\omega}))^2 \right] \quad (1)$$

$$H(\bar{\varepsilon}^p(\boldsymbol{\omega})) = f_y(\omega_2) \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}^p(\boldsymbol{\omega})}{\varepsilon_y} \right)^n, \quad \begin{cases} n \text{ は硬化則の乗数} \\ n = 0 \text{ で弾完全塑性} \end{cases} \quad (2)$$

$$C_{ijkl}^{ep}(\boldsymbol{\omega}) = G(\omega_1) \left[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl} \right] - \alpha \frac{9G(\omega_1)^2 \sigma'_{ij}(\boldsymbol{\omega}) \sigma'_{kl}(\boldsymbol{\omega})}{(3G(\omega_1) + H'(\boldsymbol{\omega})) \bar{\sigma}(\boldsymbol{\omega})^2}, \quad \begin{cases} \text{弾性 } \alpha = 0 \\ \text{塑性 } \alpha = 1 \end{cases} \quad (3)$$

式(1)~(3)において、 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ は 2 次元確率事象 Ω における要素を表す。ここに、

$$G(\omega_1) = \frac{E(\omega_1)}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

$$E(\omega_1) = \bar{E} \left\{ 1 + \sigma_E \cdot \xi_1(\omega_1) \right\} \quad (-\infty < \xi_1(\omega_1) < \infty) \quad (5)$$

$$f_y(\omega_2) = \bar{f}_y \left\{ 1 + \sigma_y \cdot \xi_2(\omega_2) \right\} \quad (-\infty < \xi_2(\omega_2) < \infty) \quad (6)$$

$\bar{E}$ はヤング率の平均、 $\xi_1(\omega_1)$ は標準正規確率変数、 σ_E はヤング率の変動係数、 ν はポアソン比、 $\bar{\sigma}$ は相当応力、 σ' は偏差応力、 $\bar{\varepsilon}^p$ は相当塑性ひずみをそれぞれ表す。また、 $\bar{f}_y$ は降伏応力の平均、 $\xi_2(\omega_2)$ は標準正規確率変数、 σ_y は降伏応力の変動係数、 $\varepsilon_y = \sigma_y / \bar{E}$ である。これより以下において、変数 ω_1, ω_2 を敢えて強調する必要がない場合には、 $\xi_1(\omega_1)$ 、 $\xi_2(\omega_2)$ を ξ_1, ξ_2 と書き表す。

ここで、ヤング率および降伏応力は互いに独立な正規分布に従って確率変動するが、非線形系であるために得られる変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ などは必ずしも 2 次元の正規分布になるとは限らない。そのため、変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ は互いに独立な標準正規確率変数 $\xi_n(\omega_n)$ ($n=1, 2$) の単純な線形和によって表現することが出来ず、完全直交系 (Homogenous Chaos と呼ぶ) を成す Hermite 多項式汎関数 $\Psi_i(\xi_1, \xi_2)$ を構築する必要が生じる。これによって、Homogenous Chaos に属する任意の確率変数、例えば変位 $u_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ ($i=1, 2$) などは、次のように $\Psi_i(\xi_1, \xi_2)$ の線形和で表現できる^{1), 6)}。ここで、線形和は理論上は無限大までとるが、実際にはある程度の項数で打ち切る。前著³⁾にて詳細を記したが、SFEM における全体剛性マトリクスの行(および列)サイズは、通常の FEM の全体剛性マトリクスの行(および列)サイズにこの項数を掛けた大きさとなるため、計算効率の点から次式のように第 6 項目で打ち切っている。

$$u_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(\mathbf{x}) \Psi_i(\xi_1, \xi_2) \quad (7)$$

$$\doteq \sum_{i=0}^5 u_i(\mathbf{x}) \Psi_i(\xi_1, \xi_2) \quad (i=1, 2)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0(\xi_1, \xi_2) &= 1, \Psi_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1(\omega_1), \Psi_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2(\omega_2) \\ \Psi_3(\xi_1, \xi_2) &= \xi_1(\omega_1)^2 - 1, \Psi_4(\xi_1, \xi_2) = \xi_1(\omega_1)\xi_2(\omega_2), \\ \Psi_5(\xi_1, \xi_2) &= \xi_2(\omega_2)^2 - 1 \end{aligned} \quad (8)$$

この展開を Polynomial Chaos 展開（以下、PC 展開）¹⁾ という。ここで、Hermite 多項式汎関数 $\Psi_i(\xi_1, \xi_2)$ は直交系を成すため、内積 $\langle \cdot \rangle$ に関して、次の関係が成り立つことに注意する。内積は平均値をとることに相当する。

$$\langle \Psi_i \rangle = 0 \quad (i \neq 0) \quad (9)$$

$$\langle \Psi_i \Psi_j \rangle = 0 \quad (i \neq j) \quad (10)$$

(2) non-polynomial 関数の PC 展開

近年では、スペクトル確率有限要素法の計算の際に用いられる PC 展開の四則演算が整備されている¹⁰⁾。しか

し、扱う関数が non-polynomial 関数の場合には、PC 展開の代数的操作（四則演算）は使えず、NISP (Non-Intrusive Stochastic Projection) と呼ばれる手法^{9,11)}を用いることになる。ここで、NISP 法について以下に記載する。

いま、確率変数 $u(\omega)$ が既知の確率変数 $x(\omega)$ の non-polynomial 関数 $f(\omega)$ として表されるとする。ただし、PC 展開については第 6 項目で打ち切っている。すなわち、 $\Psi_i(\xi_1, \xi_2)$ ($i=0, \dots, 5$) の基底関数を用いる。

$$u(\omega) = f(x(\omega)), x(\omega) = \sum_{i=0}^5 x_i \Psi_i(\xi_1, \xi_2) \quad (x_i \text{ は既知}) \quad (11)$$

