板状デバイスの非線形マルチスケール解析に 対する数値平板試験

佐藤 維美¹・村松 眞由²・松原 成志朗³・西 紳之介⁴・寺田 賢二郎⁵・
八代 圭司⁶・川田 達也⁷

¹ 東北大学 災害科学国際研究所 (〒980-0845 宮城県仙台市青葉区荒巻字 468-1)
E-mail: satom@irides.tohoku.ac.jp

² 東北大学大学院 環境科学研究科 (〒980-0845 宮城県仙台市青葉区荒巻字 468-1)
E-mail: muramatsu@ee.mech.tohoku.ac.jp

³ 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒980-0845 宮城県仙台市青葉区荒巻字 468-1)
E-mail: seishiro.matsubara.t4@dc.tohoku.ac.jp

⁴ 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒980-0845 宮城県仙台市青葉区荒巻字 468-1)
E-mail: shinnosuke.nishi.p5@dc.tohoku.ac.jp

⁵ 正会員 東北大学教授 災害科学国際研究所 (〒980-0845 宮城県仙台市青葉区荒巻字 468-1)
E-mail: tei@irides.tohoku.ac.jp

⁶ 東北大学准教授 環境科学研究科 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01)
E-mail: yashiro@ee.mech.tohoku.ac.jp

⁷ 東北大学教授 環境科学研究科 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01)
E-mail: kawada@ee.mech.tohoku.ac.jp

本論文では、単一セルが面内に周期的な構造を有する複合板とみなせるような固体酸化物形燃料電池 (Solid Oxide Fuel Cell : SOFC) を対象として、そのマイクロ-マクロ連成解析の多段階解析を実現するために、汎用 FEM ソフトウェアを用いて面内周期的な単一マイクロ構造 (面内ユニット構造) に対する数値平板試験を実施する。そして、均質な板としてのマクロ非線形力学挙動を特徴づけたうえで、これと等価なマクロ挙動を表現する面内ユニット構造の代理モデルとして積層板の均質なマイクロ構造を設定し、各層の材料特性を同定することで汎用 FEM ソフトウェアの Abaqus/Standard に実装された連続体ソリッドシェル要素によるマクロ板構造の解析を行い、この積層代理モデルの性能を検証する。

Key Words: Solid oxide fuel cell (SOFC), Numerical plate testing, Multi-scale analysis, Continuum solid-shell elements

1. 緒言

固体酸化物形燃料電池 (Solid Oxide Fuel Cell : SOFC) は高温条件下で燃料となる水素と酸素を供給することによって発電を行う。そのため、構成部材は温度変化による熱膨張とクリープ変形および電気化学反応に伴う還元膨張によって機械的な劣化を起こすことが知られている¹⁾。SOFC の機械的解析において還元膨張を考慮するには、運転中の酸素ポテンシャルの非定常な変化を追従する必要があるため、これまでの汎用 FEM ソフトウェアを用いた研究では熱膨張の考慮にとどまってお²⁾り、構成部材の材料内で発生する応力の評価に課題があった。

図-1 SOFC の概要

そこで筆者らは、酸素ポテンシャル分布の経時変化を評価しうる数値モデルを構築し、熱膨張、還元膨張および

クリープ変形を含む非弾性的な変化を考慮した劣化挙動の解析による評価手法を独自に開発してきた⁸⁻¹¹⁾。

SOFCの電池としての単位ユニットはセルと呼ばれ、アノード、カソードおよび電解質から構成される。通常、セルはインターコネクトを介して連結したセルスタック（図-1 (a)）にすることによって、高出力な発電を可能にしている。セルの代表的な形状として、面内に周期構造を有する平板型セルがある（図-1 (b)および(c)）。板状デバイス全体のマクロな挙動を把握するには、局所的な温度および水素分圧の変化に伴う還元膨張によるミクロな変形挙動を考慮しなければならない。しかし、これには厚さ方向の分割を十分細かくする必要があり⁸⁻¹¹⁾、このメッシュサイズを用いた板状デバイス全体の変形解析を行うことは、要素数や解析時間などの計算コストの観点から現実的でない。

面内に周期的な微視的非均質性を有する構造物に関するミクロ挙動を考慮したマクロ解析については、これまで様々な理論が提案されている¹²⁻¹⁶⁾。このうち、板形状のミクロ-マクロ連成解析のマルチスケール手法として、面内に周期的な非均質性を有する複合板の数値平板試験が開発され、線形弾性材料に対する適性が確認されてきた^{17,18)}。しかし、この数値平板試験手法を非弾性材料に適用し、マクロ非線形力学挙動を特徴づけたうえで、マクロ解析を行うための方法論は未だ提案されていない。

そこで本研究では、面内方向にのみ周期構造を有するSOFCの平板型セルのような、これまで検討されてこなかった非線形の板状デバイスにマルチスケール手法を適用するために、平板型セル内の面内に周期的な単一ミクロ構造を数値供試体と見立てて数値平板試験を実施し、そのマクロ非線形力学挙動を特徴づけるとともに、等価なマクロ挙動を発現する均質な板を積み重ねた積層代理モデルを新規に提案する。具体的には、積層構造を代理モデルとして各層の材料特性を同定し、汎用FEMソフトウェア Abqus/Standard を用いて積層されたシェル要素によるマクロ板構造の解析を行うことで、その性能を検証する。

2. マルチスケール板モデリング^{17,18)}

図-2 に示すような面内に周期的な非均質ミクロ構造（以下、面内ユニット構造）を有する板状デバイスに対する、マルチスケール解析手法について説明をする。ここで、マクロ構造解析には積層板理論と類似の支配方程式を採用する。一方、ミクロ構造の解析には、3次元固体要素の領域として静的つり合い問題を定義する。

