Spencer 法による非円弧すべりを仮定した 斜面の安全率算定アルゴリズム

篠田 昌弘¹

¹正会員 公益財団法人鉄道総合技術研究所 構造物技術研究部 (〒185-8540 東京都国分寺市光町 2-8-38)

E-mail: shinoda.masahiro.97@rtri.or.jp

斜面の安全率算定法は 70 年以上も前から提案されており、現在までに様々な手法が提案されている。現在実務で適用されている斜面の安全率算定法は、すべり線を円弧と仮定しているものがほとんどである。これは、すべり線が円弧であると、パラメータが少なく、安全率算定アルゴリズムが単純で、計算効率や計算の安定性が高いためである。一方で、非円弧すべりを仮定した斜面の安全率算定法に Spencer 法があるが、Spencer 法による安全率の算定アルゴリズムは複雑で、条件によっては計算が不安定になる場合がある。本研究では、Spencer 法を用いた非円弧すべりを仮定した斜面の安全率算定における不安定性の要因を明らかにするとともに、その問題点を改善した安定性の高い斜面の安全率算定アルゴリズムを示す。

Key Words: slope, safety factor, stability analysis, computational stability

1. はじめに

斜面の安定性を評価する際には、すべり面に沿って斜面が極限平衡状態になるようにせん断強度定数を低減させる係数として定義された安全率が用いられる。この安全率を求めるために、様々な方法が提案されているが、円弧すべり安定解析法と非円弧すべり安定解析法に大別できる。円弧すべり安定解析法と非円弧すべり安定解析法の比較は文献 1) で示されている。対象領域が単純な地形で均質な地盤であれば、すべり線を円弧と仮定して単純なアルゴリズムで斜面の安全率を効率的に算定できる。一方、地形や地層が複雑で弱層等を有する自然斜面の安定性を評価する場合には、すべり線を円弧と仮定して求めた安全率が最小とならない場合がある。したがって、最小安全率を求めるためには、すべり線を適切に設定する必要がある。

非円弧すべりを仮定した Spencer 法による安全率算定法に言及した論文は原著論文^{2), 3)}の他に、文献 4), 5), 6) が挙げられる。文献 4) は、適切なすべり線を選定するための拘束条件に言及しており、文献 5) と 6) は、安全率算定における目的関数(スライス間力の総和とスライスに作用するモーメントの総和がゼロを満たす安全率)の非線形性に言及している。いずれの既往の研究も安全率算定における計算不安

定性とその対策については論じていない。

一方、非円弧すべりを仮定した斜面の安全率を求めるにはすべり線を探索する必要がある。代表的な非円弧すべり安定解析法は、文献 1) で示されている。最近の研究成果として、篠田¹⁾は粒子群最適化法(PSO 法)を用いた効率的な非円弧すべり線探索法を提案し、既往の算定結果と比較して、計算精度と計算速度の観点から提案法の有効性を示している。

本論文では、非円弧すべりを仮定した安全率算定法のうち Spencer 法に着目して、Spencer 法の安全率算定における不安定性の要因を明らかにするとともに、その問題点を改善した安定性の高い安全率算定アルゴリズムを計算例とともに具体的に示す。なお、本論文は Spencer 法に基づいた安全率の算定方法に関する論文であり、Spencer 法の改善ではないことに留意されたい。

2. Spencer 法

Spencer 法による安全率の算定は、文献 1), 2), 3), 4), 5), 6) に詳しいが、ここでは簡単に説明する。安全率の算定では、Spencer 法に基づいて、水平方向と鉛直方向の力の釣り合いとモーメントの釣り合いを満たすように算定する。ここでは、文献 1), 5) で

3. Spencer 法による非円弧すべりを仮定した安全率算定アルゴリズム

図-1 各スライスに作用するスライス間力と回転中心

示された釣り合い式から、本論文で用いるパラメータのみについて説明する。図-1に各スライスに作用するスライス間力と回転中心を示す。ここで、 O_c ：任意のモーメントの中心、 x_{oi} ： O_c 点とスライス底面の中心までの水平距離、 y_{oi} ： O_c 点とスライス底面の中心までの鉛直距離、 r_i ： O_c 点とスライス底面の中心までの距離、 Z_i ：スライス i の側面に作用する不静定内力の合力、 α_i ：スライス i の底面の角度、 θ_i ： Z_i と水平面との角度である。