ここで、 $u(\omega)$ を次のように第 6 項までの PC 展開で表すことを考える。

$$u(\omega) = \sum_{i=0}^5 u_i \Psi_i(\xi_1, \xi_2) \quad (12)$$

式(12)の両辺に $\Psi_m(\xi_1, \xi_2)$ を掛け内積 $\langle \cdot \rangle$ をとると、 $\Psi_k(\xi_1, \xi_2)$ の直交性(式(10))により、次式を得る。

$$\langle u \Psi_m \rangle = \sum_{i=0}^5 u_i \langle \Psi_i \Psi_m \rangle \Rightarrow \langle u \Psi_m \rangle = \sum_{i=0}^5 u_i \langle \Psi_m \Psi_m \rangle \delta_{im} \quad (13)$$

ここに、 δ_{im} はクロネッカーのデルタである。したがって、求めるべき PC 展開の係数 u_i は次式で求められる。

$$u_m = \frac{\langle u \Psi_m \rangle}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \quad (m=0, \dots, 5) \quad (14)$$

最終的に、式(14)に現れる内積(積分で表現される)

$$\langle u \Psi_m \rangle = \int_{\Omega} u(\omega) \Psi_m(\xi_1, \xi_2) dP(\omega) \quad (15)$$

をどう求めるかが NISP 法の鍵となる。NISP 法では、この内積を Gauss Hermite 数値積分(GH 積分)や Gauss Legendre 数値積分(GL 積分)などを用いて求めることになる⁹⁾。

(3) 2次元確率変数を含む問題への NISP-SFEM の適用

確率有限要素法と言っても、確率変数が絡む以外は通常の非線形有限要素法と変わらない。したがって、次のようなマトリクス方程式が成り立つ。

$${}^n \mathbf{K}^{(j)}(\omega) d\mathbf{U}^{(j+1)}(\omega) = {}^n \bar{\mathbf{F}}^{ext} - {}^n \mathbf{F}^{int(j)}(\omega) \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^n \mathbf{K}^{(j)}(\omega) &= \sum_{el} \int_{v_{el}} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) {}^n \mathbf{C}^{ep(j)}(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{B}(\mathbf{x}) dv \\ {}^n \mathbf{F}^{int(j)}(\omega) &= \int_v \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{B}(\mathbf{x}) dv \\ \Delta \mathbf{U}^{(j+1)}(\omega) &= \Delta \mathbf{U}^{(j)}(\omega) + d\mathbf{U}^{(j+1)}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに ${}^n \mathbf{K}^{(j)}$ は、定数である外力の n 回目の増加量が加わった外力項 ${}^n \bar{\mathbf{F}}^{ext}$ に対して、Newton-Raphson 法における j 回目の繰り返し計算で構築された接線剛性マトリクスを表す。また $d\mathbf{U}^{(j+1)}(\omega)$ は、 $j+1$ 回目の繰り返し計算で得られた微小な変位増分量、 ${}^n \mathbf{F}^{int(j)}(\omega)$ は j 回目の繰り返し計算で得られた内力項をそれぞれ表している。応力が確率変数となるため、内力項も確率変数となる。式(16)、(17)に関するこれ以上の詳細については、確率事象の要素を表す ω を除けば通常の非線形有限要素法と変

図-2 NISP-SFEM のアルゴリズム

図-3 確率場のリターンマッピング概念図

わらないため、非線形有限要素法の文献^{9,12,13)}に譲る。ここで、それぞれの項の PC 展開は以下となる。

$$d\mathbf{U}^{(j+1)}(\omega) = \sum_{i=0}^5 d\mathbf{U}_i^{(j+1)} \Psi_i(\xi_1, \xi_2) \quad (18)$$

$${}^n \mathbf{K}^{(j)}(\omega) = \sum_{i=0}^5 {}^n \mathbf{K}_i^{(j)} \Psi_i(\xi_1, \xi_2) \quad (19)$$

$${}^n \mathbf{F}^{int(j)}(\omega) = \sum_{i=0}^5 {}^n \mathbf{F}_i^{int(j)} \Psi_i(\xi_1, \xi_2) \quad (20)$$

これらの 3 式を式(16)に代入することで、次式を得る。

図4 2次元確率変数に対するNISP法を用いた応力積分

$$\sum_{\ell=0}^5 \left(\sum_{i=0}^5 \Psi_i(\xi_1, \xi_2) \Psi_\ell(\xi_1, \xi_2) {}^n \mathbf{K}_i^{(j)} \right) dU_\ell^{(j+1)} \quad (21)$$

$$= {}^n \bar{\mathbf{F}}^{\text{ext}} - \sum_{i=0}^5 {}^n \mathbf{F}_i^{\text{int}(j)} \Psi_i(\xi_1, \xi_2)$$

ここで、式(21)の両辺に $\Psi_k(\xi_1, \xi_2)$ を掛けて内積をとる。Polynomial Chaos の直交性(式(10))を用いると次式を得る。煩雑になるのを避けるために、以下では $\Psi_k(\xi_1, \xi_2)$ の引数を省略して Ψ_k と表す場合もある。

$$\sum_{\ell=0}^5 \left(\sum_{i=0}^5 \langle \Psi_i \Psi_\ell \Psi_k \rangle {}^n \mathbf{K}_i^{(j)} \right) dU_\ell^{(j+1)} = {}^n \bar{\mathbf{F}}^{\text{ext}} \langle \Psi_k \rangle - {}^n \mathbf{F}_i^{\text{int}} \langle \Psi_i \Psi_k \rangle \quad (k=0, \dots, 5) \quad (22)$$