マクロ構造に対して、図-3 を参照して厚板理論を採用すると変位場は次式となる。

図-2 面内周期性を持つ非均質な板状デバイス

図-3 厚板理論の変位場

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{u}_1(x_1, x_2) - x_3\phi_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) = \bar{u}_2(x_1, x_2) - x_3\phi_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) = \bar{u}_3(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\bar{u}_i$ は中心面上の変位および ϕ_i は断面の回転角を表す。また、 N_i は板の断面に働く垂直応力、 M_i は曲げモーメントおよび V_i は面外せん断合成応力である。式(1)より、マクロひずみ $\mathbf{E}$ は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} - x_3 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} - \phi_2 \\ \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} - \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{E}^1 + x_3 \tilde{E}^4 \\ \tilde{E}^2 + x_3 \tilde{E}^5 \\ 0 \\ \tilde{E}^3 + x_3 \tilde{E}^6 \\ \tilde{E}^7 \\ \tilde{E}^8 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{E}}$ はマクロひずみと曲率を成分とするマクロ一般化ひずみである。図-4 にマクロ一般化ひずみの各変形モードを示す。

いま、面内ユニット構造として、図-5 に示すような y_1 方向と y_2 方向に面内周期性を持つ領域 $(-l/2, l/2) \times (-h/2, h/2) \times (-h/2, h/2)$ の固体領域を考える。そして、ミクロひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ を次式のように定義する。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{z}} \tilde{\mathbf{E}} + \partial_{y_j} \mathbf{u}^* \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{u}^* = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ は非均質性に起因するマイクロ擾乱変位場であり、全成分とも y_i ($i=1,2,3$) の関数である。図-5の面内ユニット構造には、面内に周期的な非均質性を仮定するため、相対する境界面 $\partial Y_{[1]}$ と $\partial Y_{[-1]}$ 、 $\partial Y_{[2]}$ と $\partial Y_{[-2]}$ 上の擾乱変位場には、次式の周期拘束を課す。

$$\mathbf{u}_j^*|_{\partial Y_{[i]}} = \mathbf{u}_j^*|_{\partial Y_{[-i]}} \quad (i=1,2; j=1,2,3) \quad (4)$$

また、 $\tilde{\mathbf{z}}$ はマクロー一般化ひずみとマイクロひずみを結びつける行列であり、 $\tilde{\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{E}}$ は次式のように表される。

$$\tilde{\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z_1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z_2/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{E}^1 \\ \tilde{E}^2 \\ \tilde{E}^3 \\ \tilde{E}^4 \\ \tilde{E}^5 \\ \tilde{E}^6 \\ \tilde{E}^7 \\ \tilde{E}^8 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで、 y_i と z_i という 2 つのマイクロレベルの座標系を導入したが、 y_i は均質化の過程で用いるものであり、 z_i は板曲げ理論で用いる運動学的な座標系である。そのため y_i と z_i は互いに独立している。

なお、本研究では非弾性特性はクリープ特性のみを考慮し、マイクロ全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})$ はマイクロ弾性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{y})$ とマイクロクリープひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^c(\mathbf{y})$ の和で表されるものとする。

以上より、 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})$ をマイクロ応力、 $\mathbf{C}$ を構成材料の弾性係数とした時、面内ユニット構造に対するフォークト表記の支配方程式はマクローおよびマイクロひずみの定義を用いると次式になる。

$$\begin{cases} \partial_y^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^c) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{E}} + \partial_y \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u}^* : \text{In-plane Y-periodic} \end{cases} \quad (6)$$

一方、マクロー一般化応力 $\tilde{\mathbf{M}}$ は次式で定義する。

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{h l_2} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{z}^T \left(\int_{-l_2/2}^{l_2/2} \int_{-l_1/2}^{l_1/2} \boldsymbol{\sigma}(y_1, y_2, y_3) dy_2 dy_1 \right) dy_3 \quad (7)$$

このマクロー一般化応力の成分は O_{-xx2x3} からなるマクロー座標系において、 x_1 面と x_2 面の垂直合応力 $\tilde{M}_{11}, \tilde{M}_{22}$ と面外合せん断応力 $\tilde{M}_{12}$ 、 x_1 面と x_2 面に関する曲げモーメント $\tilde{M}_{11}, \tilde{M}_{22}$ とねじりモーメント $\tilde{M}_{12}$ 、および x_1 面と x_2 面の面外せん断合応力 $\tilde{V}_{23}, \tilde{V}_{13}$ によって、次式のように表される。

図4 マクロー一般化ひずみの各変形モード

図5 板状デバイスの面内ユニット構造

$$\tilde{\mathbf{M}} = \{\tilde{N}_{11} \quad \tilde{N}_{22} \quad \tilde{N}_{12} \quad \tilde{M}_{11} \quad \tilde{M}_{22} \quad \tilde{M}_{12} \quad \tilde{V}_{23} \quad \tilde{V}_{13}\}^T \quad (8)$$

面内ユニット構造が線形弾性体のみで構成される場合、マクロー一般化ひずみと一般化応力の間には次の関係式が成り立つ。

$$\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{E}} \quad (9)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{D}}$ は均質化板剛性であり、その成分は次のようになる。

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{K} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} & \mathbf{L} \\ \mathbf{K}^T & \mathbf{L}^T & \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & K_{11} & K_{12} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23} & K_{12} & K_{22} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & B_{13} & B_{23} & B_{33} & K_{13} & K_{23} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & L_{11} & L_{12} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & D_{12} & D_{22} & D_{23} & L_{12} & L_{22} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & D_{13} & D_{23} & D_{33} & L_{13} & L_{23} \\ K_{11} & K_{12} & K_{13} & L_{11} & L_{12} & L_{13} & H_{11} & H_{12} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & L_{12} & L_{22} & L_{23} & H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (10)$$