右方向を正として、スライス右面側と左側面に作用する不静定内力の合力をそれぞれ Z_i 、 Z_{i-1} とすると、スライス間力 Q_i は下記のように求められる。

$$Q_i = Z_i - Z_{i-1} \quad (1)$$

Spencer 法では、式 (1) で示したスライス間力 Q_i と、図-1 で示した O_c 点を中心としたモーメント QR_i を用いて安全率を求める。想定されるすべり面上の外力が平衡状態にあるならば、すべての内力のベクトル和はゼロでなければならない。すなわち、内力の水平成分と鉛直成分の和はそれぞれゼロでなければならない。Spencer 法では、不静定内力 Z_i の水平に対する傾き θ_i を、スライス全体を通して一定と仮定することで、以下の式が成り立つとしている。

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0 \quad (2)$$

また、 $Z_0 = 0$ であれば、 $Z_n = 0$ であるので、すべり土塊全体のスライスについて積算すると以下の式が成り立つとしている。

$$\sum_{i=1}^n [QR_i] = 0 \quad (3)$$

Spencer 法による安全率の算定における不安定性の要因として、設定したすべり線座標で解が存在しないことがあること、スライス間力の傾角とすべり線の角度が等しい場合には特別な処理が必要であること、スライス間力の総和とモーメントの総和がゼロを満たすスライス間力の傾角と安全率の関係が非線形、不連続であることが挙げられる。上記の問題点を解決するために、本研究では、1) 与えられたすべり線座標に対して解の存在の確認を行い、2) スライス間力の傾角とすべり線の角度に応じて適切に処理を行い、3) 複数の目的関数を満たす複数の解を求める単純なアルゴリズムを適用して、その有効性を確認した。ここでは、上記 1) から 3) の具体的な処理方法について示す。

(1) 解の存在の有無の確認

Spencer 法による安全率の算定では、設定したすべり線座標で解が存在しないことがある。そのため、本研究では、図-2 に従って、与えられたすべり線座標に対して解の存在の確認を行うこととした。本研究では、解を探索するスライス間力の傾角の範囲として、 -60° から 60° の範囲を設定した。一般的には、スライス間力の傾角は正の値をとることがほとんどであるが、地震時の安定性解析を実施する場合には負の値も取り得るため、上記の設定とした。なお、スライス間力の傾角の上限値は、想定されるすべり線角度に応じて適切に設定する必要がある。まず、初期設定として、すべり線座標を設定した後、スライス間力の傾角 θ を最小値の -60° とする。次に、スライス間力とモーメントの総和がゼロになるように Newton - Raphson 法等により安全率 FS_Q と FS_{QR} をそれぞれ求める。解が存在するためには、スライス間力の傾角 θ に対して FS_Q と FS_{QR} が連続で $FS_Q - FS_{QR}$ の符号が変化すればよい。本研究では、 $FS_Q - FS_{QR}$ の符号が変化しなければ、下記のようにスライス間力の傾角を更新し、安全率 FS_Q と FS_{QR} をそれぞれ求める。

$$\theta = \theta + \Delta\theta \quad (4)$$

ここで、 $\Delta\theta$ はスライス間力の傾角の増分値であり、本研究では 0.5° を用いた。スライス間力の傾角が上限値に達しても $FS_Q - FS_{QR}$ の符号が変化しなければ、解が存在しないとした。 $FS_Q - FS_{QR}$ の符号が変化した場合にはその時点におけるスライス間力の傾

図-2 解の存在を確認するフロー

角と安全率を保存して、以降の処理の初期値とする。なお、 $FS_Q - FS_{QR}$ の符号が変化しても、算定された安全率が明らかに非現実的である場合がある。このような場合には、拘束条件を設けて非現実的なすべり線を排除することとした。以下、安全率算定における拘束条件について説明する。

説明を容易にするため、まず Bishop 法による安全率を算定する際に用いる拘束条件を示した後、本研究で用いる拘束条件を説明する。Bishop 法では、安全率を下記のように求める。

$$FS = \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{W_i \tan \phi_i + c_i b_i}{m_{ai}} \right\}}{\sum_{i=1}^n W_i \sin \alpha_i} \quad (5)$$

ここで、 W_i はスライス i の重量、 ϕ_i はスライス i の内部摩擦角、 c_i はスライス i の粘着力、 b_i はスライス i の幅、 α_i はスライス i の底面の角度であり、 m_{ai} は下記のように求められる。

$$m_{ai} = \cos \alpha_i + \frac{\sin \alpha_i \cdot \tan \phi_i}{FS} \quad (6)$$