式(22)は確定値として表されたマトリクス方程式である。

ここで問題は、接線剛性マトリクスおよび内力を式(19)、(20)のようにPC展開で表すために、図-2におけるどの位置でどのようにNISP法を用いるかということに帰着される。また、式(17)の第1式で表される接線剛性マトリクスを構築するためには、図-3に示すように確率的に変動する降伏曲面上に、これまた確率的に変動している応力をリターンマップする必要がある。非線形な確率有限要素法において、どのような展開手法を用いても平均値はある程度正確に追うことはできるが、ばらつきを正確に追うことは難しい。例えば、接線剛性マトリクスを構築する際に、応力の平均値回りの摂動展開を用いて近似したとする場合、ある程度の展開項数を取らないと接線剛性マトリクスのばらつきが過少評価されてしまい、その結果、得られる変位などは平均値は正確に追えていてもSDは小さく見積もられてしまうことがある。これを避けるために、NISP法における数値積分については図-2の赤枠に示す位置で、図-4に示すようなばらつきを考慮した応力積分の計算を行う。

図5 確率的にバラつくヤング率 $E(\omega)$ の概念図

まず積分点を1つ選ぶ。理論上は確率の全事象より要素 $(\omega_{1k}, \omega_{2\ell})$ ($1 \leq k, \ell \leq N$) が1つ選ばれ、それに伴い標準正規確率変数 $(\xi_{1k}, \xi_{2\ell})$ のペアが1つ定まることになるが、実際は実数値である積分点 $(\xi_{1k}, \xi_{2\ell})$ の値を正規分布の台から選べばよい(図-4)。正規分布の台は、 $\xi_{1k}, \xi_{2\ell}$ の絶対値が大きい値についてはそれが生じる確率は指数関数的に減少するため、台は実質的には $-4.8 \leq \xi_{1k} \leq +4.8$ および $-4.8 \leq \xi_{2\ell} \leq +4.8$ の範囲で打ち切る。この打ち切り範囲については、前著³⁾と同様にこれ以上上げて数値積分の値が変化しないことを確認している。ここで、実数値 $(\xi_{1k}, \xi_{2\ell})$ が1つ決まれば、それに伴って式(18)で表される微小変位増分の Polynomial Chaos の値は実数値として定まり、ヤング率および降伏応力も実数値として1つ定まる。また、increment n の段階で収束値として得られている応力やひずみもPC展開で表されているため、実数値として deterministic に決まる。それらの値をもとに、図-2の赤枠の段階において、通常非線形有限要素法の陰解法の手続きによって応力積分⁹⁾を行い、次のステップにおける応力、ひずみ、接線剛性マトリクスといった量が実数値として1つ定まる。これを全ての積分点について実行し、最後に数値積分として足し合わせる。

正規分布の台から選んだ値によっては、降伏しない場合や除荷する場合も生じることが想定される。NISPSFEMでは、正規分布の台から選んだこれら全ての値について、強制的に全てを降伏点として扱うことはしていない。降伏する場合、除荷する場合など、全ての場合を含んだ形で確率に関する数値積分として足し込んでおり、最終的にこの一連の操作を全ての要素におけるガウス点で行うことで、例えば次式のように内積値が決まる。

$$\langle {}^n \mathbf{K}^{(j+1)}(\omega) \Psi_m(\omega) \rangle = \iint_{\Omega} {}^n \mathbf{K}^{(j+1)}(\omega) \Psi_m(\omega) dP(\omega) \quad (23)$$

$$= {}^n \mathbf{K}^{(j+1)}(\xi_{1k}, \xi_{2\ell}) \Psi_m(\xi_{1k}, \xi_{2\ell}) w_{1k} w_{2\ell} \quad (1 \leq k, \ell \leq N)$$

ここに $w_{1k}, w_{2\ell}$ は、数値積分における重みを表す。したがって、接線剛性マトリクスをPC展開で表したときの各項の係数 ${}^n \mathbf{K}_m^{(j+1)}$ ($m=0, \dots, 5$) が次式より最終的に実

図-6 積分選点数 $N \times N$ と応力 σ_{zz} の SD との関係
横軸: $1/(N \times N)$, 縦軸: SD(MPa)
上:変位 $U = 0.002$ (m)時, 下:変位 $U = 0.004$ (m)時

数値として求まる.

$${}^n \mathbf{K}_m^{(j+1)} = \frac{\langle {}^n \mathbf{K}^{(j+1)}(\omega) \Psi_m(\omega) \rangle}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \quad (m=0, \dots, 5) \quad (24)$$

以上より, 接線剛性マトリクス ${}^n \mathbf{K}^{(j)}(\omega)$ は式(19)の形に PC 展開される. 内力項の式(20)についても, 同様にして PC 展開を行うことになる. ここで, NISP 法に基づく接線剛性行列や内力項の PC 展開では, 全体アルゴリズムにおける応力積分の箇所(図-2 の赤枠)のみで行っており, 最も計算負荷が掛かるステップである全体剛性マトリクスをここでは解いている訳ではないことを強調する.

式(17), (23)を見ると, NISP-SFEM の特徴として物理領域 v_{el} に関する積分の外側から Homogenous Chaos の基底 $\Psi_k(\xi_1, \xi_2)$ を掛けて内積をとっていることが挙げられる. これまでの手法では, 式(17) の第 1 式における v_{el} の積分において, 式(3)の右辺に現れる各確率変数を個別に PC 展開し, その後に PC 展開の四則演算を多用することで $\mathbf{C}^p$ を PC 展開で表し, 最終的に物理領域 v_{el} での積分を行っていた. 本研究でも, この従来の方法に基づき例えば接線剛性マトリクスの PC 展開を行うことは可能であるが, 敢えて物理領域 v_{el} についての積分の外側から基底 $\Psi_k(\xi_1, \xi_2)$ を掛けて内積をとっている. その理由は, 式(3)の右辺に現れる各確率変数を個別に PC 展開する場合であっても, そこには式(2)や相当応力, 相当塑性ひずみなど多数の non-polynomial 関数が関係しており,

図-7 応力 σ_{zz} 平均-変位 U 曲線 (SD を追加)
横軸:変位 U (m), 縦軸:応力 σ_{zz} (MPa)

図-8 応力の変動係数の変化 (横軸:変位 U (m), 縦軸: SD (MPa) / 終局応力の平均 (577.3 MPa) $\times 100$ (%))

いずれにせよこの段階で NISP 法を多用した場合, 精度の低下が懸念されるためである.