この均質化板剛性を求めるには、マクロ一般化ひずみの各変形モードにおいて式(6)を解き、得られたマイクロ応力の成分を式(7)に適応してマクロ一般化応力を算出する。それにより、各変形パターンに対応する均質化板剛性の成分を求めることができる。このようにしてマクロの板剛性を求めるマイクロ解析を「数値平板特性試験」と呼んでいる。

ただし、クリープ変形を示すような非弾性材料を面内ユニット構造の構成材料として用いる場合には、上記のような均質化板剛性 $\tilde{\mathbf{D}}$ を用いたマクロ一般化ひずみ $\tilde{\mathbf{E}}$ と一般化応力 $\tilde{\mathbf{M}}$ の線形関係式は得られない。その代わり増分解析に伴って数値的に算出される離散的な点の集合が描く非線形な曲線が得られるのみであり、それに対応する非線形な構成則関数を決定することはできない。すなわち、式(7)はマクロ一般化ひずみ $\tilde{\mathbf{E}}$ の陰的な関数であり、一般化応力 $\tilde{\mathbf{M}}$ との関係は陽的に決定できない。このため本研究では、8つの変形モードを表すマクロ一般化ひずみをデータとして、マイクロ境界値問題の式(6)を解き、式(7)に対応するマクロな一般化応力応答を各変形レベルに応じて算出する。そして、そこで得られた非線形マクロ力学挙動と等価な挙動を発現する積層構造の代理マイクロモデルを設定し、各層の材料特性を同定したうえで、マクロ解析を行うマイクロ-マクロ分離型解法を提案する。

3. 数値平板特性試験¹⁷⁾

ここでは、数値平板特性試験の具体的な方法を述べる。

図-5のマイクロ構造の面内ユニット構造において、マイクロ変位 $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}^T$ は次のように表される。

$$\begin{cases} w_1 = (\tilde{E}^1 + z_3 \tilde{E}^4) y_1 + (\tilde{E}^3 + z_3 \tilde{E}^6) \frac{y_2}{2} + (\tilde{E}^8 - \frac{z_2}{2} \tilde{E}^6) y_3 + u_1^* \\ w_2 = (\tilde{E}^3 + z_3 \tilde{E}^6) \frac{y_1}{2} + (\tilde{E}^2 + z_3 \tilde{E}^5) y_2 + (\tilde{E}^7 - \frac{z_1}{2} \tilde{E}^6) y_3 + u_2^* \\ w_3 = (\tilde{E}^8 - \frac{z_2}{2} \tilde{E}^6) y_1 + (\tilde{E}^7 - \frac{z_1}{2} \tilde{E}^6) y_2 \end{cases} \quad (11)$$

相対する境界面 $\partial Y_{[\pm 1]}$ および $\partial Y_{[\pm 2]}$ において、周期性を満足させるには、式(11)のマイクロ変位 $\mathbf{w}$ に関して次のような拘束条件を課す必要がある。

$$\begin{cases} q_1^{[1]} \equiv w_1^{[1]} - w_1^{[-1]} = (\tilde{E}^1 + z_3 \tilde{E}^4) l_1 \\ q_2^{[1]} \equiv w_2^{[1]} - w_2^{[-1]} = \frac{1}{2} (\tilde{E}^3 + z_3 \tilde{E}^6) l_1 \\ q_3^{[1]} \equiv w_3^{[1]} - w_3^{[-1]} = \left(\tilde{E}^8 - \frac{z_2}{2} \tilde{E}^6 \right) l_1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} q_1^{[2]} \equiv w_1^{[2]} - w_1^{[-2]} = \frac{1}{2} (\tilde{E}^3 + z_3 \tilde{E}^6) l_2 \\ q_2^{[2]} \equiv w_2^{[2]} - w_2^{[-2]} = (\tilde{E}^2 + z_3 \tilde{E}^5) l_2 \\ q_3^{[2]} \equiv w_3^{[2]} - w_3^{[-2]} = \left(\tilde{E}^7 - \frac{z_1}{2} \tilde{E}^6 \right) l_2 \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 $q_i^{[i]}$ は相対変位、各変数の添え字 $[\pm i]$ は境界面 $\partial Y_{[\pm i]}$ 上の値を表している。

実際の解析において、汎用 FEM ソフトウェアを用いる場合、相対変位を与える外部節点（制御節点）を新たに導入し、式(12)および(13)の拘束条件を多点拘束として与えることになる。例えば、面内ユニット構造に対して Model 1 の y_1 方向に単軸引張りの変形を与える時、マクロ一般化ひずみ $\tilde{\mathbf{E}}$ は $\tilde{E}^1$ 成分にのみ値 $\hat{E}$ を有する。すなわち、次式のように設定される。

$$\begin{aligned} & \{\tilde{E}^1 \quad \tilde{E}^2 \quad \tilde{E}^3 \quad \tilde{E}^4 \quad \tilde{E}^5 \quad \tilde{E}^6 \quad \tilde{E}^7 \quad \tilde{E}^8\} \\ & = \{\hat{E} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)を式(12)および(13)に適用すると次のような拘束条件を得る。

$$\begin{cases} q_1^{[1]} \equiv w_1^{[1]} - w_1^{[-1]} = \hat{E} l_1 \\ q_2^{[1]} \equiv w_2^{[1]} - w_2^{[-1]} = 0 \\ q_3^{[1]} \equiv w_3^{[1]} - w_3^{[-1]} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} q_1^{[2]} \equiv w_1^{[2]} - w_1^{[-2]} = 0 \\ q_2^{[2]} \equiv w_2^{[2]} - w_2^{[-2]} = 0 \\ q_3^{[2]} \equiv w_3^{[2]} - w_3^{[-2]} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