式 (5) に示されているように、Bishop 法では各スライスの抵抗成分を m_{ai} で割る。したがって、仮に m_{ai} が極端に小さい場合には、式 (5) の分子が大きくなり非現実的な安全率となる。このような現象は

斜面のり尻部で α_i が負の値をとる場合に生じる。例えば、式 (6) において、 $\phi_i = 30^\circ$ 、 $FS = 1.0$ 、 $\alpha_i = -60^\circ$ を代入すると $m_{ai} = 0.0$ となり、式 (5) における安全率は無限大と計算される。これを回避するため、文献 7) では、下記の拘束条件が課されている。

$$m_{ai} \geq 0.2 \quad (7)$$

一方、文献 8) では、下記の拘束条件が課されている。

$$m_{ai} \geq 0.5 \quad (8)$$

本研究では、式 (7) や式 (8) で設定された拘束条件を参考として、Spencer 法での拘束条件を設定した。Spencer 法ではスライス間力を下記のように求める。

$$Q_i = \frac{c'_i l_i + F_1 W_i + F_2 P_{wi} - F_3 (P_{si} - P_{si-1})}{FS \cos (\alpha_i - \theta_i) + \sin (\alpha_i - \theta_i) \tan \phi'_i} \quad (9)$$

ここで、 c'_i : 有効応力による粘着力、 l_i : スライス i の底面の長さ、 W_i : スライス重量、 P_{wi} : スライスの上辺に作用する水圧、 P_{si} : スライスの側面に作用する水圧であり、 F_1 、 F_2 、 F_3 は下記のように求められる。

$$F_1 = \{(1 + K_v) \tan \phi'_i - FS \cdot K_h\} \cos \alpha_i - (FS + FS \cdot K_v + K_h \tan \phi'_i) \sin \alpha_i \quad (10)$$

$$F_2 = \cos (\alpha_i - \beta_i) \tan \phi'_i - FS \sin (\alpha_i - \beta_i) \quad (11)$$

$$F_3 = FS \cos \alpha_i + \sin \alpha_i \tan \phi'_i \quad (12)$$

ここで、 β_i : スライス i の地表面の角度、 K_h : 設計水平震度、 K_v : 設計鉛直震度である。文献 4) によれば、Spencer 法による安全率算定における不安定性の要因の一つに、スライス間力 Q が異常に大きくなることが挙げられている。そこで、式 (6) と形式を揃えるため、式 (9) の分母と分子を FS で割り、 Q が異常に大きくならないように式 (9) の分母を用いて下記の拘束条件を設けた。

$$p_{ai} = \cos (\alpha_i - \theta) + \frac{\sin (\alpha_i - \theta) \cdot \tan \phi_i}{FS} > a \quad (13)$$

文献 4) によれば、 a の適切な値は 0.3~0.4 の範囲であると述べていることから、本研究では $a = 0.3$ とした。なお、式 (13) で示した拘束条件は、式 (6) と比較するとスライス間力の傾角を考慮した形になっている。

図-3 スライス間力傾角と安全率を求めるアルゴリズム

図-4 ステップ1におけるスライス間力傾角と安全率算定フロー

(2) スライス間力傾角とすべり線角度が等しい場合の処理

計算条件によっては、スライス間力の傾角 θ とすべり線の角度 α が等しい場合がある。この場合には、スライス間力の傾角 θ が変化しても安全率が変化しないため、安全率を求めるために繰り返し計算を行うと無限ループに陥る可能性がある。そのため、次のような処理を実施する。まず、すべり線座標とスライス間力の傾角の設定をした後、スライス間力の総和がゼロになるように Newton - Raphson 法等により安全率 FS_{Qa} を求める。次に、式 (4) を用い

てスライス間力の傾角 θ を増加させた後、再度、スライス間力の総和がゼロになるように安全率 FS_{Qb} を求める。この処理では、 $\Delta\theta$ を 1.0 とした。先に求めた安全率 FS_{Qa} と後に求めた安全率 FS_{Qb} が下式を満たす場合には、スライス間力の傾角 θ とすべり線の角度 α が等しいとして、得られた安全率を解とする。