しかしながら, 文献⁹⁾によると NISP 法の使い方については, 各確率変数毎に部分的に NISP 法を適用するやり方に留めることが記されている. この点については, 前著³⁾において, 1次元確率変数を含む弾塑性問題に関して, 上述の外側から基底を掛けるやり方で精度よく確率密度関数が得られている. しかし, 2次元確率変数を含む問題について適用できるかについては分からない. 変位や応力の平均値や SD がこの手法で正しく計算できるかは, 次章に示す数値解析を通じて検討する.

3. 平面ひずみ状態における2次元確率変数を含む弾塑性問題の数値解析

(1) 解析モデルの設定

式 (1)~(6) において, パラメータを次のように設定した.

$$\bar{E} = 200 \text{ GPa}, \varepsilon_y = \bar{f} / \bar{E} = 1 / 400, n = 0 \text{ (弾完全塑性)}$$

$$\nu = 0.333, \sigma_E = 0.2 (= 20\%), \sigma_y = 0.1 (= 10\%)$$

ヤング率の変動係数 σ_E については 20% のばらつきを, 降伏応力の変動係数 σ_y については 10% のばらつきをそれぞれ込めている. 前著³⁾ では, ヤング率は部材内の位置ごとに相関を持って変化する確率変数としたが, 今回

図-9 応力 σ_{zz} の確率密度関数の比較（赤 NISP-SFEM, 黄 MC, 青 collocation100, 緑 collocation500）
横軸: 応力 σ_{zz} (MPa), 縦軸: 確率密度

の設定ではヤング率および降伏応力は式(5)および式(6)に基づいて変化するため、部材全体で均質である。図-5に、ヤング率が確率的にバラつく様子を例として示した。但し、図-5は分かり易さを考慮して離散的に表した概念図であり、実際には連続な2次の確率過程である。以上の設定は、Sett, Jeremićの両氏による文献⁷⁾の結果と比較するために、意図的に設定したものである。

(2) 数値解析

a) 内積(積分)計算に用いる選点数の設定について

式(23)で表される内積(積分)計算では2次元の数値積分として通常のGL数値積分を用いている。この点については、例えば Gauss Patterson 積分といった重なりを持つ積分点を有する数値積分法に Smolyak sparse grids を適用することで積分計算の負担を軽減することができる⁴⁾⁵⁾⁶⁾。この手法のプログラムへの組み込みについては、今後の課題とする。

ここで、2次元の確率に関する数値積分を行うに当たり、解が収束するために必要な選点数 N を考える。図-6は、引張り変位 U が0.002 (m)(弾性状態)および0.004 (m)(終局状態)に達したときの、図-1の赤印位置 (x, z)

$= (0.11\text{m}, 0.89\text{m})$ における応力 σ_{zz} のSDを示したものである。

図-6の横軸は、選点数 N を10, 11, 12, 13, 15, 18, 20, 25, 30, 35, 40, 50と変えたときの $1/(N \times N)$ の値、縦軸は応力 σ_{zz} のSDである。選点数 N が18もしくは20くらいでSDが一定値に収束していることが分かる。そのために、以下のNISP法による応力積分では積分の選点数を $N \times N = 18 \times 18$ と設定し解析を行った。

b) 载荷除荷サイクルにおける応力 σ_{zz} の変化

载荷除荷サイクルの応力 σ_{zz} -変位 U 曲線において、応力 σ_{zz} の平均値にSDの値を足したものが図-7である。更に、図-7における σ_{zz} のSD(MPa)を終局応力の平均値(577.3 (MPa))で除することで変動係数(%)として表したものが図-8である。

近年に、材料物性が確率的に変動する1次元の弾塑性せん断問題に対して、確率微分方程式(Fokker-Planck方程

図-10 基準配置 V と現在配置 v

式)を直接的に解いた論文⁷⁾がSett, Jeremićの両氏により発表されている。そこでは、材料に载荷・負荷のせん断変形を与えた場合に、せん断応力のSDがどのような動き方をするかが示されている。Sett, Jeremićの両氏が扱った問題は1次元問題の範囲であり、本研究は2次元問題(平面ひずみ状態)での単純引張り・圧縮問題ではあるが、応力 σ_{zz} のSDの変化傾向については参考となるため図-8と比較したところ、SDの動き方の傾向が一致していることが分かった。

すなわち、初めは弾性域でヤング率の不確定性に依存してSDは増加してゆき、次に降伏し始めると不確定性が降伏応力のばらつきに移行してSDは10%まで減少する。やがて除荷に移るとヤング率の不確定性に降伏応力の不確定性が足されてSDは10% + 20% 近くまで増加してゆく。それ以降はこのサイクルを繰り返す。

この結果と前著³⁾での結果を踏まえると、微小変形の範囲における弾塑性問題については、2次元確率変数を含む問題であってもNISP-SFEMの手法は応力の平均はもとより、SDの変化もしっかりと捉えていることが確認できた。

c) 応力 σ_{zz} の確率密度関数の比較

図-1の赤印位置における応力 σ_{zz} の確率密度関数を、幾つかの解析手法により求めた結果を図-9に載せる。ここでの赤破線は $N \times N = 18 \times 18$ の選点数を用いて計算したNISP-SFEMの結果、黄破線は (ξ_1, ξ_2) の組合せとして3000個のデータを用いて計算したモンテカルロ法(MC)の結果、青破線は (ξ_1, ξ_2) の組合せとして100個のデータを用いて計算したstochastic collocation法の結果、緑破線は (ξ_1, ξ_2) の組合せとして500個のデータを用いて計算したstochastic collocation法の結果をそれぞれ表している。stochastic collocation法の詳細は文献³⁾⁴⁾⁵⁾⁶⁾に譲る。