図-5に示すような $\partial Y_{[1]}$ 面上の節点 D と $\partial Y_{[-1]}$ 面上の節点 E、 $\partial Y_{[2]}$ 面上の節点 F と $\partial Y_{[-2]}$ 面上の節点 G とし、それぞれの面に対応した制御節点を M、N とする面内ユニット構造を考える。このモデルに対し、式(15)および(16)の境界条件を与える場合、節点 D、E および節点 F、G とそれぞれの制御節点 M、N には、次式のような拘束条件を与えることとなる。

$$\begin{cases} w_1^D - w_1^E = q_1^M = \hat{E} l_1 \\ w_2^D - w_2^E = q_2^M = 0 \\ w_3^D - w_3^E = q_3^M = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} w_1^F - w_1^G = q_1^N = 0 \\ w_2^F - w_2^G = q_2^N = 0 \\ w_3^F - w_3^G = q_3^N = 0 \end{cases} \quad (18)$$

他の変形モードにおいても、同様の方法で拘束条件を決定することができる¹⁷⁾。

一方、マクロ一般化応力は式(7)のような体積積分に

よって定義されているが、これを表面積分に変換すると次式になる。

$$\tilde{N}_{\alpha\beta} = \frac{1}{l_\gamma} \int_{\partial Y[\alpha]} t_\beta^{[\alpha]} dS = \frac{\tilde{F}_{\alpha\beta}}{l_\gamma} \quad (\text{Model1} \sim \text{Model3}) \quad (19)$$

$$\tilde{M}_{\alpha\beta} = \frac{1}{l_\gamma} \int_{\partial Y[\alpha]} z_3 t_\beta^{[\alpha]} dS = \frac{\tilde{G}_{\alpha\beta}}{l_\gamma} \quad (\text{Model4 and Model5}) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{12} &= \frac{1}{2l_2} \int_{\partial Y[1]} z_3 t_2^{[1]} dS + \frac{1}{2l_1} \int_{\partial Y[2]} z_3 t_1^{[2]} dS \\ &\quad - \frac{1}{2h} \int_{\partial Y[2]} z_1 t_3^{[2]} dS - \frac{1}{2h} \int_{\partial Y[1]} z_2 t_3^{[1]} dS \\ &= \frac{\tilde{G}_{12}^{[1]}}{2l_2} + \frac{\tilde{G}_{21}^{[2]}}{2l_1} - \frac{\tilde{G}_{23}^{[2]}}{2h} - \frac{\tilde{G}_{13}^{[1]}}{2h} \quad (\text{Model6}) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\tilde{V}_{\alpha 3} = \frac{1}{l_\gamma} \int_{\partial Y[\alpha]} t_3^{[\alpha]} dS = \frac{\tilde{F}_{\alpha 3}}{l_\gamma} \quad (\text{Model7 and Model8}) \quad (22)$$

ここで、 $\gamma \neq \alpha$ ($\alpha = 1, 2$)、 $t_\beta^{[\alpha]}$ は境界面 $\partial Y[\alpha]$ ($\alpha = 1, 2$) における単位外向き法線ベクトル $\mathbf{n}$ を有する応力ベクトルの β 方向成分であり、式(7)の応力テンソル成分 $\sigma_{\alpha j}$ によって次のように表される。

$$t_\beta^{[\alpha]} = \sigma_{\alpha j} n_j^{[\alpha]} \quad (\beta = 1, 2; j = 1, 2, 3) \quad (23)$$

汎用 FEM ソフトウェアを用いた解析においては、拘束条件に関する等価節点力との関係から一般化応力を得ることができる。 $l_\gamma \tilde{N}_{\alpha\beta}$ 、 $l_\gamma \tilde{M}_{\alpha\beta}$ および $l_\gamma \tilde{V}_{\alpha 3}$ は境界面 $\partial Y[\alpha]$ 上の全節点の等価節点力の総和に等しく、制御節点に作用する等価節点力あるいはモーメントは、すべての多点拘束の条件式による節点反力の総和に等しい。したがって、制御節点の節点反力 $\tilde{F}_{\alpha\beta}$ 、あるいはモーメント反力 $\tilde{G}_{\alpha\beta}$ によって、一般化応力は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \{\tilde{N}_{11} \quad \tilde{N}_{22} \quad \tilde{N}_{12} \quad \tilde{M}_{11} \quad \tilde{M}_{22} \quad \tilde{M}_{12} \quad \tilde{V}_{23} \quad \tilde{V}_{13}\}^T \\ &= \left\{ \frac{\tilde{F}_{11}}{l_2} \quad \frac{\tilde{F}_{22}}{l_1} \quad \frac{\tilde{F}_{12}}{l_2} \quad \frac{\tilde{G}_{11}}{l_2} \quad \frac{\tilde{G}_{22}}{l_1} \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{G}_{12}^{[1]}}{l_2} + \frac{\tilde{G}_{21}^{[2]}}{l_1} + \frac{\tilde{G}_{23}^{[2]}}{h} + \frac{\tilde{G}_{13}^{[1]}}{h} \right) \quad \frac{\tilde{F}_{23}}{l_1} \quad \frac{\tilde{F}_{13}}{l_2} \right\}^T \end{aligned} \quad (24)$$

4. 平板型セルの数値平板特性試験

図-6 に示す、ランタニストロンチウムコバルトフェライト ((La,Sr)(Co,Fe)O₃:LSCF) のカソード、8mol% イットリア安定化ジルコニア (8mol% Yttria Stabilized Zirconia: 8YSZ) の電解質、ニッケル-イットリア安定化ジルコニア (Ni-Yttria Stabilized Zirconia: Ni-YSZ) のアノード、カ