$$FS_{Qa} - FS_{Qb} < \varepsilon_{FS} \quad (14)$$

ここで、 ε_{FS} は安全率の許容誤差であり、本研究では 1.0×10^{-10} を用いた。

(3) スライス間力傾角と安全率の算定法

ここでは、最も重要となるスライス間力の傾角と安全率を算定するアルゴリズムについて説明する。まず、図-3 に示すように、スライス間力の総和とモーメントの総和がゼロを満たす安全率は、それぞれスライス間力の傾角に応じて求められる。ここで、求めるべきスライス間力の傾角と安全率は、図-3 に示す二直線が交わった点である。そこで、ステップ1として、二つのスライス間力の傾角 θ_a と θ_b に対して、スライス間力の総和がゼロ ($\Sigma Q = 0$) を満たす安全率をそれぞれ FS_{Qa} と FS_{Qb} 、モーメントの総和がゼロ ($\Sigma QR = 0$) を満たす安全率をそれぞれ FS_{QRa} と FS_{QRb} として、図-3 に示す二直線の交点のスライス間力の傾角を下記のように求める (図-4)。

$$\theta = \frac{FS_{Qa} \cdot \theta_b - FS_{Qb} \cdot \theta_a + FS_{QRb} \cdot \theta_a - FS_{QRa} \cdot \theta_b}{FS_{Qa} - FS_{Qb} - FS_{QRa} + FS_{QRb}} \quad (15)$$

さらに、式 (15) で得られたスライス間力の傾角を用いて、スライス間力とモーメントの総和がゼロとなる安全率 FS_{Q1} と FS_{QR1} を求める。このスライス間力の傾角と安全率の平均値がステップ1の解となる。スライス間力とモーメントの総和がゼロを満たすそれぞれの安全率の差が許容誤差以内であれば、得られたスライス間力の傾角と安全率を解とする。許容誤差より大きい場合には、解の精度向上のため、ステップ2に進む。本研究ではこの処理での安全率の許容誤差を 1.0×10^{-4} とした。

ステップ2における操作を図-5 に示す。ステップ2は、ステップ1と同様な算定を実施するが、入力値が異なる。まず、ステップ1で得られた解を用いて、 $\theta_a = \theta_1$, $FS_{Qb} = FS_{Q1}$, $FS_{QRb} = FS_{QR1}$ と設定して、式 (15) によりスライス間力の傾角 θ_2 を求める。なお、 θ_a , FS_{Qa} , FS_{QRa} はステップ1と同じである。次に、スライス間力の傾角 θ_2 に対して、スライス間力の総和がゼロを満たす安全率 FS_{Q2} とモーメントの総和がゼロを満たす安全率 FS_{QR2} を求めた後、 $\theta_a = \theta_1$, $\theta_b = \theta_2$, $FS_{Qa} = FS_{Q1}$, $FS_{Qb} = FS_{Q2}$, $FS_{QRa} = FS_{QR1}$,

を確認している。

4. 提案アルゴリズムの有効性の確認

ここでは、既往の研究と比較して得られた解の妥当性を検証した後、Spencer法の安全率の算定における不安定性の要因について具体例を交えて示した後、提案アルゴリズムが有効に機能していることを示す。なお、以下の例題に用いる地盤材料の内部摩擦角と粘着力は有効応力表示であることに留意されたい。

(1) 例題 1

a) 解析モデルと解析ケース

例題 1 には、既往の研究^{1), 9), 10), 11), 12)}で例題として頻繁に用いられており、均一な地盤材料からなるモデルを選定した。図-6に解析モデルを示す。地盤材料の物性値も既往の研究^{1), 9), 10), 11), 12)}と同値であり、単位体積重量が 17.64 kN/m^3 、内部摩擦角が 10 度、粘着力が 9.8 kPa である。例題 1 における解析ケースとしては、1) 既往の計算結果との比較、2) 解が存在しない場合、3) スライス間力の傾角とスライス底面の角度が等しい場合の 3 ケースとした。なお、例題 1 で均一な地盤材料を有するモデルを選定した理由は、安全率算定における不安定性の基本的要因を把握することや第三者による検証のしやすさである。

b) 既往の計算結果との比較

表-1と図-7に既往の研究と提案法による安全率とすべり線を示す。表-1に示した既往の研究による安全率は、すべり線節点数の不明な場合を除き、すべり線節点数の小さい順に示した。概ね、すべり線節点数が大きくなると安全率が小さくなる傾向にある。また、図-7には表-1で示した算定結果の一部のすべり線を示しており、いずれの結果もほぼ同じすべり線であることが分かる。本研究では、最小安全率を求めることが目的ではなく、安全率算定における計算安定性に着目しているため、安全率算定方法を単純化し、すべり線の節点数を 4 とした。既往の研究で 4 節点のすべり線を論文中に図化しているのは文献 1) のみであることから、図-7に示すように文献 1) とほぼ同じすべり線座標を設定した。具体的には、節点 1 が (5, 5)、節点 2 が (7.8, 4.1)、節点 3 が (13.5, 5)、節点 4 が (18.9, 10) である。表-1に示す通り、本研究で算定した安全率は文献 1) による安全率とほぼ同じ値であることから、本研究で提案した算定法は妥当であることが分かる。なお、文献