ここで赤、青、緑を比較すると、stochastic collocation法についてはサンプリングデータを増やすことで、赤(NISP-SFEM)の結果(ピーク値0.0067)に近づいていることが分かる。また、MC(黄)は3000回行っているが、ピーク値は0.0062で、赤のピーク値0.0067と完全に一致とはならなかった。この原因について、MCの回数を更に増やすことでより近づくか、など今後の検討課題とする。

4. 1次元確率変数を含む有限変形弾性問題に対する NISP-SFEM の概要

本章では、幾何学的非線形性を考慮した平面ひずみ弾性問題において、ヤング率が正規分布にしたがって確率変動する 1 次元確率変数問題を扱う。確率変数であるヤング率は、式(5)で表されるものとする。ここで、1 変数 $\xi(\omega)$ に関して 4 次の Homogenous Chaos に対する Hermite PC 展開は次のようになる。

$$\begin{aligned}\Psi_0[\xi] &= 1, \Psi_1[\xi] = \xi, \Psi_2[\xi] = \xi^2 - 1, \\ \Psi_3[\xi] &= \xi^3 - 3\xi, \Psi_4[\xi] = \xi^4 - 6\xi^2 + 3\end{aligned}\quad (25)$$

有限変形問題へのスペクトル確率有限要素法の適用については、Acharjee, Zabaras の両氏による研究⁹⁾にて既に行われており、そこでは有限変形ともあって座標自体が確率的に変動するため、Total Lagrange 形式(以下、TL 形式と記載)での取り扱いを通して確率変動が求められている。そこで、以下では先ず TL 形式での NISP-SFEM を構築する。

(1) Total Lagrange 形式での NISP-SFEM の概要

図-10 に示すように、連続体が時刻 $t = 0$ において占める体積を基準配置 V 、時刻 t において占める体積を現在配置 v で表す。時刻 0 の初期配置を基準とする時刻 t' での仮想仕事式は次式となる⁹⁾。なお、確率変数については、強調するため赤字で記している。

$$\begin{aligned}\left\{ \int_V \dot{\mathbf{S}} : \delta_0^t \mathbf{E} dV + \int_V \mathbf{S} : (\delta_0^t \mathbf{E}) dV \right\} \Delta t \\ = {}^{t'}\delta R - \int_V \mathbf{S} : \delta_0^t \mathbf{E} dV\end{aligned}\quad (26)$$

ここに、 ${}^{t'}\delta R$ は外力の仮想仕事である。式(26)において、 $\mathbf{S}$ は第 2 Piola-Kirchhoff 応力、 $\mathbf{E}$ は Green-Lagrange ひずみをそれぞれ表し^{9), 14), 15)}、左肩記号は現時刻、左下記号は参照時刻をそれぞれ表すものとする。左下記号がない場合は、現時刻と参照時刻が同じであることを意味する⁹⁾。確率変数が絡む以外は通常の幾何学的非線形有限要素法と変わらないため、以下の式を得るまでの過程など詳細については文献^{9), 12), 13), 16)}を参照頂きたい。式(26)を離散化すると次式を得る。

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{U}(\omega)^T \left({}^t_0 \mathbf{K}_L(\omega) + {}^t_0 \mathbf{K}_{NL}(\omega) \right) \dot{\mathbf{U}}(\omega) \Delta t \\ = \delta \mathbf{U}(\omega)^T {}^t_0 \mathbf{F} - \delta \mathbf{U}(\omega)^T {}^t_0 \mathbf{Q}(\omega)\end{aligned}\quad (27)$$

$${}^t_0 \mathbf{K}_L(\omega) = \sum_e \int_{V_e} {}^t_0 \mathbf{B}_L^T {}^t_0 \mathbf{D} {}^t_0 \mathbf{B}_L dV_e \quad (28)$$

$${}^t_0 \mathbf{K}_{NL}(\omega) = \sum_e \int_{V_e} {}^t_0 \mathbf{B}_{NL}^T {}^t_0 \mathbf{S} {}^t_0 \mathbf{B}_{NL} dV_e \quad (29)$$

$${}^t_0 \mathbf{Q}(\omega) = \sum_e \int_{V_e} {}^t_0 \mathbf{B}_L^T {}^t_0 \mathbf{S} dV_e \quad (30)$$

ここに、 ${}^t_0 \mathbf{K}_L$ は初期変位マトリクス、 ${}^t_0 \mathbf{K}_{NL}$ は初期応力マトリクスである⁹⁾。

ここで例えば、式(28)について PC 展開を行うため、物理領域 v_{el} に関する積分の外側から Homogenous Chaos の基底 $\Psi_k(\xi_1, \xi_2)$ を掛けて内積をとる。

$$\begin{aligned}\left\langle {}^t_0 \mathbf{K}_L(\omega) \Psi_m(\omega) \right\rangle \\ = \int_{\Omega} \left\{ \sum_e \int_{V_e} {}^t_0 \mathbf{B}_L^T {}^t_0 \mathbf{D} {}^t_0 \mathbf{B}_L \Psi_m(\omega) dV_e \right\} dP(\omega)\end{aligned}\quad (31)$$

$$\begin{aligned}= \sum_e \int_{V_e} \left\{ \int_{\Omega} {}^t_0 \mathbf{B}_L^T {}^t_0 \mathbf{D} {}^t_0 \mathbf{B}_L \Psi_m(\omega) dP(\omega) \right\} dV_e \\ {}^t_0 \mathbf{K}_{L_m} = \frac{\left\langle {}^t_0 \mathbf{K}_L(\omega) \Psi_m(\omega) \right\rangle}{\left\langle \Psi_m^2 \right\rangle} \quad (m=0, \dots, 4)\end{aligned}\quad (32)$$

$${}^t_0 \mathbf{K}_L(\omega) = \sum_{i=0}^4 {}^t_0 \mathbf{K}_{L_m} \Psi_m(\xi_1) \quad (33)$$