図-6 平板型セルの面内ユニット構造 (モデル1)

表-1 材料定数¹¹⁾

	Young's Modulus [MPa]	Poisson's ratio [-]
Interconnect	1.35×10^5	0.35
Cathode	1.70×10^5	0.25
Electrolyte	1.50×10^5	0.4
Anode	9.00×10^4	0.3

ルシウムを添付したランタニクロマイト (La(Ca)CrO₃: LCCr) のインターコネクトからなる $h = l = 5.0$ mm、 $t = 2.0$ mm のアノードサポート型 SOFC の面内ユニット構造を用いてモードごとの数値平板特性試験を行った。各材料の厚さは、上下のインターコネクトが 0.5mm、カソードが 0.12mm、電解質が 0.08mm、アノードが 0.8mm である。

有限要素メッシュには 3 次元 8 節点六面体要素を使用し、節点数が 3689、要素数が 2728 である。各変形モードにおいて、このモデルに 2000sec かけて $\hat{E} = 0.04$ となるまで漸増的に負荷し、その後 2000sec かけて除荷を行う。ここで、インターコネクト、カソードおよび電解質はセラミックスのため等方弾性体とする。一方、アノードはセラミックスと金属を焼結して生成した複合材であるため、クリープ特性を有する非弾性体である。本研究では、次式で与えられるクリープひずみの発展則を用いてその特性を表現する。

$$\dot{\varepsilon}^c = k |\bar{\sigma}|^n t^m \quad (25)$$

ここで、 $\dot{\varepsilon}^c$ は相当クリープ速度、 $\bar{\sigma}$ は von Mises 相当応力、 t は時間、および k 、 n 、 m は材料定数であり、 $k = 1.76 \times 10^{-7} \text{ m}^2 / (\text{s}^{m+1} \text{ N}^n)$ 、 $n = 1.1$ 、 $m = -0.5$ とした。また、それぞれの材料の弾性特性を表-1 に示す¹¹⁾。

図-7 に各モードにおける $\hat{E}$ が 0.04 に達したときの変形形状を示す。コンターは von Mises 相当応力である。この

図-7 各モードの変形形状
(von Mises 相当応力分布)

図から、各モードの変形形状が適切に表現されていることが確認できる。

図-8 に各モードの一般化応力 - 一般化ひずみ曲線を、弾性特性のみを考慮した場合の線形応答と併せて示す。今回のような平板型セルの場合、非弾性特性が顕著に現れていることが確認できる (図-8(a), (b), (e))。また、引張り、曲げおよび面外せん断の変形モードでは、方向によらず一致した曲線となっている (図-8(a), (c), (e))。面内ユニット構造の変形形状では、方向毎に応力分布がそれぞれ異なる現れ方をしているが (図-7)，図-8 よりマクロ的には、等方的な挙動であると言える。

また、図-8 には非線形性が顕著に現れている変形モードとごく僅かにしか現れない変形モードがある。この違いを確認するために、図-9 に Mode1 と Mode4 の $\dot{\epsilon}$ が 0.04 のときのアノード材のみの変形形状を示す。コンターは von Mises 相当応力を表している。Mode4 はアノードが中立面に近いため、発生している応力値が Mode1 と比べて小さい。したがって、Mode4 においてアノードのクリー

図-8 一般化応力 - 一般化ひずみ曲線
(○, □ : 非線形応答を考慮,
----- : 線形応答のみ)

図-9 アノードの変形状 (von Mises 相当応力分布)

ブの影響は、Mode1 のそれに比べて小さいと考えられる。これは、Mode5 の y_2 方向の曲げや Mode6 のねじりでも同じことがいえる。以上より、今回のようなアノードサポート型の平板型セルのような場合、曲げおよびねじりの変形モードでは非線形性が現れにくいと考えられる。

5. 代理モデルを用いたマクロ解析

平板型 SOFC には、図-10 に示すような燃料の流路が 1 方向となる燃料電池を用いることがある。ここでは、この面内ユニット構造を用いた数値平板特性試験を行い、同等のマクロ平板の板剛性を与える積層構造の代理モデルを提示する。そして、この積層代理モデルの各層の材料パラメータを最適化手法を適用して決定したうえで、積層シェル要素によるマクロ解析を行い、本手法の有効性を検証する。

(1) 数値平板特性試験

4 章と同じ材料である LSCF のカソード、8YSZ の電解質、Ni-YSZ のアノード、LCCr のインターコネクトからなる $l_1 = l_2 = 5.0 \text{ mm}$ 、 $t = 2.0 \text{ mm}$ のアノードサポート型 SOFC の面内ユニット構造を用いる。各材料の厚さは、上下のインターコネクトが 0.5 mm 、カソードが 0.12 mm 、電解質が 0.08 mm 、アノードが 0.8 mm であり、流路の断面のサイズは $0.5 \times 1.5 \text{ mm}^2$ である。

有限要素メッシュには 3 次元 8 節点六面体要素を使用する。また、温度および水素分圧の変化に起因する局所変形の解析が可能な要素サイズにするために、カソードと電解質の厚さ方向における分割数を 5 とし、ユニット構造全体の節点数を 7205、要素数を 5600 とした。

このモデルに、各モードにおいて 2000sec かけて $\dot{E} = 0.04$ になるまで漸増的に負荷し、その後 2000sec かけて除荷を行う。材料定数やクリープパラメータについ

図-10 平板型セルの面内ユニット構造 (モデル 2)

図-11 各モードの変形状 (von Mises 相当応力分布)