図-5 ステップ 2 におけるスライス間力傾角と安全率算定フロー

図-6 解析モデル (例題 1)

$FS_{QRb} = FS_{QR2}$ と設定して、再度、式 (15) によりスライス間力の傾角 θ を求める。さらに、スライス間力の傾角 θ を用いて、スライス間力とモーメントの総和がゼロとなる安全率 FS_1 と FS_2 を求めた後、最終的な安全率を下記のように平均化して求める。

$$FS = \frac{FS_1 + FS_2}{2} \quad (16)$$

得られたスライス間力の傾角 θ と安全率 FS を用いて、スライス間力の総和とモーメントの総和を再度計算し、これらの値が許容誤差以内であれば、得られたスライス間力の傾角と安全率を解とする。許容誤差より大きい場合には、同様な操作を許容誤差以内に収まるように処理する。著者のこれまでの検討では、適切な初期値を設定した後、ステップ 1 とステップ 2 を実施することで、スライス間力とモーメントの総和は 1.0×10^{-4} 程度まで小さくなること

図-7 既往の研究と提案法によるすべり線（例題 1）

表-1 既往の研究と提案法による安全率（例題 1）

すべり線 探索法	安全率 算定法	すべり線 節点数	安全率	文献
Monte Carlo	Spencer	不明	1.324-1.333	(9)
PSO	Spencer	4	1.388	(1)
PSO	Spencer	7	1.350	(1)
GA	Spencer	8	1.324	(10)
PSO	Spencer	13	1.307	(1)
MPSO	M-P	14	1.308	(11)
PSO	Spencer	15	1.3249	(12)
なし	Spencer	4	1.394	本研究

M-P : Morgenstern and Price 法

図-8 スライス間力傾角に対する拘束条件（例題 1）

図-9 スライス間力傾角と安全率の関係（例題 1）

図-10 特殊なすべり線

1) は著者が実施した算定結果であり、本研究で算定した安全率と文献 1) で算定した安全率を比較するとわずかに異なっている。これは、文献 1) で用いたすべり線座標と本研究で用いたすべり線座標が若干異なっているためである。

前述したように、本研究では、式 (13) で示した拘束条件を課している。ここで、式 (13) の p_α とスライス間力の傾角 θ の関係を図-8 に示す。図-8 中の p_α として、節点 1 と節点 2 がなす角度 α_1 により $p_{\alpha 1}$ を求め、節点 2 と節点 3 がなす角度 α_2 により $p_{\alpha 2}$ を求め、節点 3 と節点 4 がなす角度 α_3 により $p_{\alpha 3}$ を求めた。図-8 から、式 (13) の拘束条件 $p_\alpha > 0.3$ を満たすには、スライス間力の傾角が下記の範囲内にあればよい。

$$-39.64^\circ < \theta < 47.63^\circ \quad (17)$$

図-9 にスライス間力の総和とモーメントの総和がゼロを満たすスライス間力の傾角と安全率の関係を示す。式 (13) を満たすスライス間力の総和とモーメントの総和が同時にゼロを満たす点は、スライス間力が 14.44 度で安全率が 1.394 となる。前述したように、解を探索するスライス間力の傾角の範囲として、本研究では -60° から 60° の範囲としており、スライス間力の傾角と安全率の関係は一見連続した関数のように見えるものの、スライス間力が 62° 付近で不連続となることを確認している。この例が示すように、複数の目的関数を満たす複数の解（安全率とスライス間力の傾角）を求める場合には適切な初期値を設定し、拘束条件を用いて解の範囲を限定して求めることが効率的となる。

c) 解が存在しない場合

図-10 に解が存在しないすべり線を示す。このすべり線は、すべり線角度 α_1 が急になるように任意に設定した。図-11 に式 (13) の p_α とスライス間力の傾角の関係を示す。図-8 と比較すると、節点 1 と節点 2 がなす角度 α_1 と節点 2 と節点 3 がなす角度 α_2 が急になったため、スライス間力の傾角の上限値が下がり、下限値が上がったことで、スライス間力の傾角が取り得る範囲が狭くなった。図-11 から、式 (13) の拘束条件 $p_\alpha > 0.3$ を満たすには、スライス間力の傾角が下記の範囲内にあればよい。

$$-20.89^\circ < \theta < 9.14^\circ \quad (18)$$

図-12 にスライス間力の総和とモーメントの総和がゼロを満たすスライス間力の傾角と安全率の関係を示す。式 (13) で示された範囲内では、スライス間力の総和とモーメントの総和が同時にゼロを満たす点