ここで、初期変位マトリクス ${}^t_0 \mathbf{K}_L$ については、そのステップまでの累積変位が確率変数として関係する。本研究では、これら累積変位については PC 展開の 0 次の項まで、すなわち平均の項のみで表している。また、初期応力マトリクス ${}^t_0 \mathbf{K}_{NL}$ については、第 2 Piola-Kirchhoff 応力が関係しており、その値を導出するに当たってひずみの項は第 5 項、すなわち Ψ_4 の項までをとっている。

(2) Updated Lagrange 形式での NISP-SFEM の概要

図-10 に示すように、連続体が時刻 t の初期配置を基準とする時刻 t' での仮想仕事式は次式となる⁹⁾。なお、確率変数については、強調するため赤字で記している。

$$\begin{aligned}\left\{ \int_{v_v} {}^t \dot{\mathbf{S}} : \delta {}^t \mathbf{E} d^t v + \int_{v_v} {}^t \mathbf{T} : (\delta {}^t \mathbf{E}) d^t v \right\} \Delta t \\ = {}^{t'}\delta R - \int_{v_v} {}^t \mathbf{T} : \delta {}^t \mathbf{E} d^t v\end{aligned}\quad (34)$$

ここに、 ${}^t \dot{\mathbf{S}}$ は Truesdell の応力速度、 $\mathbf{T}$ は Cauchy 応力、 $\mathbf{E}$ は Green-Lagrange ひずみをそれぞれ表す^{9), 14), 15)}。式(34)を離散化すると次式となる。

$$\delta \mathbf{U}^T \left({}^t \mathbf{K}_L + {}^t \mathbf{K}_{NL} \right) \dot{\mathbf{U}} \Delta t = \delta \mathbf{U}^T {}^t \mathbf{F} - \delta \mathbf{U}^T {}^t \mathbf{Q} \quad (35)$$

$${}^t \mathbf{K}_L(\omega) = \sum_e \int_{v_{v_e}} {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{D} {}^t \mathbf{B}_L d^t v_e \quad (36)$$

$${}^t \mathbf{K}_{NL}(\omega) = \sum_e \int_{v_{v_e}} {}^t \mathbf{B}_{NL}^T {}^t \mathbf{T} {}^t \mathbf{B}_{NL} d^t v_e \quad (37)$$

$${}^t \mathbf{Q}(\omega) = \sum_e \int_{v_{v_e}} {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{T} d^t v_e \quad (38)$$

上式について PC 展開を行うため物理領域 v_{el} に関する積分の外側から Homogenous Chaos の基底 $\Psi_k(\xi_1, \xi_2)$ を掛けて内積をとる。式(36)を例にとると、以下となる。

$$\begin{aligned}\left\langle {}^t \mathbf{K}_L(\omega) \Psi_m(\omega) \right\rangle = \\ \int_{\Omega} \left\{ \sum_e \int_{v_{v_e}} {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{D} {}^t \mathbf{B}_L d^t v_e \right\} dP(\omega)\end{aligned}\quad (39)$$

Updated Lagrange 形式(以下、UL 形式と記載)では TL 形式のように、有限要素の節点は別として 1 つの物質点に着目してその確率過程を追いかけている訳ではない。時刻 t と伴に物理領域 v_{el} 自体が確率変数として変化するため、UL 形式での NISP-SFEM では変位の平均値をとることで確率変数 v_{el} に関する積分を平均値回りで展開している。また、微小な時間 Δt 以内の確率変数の変化は、被積分関数が連続であるとして平均値からの変動は小さいものとして考慮しないことにする。したがって、式(39)の確率に関する積分は、 v_{el} に関する積分の内側に移すことができ、次式を得る。

図-11 図-1の赤印における応力 σ_{xx} の確率密度関数の比較
横軸: 応力 σ_{xx} (MPa), 縦軸: 確率密度

$$\begin{aligned} & \langle {}^t\mathbf{K}_L(\omega)\Psi_m(\omega) \rangle \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_e \int_{v_e} {}^t\mathbf{B}_L^T {}^t\mathbf{D} {}^t\mathbf{B}_L \Psi_m(\omega) d\langle {}^tv_e \rangle \right\} dP(\omega) \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_e \int_{v_e} \left\{ \int_{\Omega} {}^t\mathbf{B}_L^T {}^t\mathbf{D} {}^t\mathbf{B}_L \Psi_m(\omega) dP(\omega) \right\} d\langle {}^tv_e \rangle \\ & {}^t\mathbf{K}_{Lm} = \frac{\langle {}^t\mathbf{K}_L(\omega)\Psi_m(\omega) \rangle}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \quad (m=0, \dots, 4) \quad (41) \end{aligned}$$

$${}^t\mathbf{K}_L(\omega) = \sum_{i=0}^4 {}^t\mathbf{K}_{Lm} \Psi_m(\xi_1) \quad (42)$$

式(37), (38)についても同様にして, NISP法を用いてPC展開を行う。UL形式のNISP-SFEMの構築について, このような取り扱いをしても果たして変位や応力などの平均値やSDが正しく計算できるかについては, 次章に示す数値解析を通じて検討しておく。