ては、4 章の値を用いる。

図-11 に $\dot{E} = 0.04$ における各モードの変形状を示す。ここで、コンターは von Mises 相当応力を表している。Mode1, Mode4, Mode8 の y_1 方向に関する変形においては、ユニットモデルが一様に変形していることが確認できる (図-11(a), (d), (h))。これに対し、Mode2, Mode5, Mode7 の y_2 方向に関する変形では、インターコネクトの流路部分の厚さが薄く、大きな変形が生じていることが

表-2 面内ユニット構造の板剛性 (モデル2)

In-plane normal	A_{11}	[N/mm]	2.01×10^5
In-plane normal	A_{22}	[N/mm]	1.79×10^5
In-plane coupling	A_{12}	[N/mm]	5.73×10^4
In-plane shear	A_{33}	[N/mm]	6.30×10^4
Bending	D_{11}	[N・mm]	7.04×10^4
Bending	D_{22}	[N・mm]	5.86×10^4
Coupled bending	D_{12}	[N・mm]	2.15×10^3
Torsion	D_{33}	[N・mm]	1.87×10^4
Out of plane shear	H_{11}	[N/mm]	2.75×10^4
Out of plane shear	H_{22}	[N/mm]	3.82×10^4

分かる (図-11 (b), (e), (g)) .

また, 図-12 に各モードの一般化応力 - 一般化ひずみ曲線を示す. どのモードにおいても非線形性が現れていることが分かる. また, 引張り, 曲げ, 面外せん断の変形モードではそれぞれ異方性が現れていることが確認できる. これは, 図-11 で示した変形形状の違いが, マクロ力学挙動の異方性に反映されたものと考えられる.

この面内ユニット構造について線形弾性特性のみを考慮した数値平板特性試験の結果, 得られる板剛性を表-2 に示す.

(2) 代理モデルの導入

平板型セルを解析するために, 5.1節で用いた面内ユニット構造と同様のマクロ力学挙動を再現する代理モデルとして, 図-13(a)に示すような5つの層からなる積層構造を導入する. ここで, アノード, カソード, 電解質については, 元の面内ユニット構造とこの代理モデルが有する各層の材料, 厚さと同一に設定し, 材料定数も表-1 に示す値を使用する. 一方, インターコネクトは図-12 より, 直交異方性弾性を示す単一の材料定数からなる層に置き換える. そして, この代理モデルに対して行う数値平板特性試験の結果が, 前節の数値平板特性試験の結果と整合するように最適化手法を用いてインターコネクトに設定した層の材料のパラメータを同定する. ただし, インターコネクトには非弾性効果が含まれない線形弾性材料と仮定しているため, 本解析例では, 線形弾性パラメータのみを同定対象とし, 非弾性効果であるアノードのクリープ特性を除いた数値平板特性試験の結果と比較した.

本研究では, 材料パラメータ同定を行うための最適化手法には, 遺伝的アルゴリズムの一つである実数値 GA (Real-coded genetic algorithm : RGA) ¹⁹⁾²¹⁾を採用し, 図-

図-12 一般化応力 - 一般化ひずみ曲線

図-13 同定モデルの概念図と解析モデル

13(b)のように分割したソリッド要素を使用した。

最適化計算の結果、積層代理モデル内のインターコネクットの材料として仮定した直交異方性弾性の剛性マトリックス $\mathbf{C}_I$ の成分は次のように決定された。

$$\mathbf{C}_I = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ Sym & & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{2323} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} C_{1111} &= 1.16 \times 10^5 \text{ MPa}, & C_{1122} &= 5.34 \times 10^4 \text{ MPa}, \\ C_{2222} &= 9.46 \times 10^4 \text{ MPa}, & C_{1133} &= 6.30 \times 10^4 \text{ MPa}, \\ C_{2233} &= 6.37 \times 10^4 \text{ MPa}, & C_{3333} &= 1.32 \times 10^5 \text{ MPa}, \\ C_{1212} &= 2.30 \times 10^4 \text{ MPa}, & C_{1313} &= 9.16 \times 10^3 \text{ MPa}, \\ & & C_{2323} &= 5.22 \times 10^3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

また、図-14 に同定結果の一般化応力 - 一般化ひずみ曲線を示す。設定した代理モデルと同定した材料パラメータが有効に機能していることが分かる。図-14(c)および(d)では若干の誤差が見られるが、次節で取り扱うモデルサイズでは十分な精度の結果が得られるため、本研究ではこの値を採用する。

(3) 平板型セルのマクロ解析

5.(2)節で設定した代理モデルの平板型セルのマクロ解析により、提案した計算手法の精度検証を行う。

平板型セルの境界辺を完全固定し、瞬間的に80MPaの等分布荷重を作用させ、そのまま4000sec保持する。ただし、板状デバイスの対称性を考慮し、解析では図-15(a)に示すような1/4対称モデルとする。また、積層セル要素にはAbaqus2017に搭載された連続体ソリッドシェル要素を使用する。この連続体ソリッドシェル要素は通常のソリッド要素と同じように、要素を積み重ねることができるため、本解析では各層の厚さを1要素とする連続体ソリッドシェル要素からなる積層代理モデルを設定した。連続体ソリッドシェル要素の仕様については付録を参照されたい。比較のために、図-15(b)に示すよう

図-14 同定結果 (非弾性特性を除いた同定)

図-15 マクロ解析のモデルと境界条件

表-3 節点数、要素数および解析時間

	Solid-Shell	Solid
Nodes	1734	404594
Elements	1280	358400
Analysis time [sec]	64	41260 (6CPU)