図-11 解が存在しない場合のスライス間力傾角に対する拘束条件 (例題 1)

図-12 解が存在しない場合のスライス間力傾角と安全率の関係 (例題 1)

図-13 スライス間力傾角とスライス底面が等しい場合のスライス間力傾角に対する拘束条件 (例題 1)

図-14 スライス間力傾角とスライス底面が等しい場合のスライス間力傾角と安全率の関係 (例題 1)

は存在しないことから、解が存在しないこととなる。なお、有効範囲外ではあるものの、スライス間力の傾角が 43° において、スライス間力の傾角と安全率の関係が不連続となっていることが分かる。

図-15 解析モデル (例題 2)

表-2 解析用値 (例題 2)

層	単位体積重量 (kN/m ³)	粘着力 (kPa)	内部摩擦角 (度)
1	19.5	0.0	38.0
2	19.5	5.3	23.0
3	19.5	7.2	20.0

d) スライス間力傾角とスライス底面角度が等しい場合

図-10 にスライス間力の傾角とスライス底面の角度が等しい場合のすべり線を示す。このすべり線は、一般に平面すべりと呼ばれるすべり線であり、本検討では任意に設定した。これまでの検討と同様に、式 (13) の p_α とスライス間力の傾角 θ の関係を図-13 に示す。この例では、考慮するスライス間力の傾角の範囲内において、 $p_\alpha > 0.3$ を満たしていることが分かる。図-14 にスライス間力の総和とモーメントの総和がゼロを満たすスライス間力の傾角と安全率の関係を示す。式 (9) が示すように、スライス間力の傾角とスライス底面の角度が等しい場合では、スライス間力の傾角によらずスライス間力が一意に定まることになり、安全率が求められる。図-10 よりスライス底面の角度は 18.43° となることから、スライス間力の傾角も 18.43° となり、式 (2) と式 (9) を用いて安全率が 2.751 となる。図-14 に示すように、この点はスライス間力とモーメントの総和が同時にゼロを満たすことが分かる。

(2) 例題 2

a) 解析モデルと解析ケース

例題 2 は、既往の研究^{1), 13)}を参考に、地震時の安全率の算定における不安定性把握のために選定した。図-15 と表-2 に例題 2 の解析モデルと解析用値を示す。例題 1 と同様に解析用値は既往の研究^{1), 13)}と同値である。例題 2 は 3 層から構成された斜面モデルである。例題 2 における解析ケースとしては、1) 地震時の水平震度を 0.15 とした既往の計算結果との比較、2) 地震時の水平震度を 0.3 とした震度による影響把握の 2 ケースとした。

b) 既往の計算結果との比較

表-3 と図-16 に既往の研究と提案法による安全率

表-3 既往の研究と提案法による安全率 (例題 2)

すべり線 探索法	安全率 算定法	すべり線 節点数	安全率	文献
PSO	Spencer	4	1.004	(1)
PSO	Spencer	7	0.973	(1)
MHM	Spencer	20	0.9783	(13)
PSO	Spencer	21	0.9785	(13)
なし	Spencer	4	0.999	本研究

注：図中の座標は本研究で用いた座標

図-16 既往の研究と提案法によるすべり線 (例題 2)

図-17 スライス間力傾角に対する拘束条件 (例題 2)

図-18 スライス間力傾角と安全率の関係 (例題 2)

図-19 水平震度が 0.3 の場合のスライス間力傾角と安全率の関係 (例題 2)

とすべり線を示す。表-1 と同様に、表-3 に示した既

往の研究による安全率は、すべり線節点数の小さい順に示した。また、図-16 には表-1 で示した算定結果のすべり線を示しており、いずれの結果もほぼ同じすべり線であることが分かる。先の検討と同様に、本検討においても安全率算定方法の単純化のため、すべり線の節点数を 4 とした。例題 1 と同様に、図-16 に示すように文献 1) とほぼ同じすべり線座標を設定した。具体的には、節点 1 が (30, 25)、節点 2 が (36, 25)、節点 3 が (44.4, 27.9)、節点 4 が (51.5, 35) である。表-3 に示す通り、本研究で算定した安全率は文献 1) による安全率とほぼ同じ値であることから、本研究で提案した算定法は妥当であることが分かる。