5. 平面ひずみ状態における1次元確率変数を含む有限変形弾性問題の数値解析

(1) 解析モデルの設定

式(3)~(5)において, パラメータを次のように設定した。

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \bar{E} = 200 \text{ GPa}, \nu = 0.333, \\ \sigma_E &= 0.1 (=10\%) \text{ or } 0.2 (=20\%) \end{aligned}$$

ヤング率のみが正規分布に従って, 変動係数 σ_E がそれぞれ10%および20%で確率変動する弾性体($\alpha=0$)を扱う。なお, 以下で用いる弾性係数テンソルは初期配置を参照して構築されたものであると仮定する。

(2) 数値解析

有限変形の弾性問題について, TL形式でのNISP-SFEMおよびUL形式でのNISP-SFEMの2種類を4章で構築したが, 本節では数値解析を通して両者の比較を行う。

a) 応力 σ_{xx} の確率密度関数について

ヤング率の変動係数 σ_E が10%および20%のそれぞれの場合について, 変位 $U=0.1$ (m)時点での図-1の赤印位置における応力 σ_{xx} の確率密度関数を図-11に示す。TL形式でのNISP-SFEMを用いた場合の結果を図-11に示す。

図-12 解析モデルの端部に働く内力(MN)と公称ひずみ U/L
横軸: 公称ひずみ $U/L \times 100$ (%), 縦軸: 内力(MN)

赤い曲線は σ_E が10%の場合, 青い曲線は σ_E が20%の場合をそれぞれ示しており, 双方とも平均値の26400(MPa)を中心として応力 σ_{xx} のSDがそれぞれ2635(MPa) $\Rightarrow$ 変動係数10%, 5268(MPa) $\Rightarrow$ 変動係数20%となる結果を得た。これより, 2次元有限変形弾性問題についても, σ_{xx} のSDの変化を捉えていることを確認した。

b) 解析モデルの端部に働く内力 - 公称ひずみの比較

TL形式, UL形式のNISP-SFEMについて, 応力の平均, SDについてそのままでは比較ができないため, 解析モデル(図-1)の端部(赤い線)に働く内力(MN)について, 横軸を公称ひずみ U/L にとりグラフにしたものが図-12である。図-12では, 内力の平均値に各時刻毎に得られたSDを加えている。また, 比較のために, 微小変形理論で得られた平均値も加えている。

図-12をみると, TL形式, UL形式のNISP-SFEMを用いた結果について, 内力の平均値およびSDが完全に一致していることが分かる。UL形式では, 物理領域 v_{el} における積分に際して, TL形式のように常に同じガウス点を追っている訳ではない。そのため, 確率変数である応力などについては, 同じ物質点の状態量ではなく時刻 t における空間座標 $\mathbf{x}$ での確率変数としての状態量を追っていることになる。このため, 以下に記す構成則の変換^{9), 13), 14), 15)}はもとより, 平均値およびSDがその都度正しく追えていないと, UL形式で得られた内力はTL形式とは違った値になると考えられる。

TL形式における構成式は5章の第1節で記した設定とし, UL形式については下記のように構成式に変形勾配テンソル ${}_0^tF_{ij}(\omega)$ を掛けることで等価な変換を行っている。TL形式, UL形式の弾性係数テンソルをそれぞれ ${}_0^tC_{ijkl}$, ${}_0^tC_{pqrs}$ とすると, 構成則の変換は以下となる。

$${}_0^tC_{ijkl}(\omega) = \frac{1}{J(\omega)} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & {}_0^tF_{ip}(\omega) {}_0^tF_{jq}(\omega) {}_0^tF_{kr}(\omega) {}_0^tF_{ls}(\omega) {}_0^tC_{pqrs}(\omega) \\ & {}_0^tF_{ip}(\omega) = \frac{\partial^i x_i(\omega)}{\partial X_p} \quad (44) \end{aligned}$$

$$J(\omega) = \left[\frac{\partial x_i(\omega)}{\partial r_j} \right] \quad (45)$$

ここに、 r_j は自然座標 ($-1 \leq r_j \leq 1$) である。

将来に有限変形弾塑性問題に対する NISP-SFEM を UL 形式で構築したい理由としては、用いたい弾塑性の構成則⁹⁾が時刻 t の現配置を参照して構築されていることによる。そのため、NISP-SFEM を TL 形式で構築した場合には、確率変数である弾塑性の構成則に、これまた確率変数である変形勾配テンソルが 4 回も掛かることになり、その過程で PC 展開の精度が低下することが考えられる。今回、幾何学的非線形性を有する弾性問題を扱った理由がここにある。すなわち、TL 形式、UL 形式の NISP-SFEM を構築するに当たり、両者の等価性を持たせるために式(43)のような変換を行っているが、変形勾配テンソルが 4 回掛かることでの PC 展開の精度が保たれるかどうかを調べるためでもある。ただ、今回はヤング率を式(5)のような確率変数としたため部材全体では均質となっており、応答にさほど変化が生じていないことが懸念される。この点については、前著³⁾のように部材の位置ごとにも相関性を持って変化するヤング率を用いて解析を行うなど、UL 形式での NISP-SFEM については更に調べてゆく必要があり今後の課題としたい。

6. 結論

本研究で得られた知見および今後の課題を以下に記す。

- (1) 微小変形の仮定の範囲において、材料のヤング率および降伏応力が互いに独立な確率変数として同時に変動する 2 次元確率変数問題を扱った。前著³⁾の結果も踏まえて、NISP-SFEM の手法は平均値はもちろんのこと、SD も正しく捉えていることが確認された。特に、確率微分方程式(Fokker-Planck 方程式)を直接的に解いた Sett, Jeremić の文献⁷⁾における応力の SD の遷り変り方と比較して、その傾向が一致する結果を得た。