な面内周期性を有する面内ユニット構造をそのまま面内に並べて3次元ソリッド要素で作成した平板型セルについても同様の解析を行う。

それぞれの節点数、要素数および解析に要した時間を表-3に示す。ソリッド要素を用いた解析では、6CPUの並列計算で約11時間かかったが、本手法では並列計算せずに64秒と、解析時間を大幅に短縮できることが分かる。本手法を用いる場合、平板型セルの構造や材料が異なるごとに材料定数の同定を行う必要があるが、実機相当の平板型セルを直接モデル化し解析を行うと膨大な計算コストが必要になるのに対し、提案する本手法の積層代理モデルを用いることで、このコストを削減することが可能になる。また、数kW級のセルスタックを解析する場合、平板型セルを数十枚重ねる必要があるため、ソリッド要素を用いることは要素数や解析時間の観点から現実的でなく、本手法の有用性が主張できる。

図-16に最終時刻の変形形状を示す。コンターは x_3 方向の変位分布を表す。図-17には、上面の中心部分における変位履歴曲線を示す。最終時刻の中心部分の x_3 方向の変位は、ソリッド要素を使用した解析では-7.98mmあったのに対し、本提案手法を用いた連続体ソリッドシェル要素による解析結果は-7.79mmであり比較的良好な結

図-16 マクロ解析の変形形状
(x_3 方向変位分布)

図-17 x_3 方向変位履歴曲線

果が得られている。

最後に、図-18に上部のインターコネクトに発生する面外方向のせん断応力を示す。これより、インターコネクトに異方性が現れていることが確認できる。通常の積層シェル要素では、面外方向の応力を評価できないが、連続体ソリッドシェル要素を用いることによって、厚さ方向に関する評価が可能となる。

以上の結果から、SOFCの平板型セルような非弾性特性を有する板状デバイスにおいて、本研究で提案した積層代理モデルを用いることで精度よく評価することが確認された。また、連続体ソリッドシェル要素を用いることで厚さ方向の挙動についても検討可能なことが例示された。

6. 結言

本研究では SOFC の平板型セルのような板状デバイスを対象として、その面内ユニット構造に対する数値平板特性試験により非線形マクロ力学挙動を特徴付け、この挙動と等価な挙動を発現しうる代理モデルにより、マクロ解析を行うことが可能なマルチスケール解析手法を提案した。マクロ構造には厚板理論を採用し、ミクロ構造には、平板型セルの面内ユニット構造を 3 次元固体としてモデル化し、等価な非弾性均質体としての非線形力学挙動を算出可能な変位場と、その境界条件を付与した。

数値解析に際しては、平板型セルを対象に汎用 FEM ソフトウェアの Abaqus/Standard による面内ユニット構造の数値平板特性試験の解析を行い、これと等価な挙動を発現しうる積層構造の代理モデルを設定したうえで、各層の均質体としての材料定数を同定した。得られた材料定数を用いた連続体ソリッドシェル要素によるマクロ解析を行い、結果の精度を検証した。

本研究で提案した平板型セルの非弾性のミクロ-マクロ連成解析手法を用いることにより、すべてを固体有限要素でモデル化した解析と比較して解析時間を大幅に短縮し、ミクロな変形挙動を考慮したセル全体の非線形力学挙動の評価が可能になった。

本研究では、インターコネクトの周期構造に着目した。しかしながら、平板型セルの構造は設計によって全く異なる形状であり、インターコネクトだけではなく各構成部材が面内に周期構造を有する場合もしばしばある。このような場合においても、本手法の数値平板特性試験と均質な板を積み重ねた積層代理モデルを導入することにより、平板型セルのマクロ解析が可能となる。また、Abaqus の連続体ソリッドシェル要素を用いることで積層構造のセルをモデル化でき、何層にも重ねたセルスタック形状にすることも可能になる。このセルスタックの解析は今後の課題である。さらに将来的には、還元膨張や熱膨張を考慮した解析システムと組み合わせることにより、平板型セルの非定常電気化学-力学連成のミクロ-マクロ解析手法へ発展させる。

謝辞：本論文は、新エネルギー・産業技術総合開発機構 (NEDO) の委託業務の結果得られたものである。

付録 連続体ソリッドシェル要素²²⁾

Abaqus2017 で新たに搭載された連続体ソリッドシェル要素は Vu-Quoc らによって提案された要素²³⁾を基に作られた 1 次要素である。体積ロッキングを軽減するために曲げ変形と想定されるひずみを改良した要素であり、変

図-18 上側のインターコネクトに発生する面外方向の応力分布

位の自由度のみを持つ。3 次元構成則を使用し、通常のソリッド要素よりアスペクト比の大きな曲げに対して良好な応答を示す。また、想定されるひずみは面内応答とは異なる厚さ方向の応答より求められる。ただし、複合材を含む薄い構造に適した要素であり、厚さをもつ要素については結果が保証されないため注意が必要である。

参考文献

- 1) A. Atkinson : Chemically-induced stresses in gadolinium-doped ceria solid oxide fuel cell electrolytes, *Solid State Ionics*, Vol.95, pp.249-258, 1997
- 2) A. Atkinson and T. M. G. M. Ramos : Chemically-induced stresses in ceramic oxygen ion-conducting membranes, *Solid State Ionics*, Vol.129, pp. 259-268, 2000.
- 3) H. Yakabe, M. Hishinuma and I. Yasuda : Static and transient model analysis on expansion behavior of LaCrO_3 under an oxygen potential gradient, *Journal of The Electrochemical Society*, Vol.147-11, pp. 4071-4077, 2000.
- 4) C. K. Lin, T. T. Chen, Y. P. Chyou and L. K. Chiang : Thermal stress analysis of planar SOFC stack, *Journal of Power Sources*, Vol.164-1, pp. 238-251, 2007.
- 5) C. K. Lin, L. H. Huang, L. K. Chiang and Y. P. Chyou : Thermal stress analysis of planar solid oxide fuel cell stacks : Effects of sealing design, *Journal of Power Sources*, Vol.192-2, pp. 515-524, 2009.
- 6) A. Nakajo, Z. Wullemmin, J. V. Herle, and D. Favrat : Simulation of thermal stresses in anode-supported solid oxide fuel cell stacks. Part I: Probability of failure of the cells, *Journal of Power Sources*, Vol.193-1, pp. 203-215, 2009.
- 7) A. Nakajo, Z. Wullemmin, J. V. Herle, and D. Favrat : Simulation of thermal stresses in anode-supported solid oxide