図-17 に、式 (13) の p_α とスライス間力の傾角 θ の関係を示す。節点 2 と節点 3 を結ぶすべり線は、第 2 層と第 3 層を通過しているため、それぞれの層が有する内部摩擦角で式 (13) の p_α を算定した。図-18 から、式 (13) の拘束条件 $p_\alpha > 0.3$ を満たすには、スライス間力の傾角が下記の範囲内にあればよい。

$$-60.0^\circ < \theta < 53.60^\circ \quad (19)$$

図-18 にスライス間力の総和とモーメントの総和がゼロを満たすスライス間力の傾角と安全率の関係を示す。式 (13) を満たすスライス間力の総和とモーメントの総和が同時にゼロを満たす点は、スライス間力が 10.15° で安全率が 0.999 となる。

c) 震度の影響

ここでは、震度の影響を把握するために、水平震度を 0.3 としてスライス間力の総和とモーメントの総和がゼロを満たすスライス間力の傾角と安全率を算定した。図-19 に算定結果を示す。式 (13) を満たすスライス間力の総和とモーメントの総和が同時にゼロを満たす点は、スライス間力の傾角が -2.55° で安全率が 0.737 となり、スライス間力の傾角が水平震度の影響により負の値をとることが分かる。

(3) 例題 3

a) 解析モデルと解析ケース

例題 3 は既往の研究^{1), 13)}を参考に選定したモデルであり、斜面内に弱層が介在し非円弧の形状を有するすべり線を検討対象とした。図-20 と表-4 に例題 3 の解析モデルと解析用値を示す。例題 1 や例題 2 と同様に解析用値は既往の研究^{1), 13)}と同値である。例題 3 における解析ケースとしては、既往の計算結果との比較のみとした。

b) 既往の計算結果との比較

表-5 と図-21 に既往の研究と提案法による安全率

図-20 解析モデル (例題 3)

表-4 解析用値 (例題 3)

層	単位体積重量 (kN/m ³)	粘着力 (kPa)	内部摩擦角 (度)
1	19.0	15.0	20.0
2	19.0	17.0	21.0
3	19.0	5.0	10.0
4	19.0	35.0	28.0

表-5 既往の研究と提案法による安全率 (例題 3)

すべり線 探索法	安全率 算定法	すべり線 節点数	安全率	文献
PSO	Spencer	4	1.218	(1)
PSO	Spencer	13	1.090	(1)
GA	Spencer	14	1.1117	(13)
なし	Spencer	4	1.220	本研究

図-21 既往の研究と提案法によるすべり線 (例題 3)

図-22 スライス間力傾角に対する拘束条件 (例題 3)

とすべり線を示す。先の検討と同様に、本検討においても安全率算定方法の単純化のため、すべり線の節点数を 4 として、図-21 に示すように文献 1) とほぼ同じすべり線座標を設定した。表-5 に示す通り、本研究で算定した安全率は文献 1) による安全率と

図-23 スライス間力傾角と安全率の関係 (例題 3)

ほぼ同じ値であることから、本研究で提案した算定法は妥当であることが分かる。

図-22 に、式 (13) の p_α とスライス間力の傾角 θ の関係を示す。節点 3 と節点 4 を結ぶすべり線は、第 1 層、第 2 層、第 3 層を通過しているため、それぞれの層が有する内部摩擦角で式 (13) の p_α を算定した。図-22 から、式 (13) の拘束条件 $p_\alpha > 0.3$ を満たすには、スライス間力の傾角が下記の範囲内であればよい。

$$-39.36^\circ < \theta < 60.0^\circ \quad (20)$$

図-23 にスライス間力の総和とモーメントの総和がゼロを満たすスライス間力の傾角と安全率の関係を示す。図-23 から、式 (13) を満たすスライス間力の総和とモーメントの総和が同時にゼロを満たす点は、スライス間力が 7.54° で安全率が 1.220 となった。特筆すべきことに、例題 3 では、スライス間力の傾角が -60° から 60° の範囲において、スライス間力の総和とモーメントの総和がゼロを満たす点が複数存在した。本検討では、小さい方の解は式 (13) を満たさないため除外したが、すべり線の設定によっては、考慮するスライス間力の傾角の範囲内で、式 (13) の拘束条件を満たす解が複数存在する可能性を否定できない。このような場合には、何らかの処理が必要となるものの、著者のこれまでの経験では、考慮すべきスライス間力の傾角の範囲内において、このような状況に遭遇したことがない。解が複数存在する場合の処理については今後の検討課題とした。