但し、解析モデルの端部に一様な変位 U を与える平面ひずみ問題に限定して扱っており、応答としてさほど複雑な変化が生じないことが懸念される。その意味で、今回の結果は限定的であり、更に複雑な挙動を示す解析モデルで、平均値や SD を正しく捉えているかを確認する必要がある。

- (2) 有限変形弾性問題について、材料のヤング率が確率変数として変動する 1 次元確率変数問題を扱った。TL 形式での NISP-SFEM を構築した他に、UL 形式での NISP-SFEM のプロトタイプを構築した。

ヤング率の変動係数 σ_E が 10%, 20% のそれぞれの場合について、応力 σ_{xx} の確率密度関数を TL 形式での NISP-SFEM にて求めており、2 次元有限変形弾

性問題についても SD の変化をしっかりと捉えていることが確認できた。

また、TL 形式、UL 形式の NISP-SFEM について、応力の平均、SD についてそのままでは比較ができないため、モデルの端部に働く内力について平均値および各時刻毎に得た SD を比較し、良好な一致を得た。UL 形式では TL 形式のように常に同じガウス点を追っている訳ではなく、時刻 t における空間座標 $\mathbf{x}$ での確率変数としての状態量を追っていることになる。このため、構成則の変換はもとより、平均値および SD がその都度正しく追えないと、UL 形式で得られた内力は TL 形式とは違った値になると考えられ、現時点で得ている結果から UL 形式での NISP-SFEM が構築できていると判断している。但し、確率変数であるヤング率を部材全体で均質としている点や一様な変位 U を与える平面ひずみ問題に限定して扱っている点など、応答にさほど変化が生じないことも懸念されるため、今後は更に複雑な挙動を示す解析モデルで、確率挙動を確認する必要がある。

謝辞：本研究は JSPS 科研費 JP16K14300 (研究代表者 中川英則) の助成を受けたものです。関係各位にお礼申し上げます。

参考文献

- 1) Ghanem, R.G. and Spanos, P.D. : Stochastic Finite Elements, A Spectral Approach, Springer, 1991.
- 2) Hori, M.: Introduction to Computational Earthquake Engineering, 2nd Edition, Imperial College Press, 2011.
- 3) 中川英則：接線剛性行列の構築に NISP アプローチを用いた非線形スペクトル確率有限要素法の基礎的研究, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.72, No.2 (応用力学論文集 Vol.19), I_167-I_177, 2016.
- 4) Eldred, M.S. and Burkardt, J. : Comparison of Non-Intrusive Polynomial Chaos and Stochastic Collocation Methods for Uncertainty Quantification, *Proceedings of 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, 2009.
- 5) Xiu, D. : Numerical Methods for Stochastic Computations, A Spectral Methods Approach, Princeton Univ.Press, 2010.
- 6) Le Maître, O.P. and Knio, O.M. : Spectral Methods for Uncertainty Quantification, With Applications to Computational Fluid Dynamics, Springer, 2010.
- 7) Sett, K. and Jeremić, B. : Probabilistic yielding and cyclic behavior of geomaterials, *Int.J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 34, pp.1541-1559, 2010.
- 8) Acharjee, S. and Zabaras, N. : Uncertainty propagation in finite deformations, A spectral stochastic Lagrangian approach, *Comput. Method. Appl. Mech. Engrg.*, pp.2289-2312, 2006.
- 9) 久田俊明, 野口裕久: 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1996.

- 10) Debusschere, B. and Najm, H. and Pebay, P. and Knio, O. and Ghanem, R. and Le Maître, O. : Numerical challenges in the use of polynomial chaos representations for stochastic processes, *SIAM J. Sci. Comput.*, 26, pp.134-153, 2004.
- 11) Ghanem, R. and Red-Horse, J. and Sarkar, A. : Modal properties of a spaceframe with localized system uncertainties, in *8th ASCE Specialty Conference of Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*, ASCE., 2000.
- 12) de Souza Neto, E. A. and Perić, D. and Owen, D. R. J. (寺田賢二郎 監訳) : 非線形有限要素法 - 弾塑性解析の理論と実践 -, 森北出版, 2012.
- 13) 渡邊浩志 : 非線形有限要素法特論 東京大学大学院工学系研究科 機械工学専攻 講義資料2012, (閲覧日2015年10月) <http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2012/>
- 14) 京谷孝史, 非線形 CAE 協会(編) : よくわかる連続体力学ノート, 森北出版, 2008.
- 15) 石井建樹, 只野裕一, 加藤準治, 車谷麻緒 : 例題で学ぶ連続体力学, 森北出版, 2016.
- 16) Bonet, J. and Wood, R.D. : Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis 2nd Edition, Cambridge Univ. Press, 2008.

(2017. 6. 23 受付)

APPLICATION OF NISP STOCHASTIC FINITE ELEMENT METHOD TO ELASTO-PLASTIC OR FINITE DEFORMATION PROBLEMS INCLUDING ONE OR TWO DIMENSIONAL RANDOM VARIABLES

Hidenori NAKAGAWA

In this research, we deal with nonlinear continuum mechanics including uncertainty in material properties. Here, nonlinearity means material nonlinearity and geometrical nonlinearity. The author proposed NISP-Stochastic Finite Element Method (NISP-SFEM) that uses the approach called NISP(Non-Intrusive Stochastic Projection) method locally when calculating the tangent stiffness matrix, and we have shown the effectiveness of this method through numerical analysis. In that numerical analysis, a one-dimensional random variable problem such that Young's modulus changes stochastically according to a normal distribution has been dealt with. In this paper, we first deal with two-dimensional random variable problems such that the Young's modulus and the yield stress simultaneously change as independent random variables under the assumption of small strain theory. And next, we deal with the finite deformation elasticity problem including one-dimensional random variable such that the Young's modulus varies according to normal distribution. For this purpose, NISP-SFEM is extended to verify its effectiveness through these numerical analyses.