- fuel cell stacks. Part II: Loss of gas-tightness, electrical contact and thermal buckling, *Journal of Power Sources*, Vol.193-1, pp. 216-226, 2009.
- 8) K. Terada, T. Kawada, K. Sato, F. Iguchi, K. Yashiro, K. Amezawa, M. Kubo, H. Yugami, T. Hashida, J. Mizusaki, H. Watanabe, T. Sasagawa and H. Aoyagi : Multiscale Simulation of Electro-Chemo-Mechanical Coupling Behavior of PEN Structure under SOFC Operation, *ECS Transactions*, Vol.35-1, pp. 923-933, 2011.
 - 9) M. Muramatsu, K. Terada, T. Kawada, K. Yashiro, K. Takahashi and S. Takase : Characterization of time-varying macroscopic electro-chemo-mechanical behavior of SOFC subjected to Ni-sintering in cermet micro-structures, *Computational Mechanics*, Vol.56-4, pp. 653-676, 2015.
 - 10) M. Muramatsu, K. Yashiro, T. Kawada and K. Terada : Numerical simulations of non-stationary distributions of electrochemical potentials in SOFC, *Engineering Computations*, Vol.34-6, pp. 1956-1988, 2017.
 - 11) 佐藤維美, 村松眞由, 寺田賢二郎, 渡辺智, 八代圭司, 川田達也, 横川晴美 : 汎用FEMソフトウェアをプラットフォームとする固体酸化物形燃料電池の非定常電気化学 - 力学連成解析システムの開発, 計算工学会論文集, Vol.2017, p. 20170004, 2017.
 - 12) N. Buannic, P. Cartraud and T. Quesnel : Homogenization of corrugated core sandwich panels, *Composite Structures*, Vol.59-3, pp. 299-312, 2003.
 - 13) A. Cecchi and K. Sab : A homogenized Reissner-Mindlin model for orthotropic periodic plates: Application to brickwork panels, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol.44, pp. 6055-6079, 2007.
 - 14) M. G. D. Geers, E. W. C. Coenen¹ and V. G. Kouznetsova : Multi-scale computational homogenization of structured thin sheets, *Modeling and Simulation in Materials Science and engineering*, Vol.15, S393-S404, 2007.
 - 15) B. Abbès and Y.Q. Guo, : Analytic homogenization for torsion of orthotropic sandwich plates: Application to corrugated cardboard, *Composite Structures*, Vol. 92-3, pp. 699-706, 2010.
 - 16) C. Y. Lee and W. Yu : Homogenization and dimensional reduction of composite plates with in-plane heterogeneity, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 48-10, pp. 1474-1484, 2011.
 - 17) K. Terada, N. Hirayama, K. Yamamoto, M. Muramatsu, S. Matsubara and S. Nishi : Numerical plate testing for linear two-scale analyses of composite plates with in - plane periodicity, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol.105-2, pp. 111-137, 2016.
 - 18) S. Matsubara, S. Nishi and K. Terada : On the treatments of heterogeneities and periodic boundary conditions for isogeometric homogenization analysis, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol.109-11, pp. 1523-1548, 2017.
 - 19) 佐藤浩, 小野功, 小林重信 : 遺伝的アルゴリズムにおける世代交代モデルの提案と評価, 人工知能学会誌, Vol.12, No.5, pp. 734-744, 1997.
 - 20) 秋本洋平, 羽佐田理恵, 佐久間淳, 小野功, 小林重信 : 多親を用いた実数値 GA のための世代交代モデル Just Generation Gap(JGG)の提案と評価, 第19回自立分散システムシンポジウム資料, pp. 341-346, 2007.
 - 21) 秋本洋平, 永田裕一, 佐久間淳, 小野功, 小林重信 : 適応の実数値交叉 AREX の提案と評価, 人工知能学会論文誌, Vol.24, No.6, A, 2009.
 - 22) Abaqus2017 Users Manual, 2017.
 - 23) L. Vu-Quoc, X. G. Tan : Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites. I. Statics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.192, pp. 975-1016, 2003.

(2017.6.23 受付)

NUMERICAL PLATE TESTING FOR NON-LINEAR MULTI-SCALE ANALYSIS OF PLATE-SHAPED DEVICE

Masami SATO, Mayu MURAMATSU, Seishiro MATSUBARA, Shinnosuke NISHI,
Kenjiro TERADA, Keiji YASHIRO and Tatsuya KAWADA

We propose a new method of multi-scale analysis for plate-like devices such as a flat plate cell of solid oxide fuel cell (SOFC), which is classified into a composite plate composed of in-plane periodic structures. To characterize the macroscopic nonlinear mechanical behavior of the in-plane periodic structure, the method of numerical plate testing is employed. Since the obtained relationships between macroscopic generalized strains and stress cannot be represented by an equivalent homogeneous plate with a single material, we introduce a surrogate model composed of homogeneous layers that is expected to exhibit the same macroscopic responses. After the material parameters of these layers are identified, the macroscopic analysis becomes possible by use of a laminated structure with continuum solid shell elements available in a general-purpose finite element program. Representative numerical examples are presented to demonstrate the capability of the proposed multi-scale analysis method.