5. まとめ

本論文では、非円弧すべりを仮定した安全率算定法のうち Spencer 法に着目して、Spencer 法の安全率の算定における不安定性の要因を明らかにし、その問題点を改善した安定性の高い安全率算定アルゴリ

ズムを示した。Spencer 法の安全率の算定における不安定性の要因として、設定したすべり線座標で解が存在しない場合があること、スライス間力の傾角とすべり線の角度が等しい場合には特別な処理が必要であること、スライス間力の総和とモーメントの総和がゼロを満たすスライス間力の傾角と安全率の関係が非線形、不連続であることを計算例と併せて具体的に示した。これらの要因に起因する不安定性を改善するために、単純なアルゴリズムと拘束条件を設けることで効率よく安全率を算定できることを示した。

Spencer 法は、厳密な解を与えるもののその計算の不安定さから実務で適用される例が少ない。本研究で安定性の高い Spencer 法による安全率の算定が可能となったことで、円弧すべりが仮定できない複雑な地層における自然斜面に対して、設計と防災の両面からの適用が考えられる。なお、本研究で作成したプログラムは公開を予定している。提案法が実務に適用され、斜面の合理的な評価が実施されることを期待する。

参考文献

- 1) 篠田昌弘：効率的な非円弧すべり探索法を用いた斜面の安全率算定法，土木学会論文集 C，Vol. 69，No. 4，pp. 432-443，2013.
- 2) Spencer, E. : A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel inter-slice forces, *Géotechnique*, Vol. 17, pp. 11-26, 1967.
- 3) Spencer, E. : Thrust line criterion in embankment stability analysis, *Géotechnique*, Vol. 23, No. 1, pp. 85-100, 1973.
- 4) Baker, R. : Determination of the critical slip surface in slope stability computations, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 4, pp. 333-359, 1980.
- 5) 古屋保：Spencer 法の一般分割法についての考察，地すべり，第 34 巻，第 2 号，pp. 35-41，1997.
- 6) Krahn, J. : The 2001 R. M. Hardy lecture: The limits of limit equilibrium analyses, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 40, No. 3, pp. 643-660, 2003.
- 7) Whitman, R. V. and Bailey, W. A. : Use of computer for slope-stability analysis, *Journal of Soil Mechanics and Foundation Division*, ASCE, pp. 475-498, 1967.
- 8) 石原研而：土質力学，丸善，pp. 279，1988.
- 9) Greco, V. R. : Efficient Monte Carlo technique for locating critical slip surface, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 122, No. 7, pp. 517-525, 1996.
- 10) Sun, J., Li, J. and Liu, Q. : Search for critical slip surface in slope stability analysis by spline-based GA method, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 134, No. 2, pp. 252-256, 2008.
- 11) Khajehzadeh, M., Taha, M. R., El-Shafie, A. and Eslami, M. : Locating the general failure surface of earth slope using particle swarm optimisation, *Civil Engineering and Environmental Systems*, Vol. 29, pp. 41-57, 2012.
- 12) Cheng, Y. M., Li, L., Chi, S. -C. and Wei, W. B. : Particle swarm optimization algorithm for the location of the critical non-circular failure surface in two-dimensional slope stability analysis, *Computer and Geotechnics*, Vol. 34, pp. 92-103, 2007.
- 13) Cheng, Y. M., Li, L. and Chi, S. C. : Performance studies on six heuristic global optimization methods in the location of critical slip surface, *Computer and Geotechnics*, Vol. 34, pp. 462-484, 2007.

(2014. 10. 17 受付)

ALGORITHM OF SAFETY FACTOR CALCULATION OF SLOPE WITH ASSUMED NON-CIRCULAR SLIP SURFACE BY SPENCER METHOD

Masahiro SHINODA

Safety calculation methods of slope were presented more than 70 years ago and various methods have been presented in the past. Slip surface of the safety factor calculation method of slope practically adopted assumed to be circular. Because it has small number of parameters, simple algorithm, efficient and high computation stability. On the other hand, one of the safety factor calculation methods of slopes with non-circular slip surface is Spencer method, which has complex algorithm and low computation stability. In this research, factors of computation instability in the safety factor calculation of slope by Spencer method were revealed and improved algorithm of the safety factor calculation method with high computation stability was presented.