急勾配河川におけるCRD法の適用性

ON THE APPLICABILITY OF CRD SCHEMES IN STEEP GRADIENT RIVER

堀江克也¹・森明巨²・平井康幸³・西本直史⁴
Katsuya HORIE, Akio MORI, Yasuyuki HIRAI, and Naoshi NISHIMOTO

¹正会員 工修 いであ株式会社 水圏事業本部河川部 (〒154-8585 東京都世田谷区駒沢3-15-1)

²正会員 工博 いであ株式会社 水圏事業本部河川部 (〒060-0062 北海道札幌市中央区南二条西9-1-2)

³正会員 寒地土木研究所 寒地河川チーム (〒062-8602 北海道札幌市豊平区平岸1条3丁目1-34)

⁴正会員 博(工) いであ株式会社 水圏事業本部 (〒154-8585 東京都世田谷区駒沢3-15-1)

Stream flows with steep gradient bed form complicating flow configurations, where super-critical and sub-critical flows co-exist. Computing numerically such flows are the key to successful river management. Contour-integral-based residual distribution, CRD, schemes are one of the numerical computation to simulate the flow with shock waves. In the last fiscal year, the Authors applied the CRD schemes to one dimension and two dimensions of the open channel flow, and showed validity as compared with the experiment-with-a-model result or the theoretical value. However, in the paper, application has not carried out the CRD schemes to a natural river. In this paper, the CRD schemes are applied for the Toyohira River of a steep slope municipal river, and the applicability in a natural river is shown.

Key Words : numerical computation, contour-integral-based residual distribution, steep gradient river, compound river, shock capturing

1. はじめに

急勾配河川や河川構造物周辺等では常流・射流混在流が発生するが、このような流れ場の水理量(水位, 流向, 流速等)の精度よい解析は, 河川整備や河川管理等の検討において重要である。例えば, 堤防及び低水護岸の設計に用いる代表流速 V_0 は, マニングの平均流速公式で算定した平均流速に補正係数を乗じて算定する方法が一般的である¹⁾が, 堰や床止め等の横断構造物周辺や低水路平面形状が大きく変化する場では V_0 の適切な算定が困難となる。このような場では精度の良い数値計算が有用となる。

常流・射流混在流の計算はMacCormack法²⁾、CIP法³⁾、Residual Distribution (RD) schemes⁴⁾⁵⁾⁶⁾など現在までに多くの数値モデルが提案されているが、その一つとしてCRD法⁷⁾がある。CRD法は不連続解を持つ流れの多次元解析法として開発され、MacCormack法のように陽的に人工粘性を加える必要がない。また、RD法のように複雑な線形化を必要とせず、単純平均で充分で、二次元河床変動解析への適用が容易である。さらに、平面二次元計算では有限要素法のように非構造の三角形格子を用いるので複雑な地形の扱いが容易である。一つの計算要素ごとに独立して計算するためベクトル化も簡単である。

著者らは、昨年度の論文⁸⁾においてCRD法を開水路流れの一次元と二次元問題に適用し、水理模型実験結果やダム破壊流れなどの理論値と比較しその有効性を示した。しかしながら、それらの検証は比較的簡単な河道形状を対象としており、実河川での洪水流を対象にした検証は行っていない。そこで本論文では、水理模型実験により詳細な水理量のデータが得られている急流都市河川の豊平川を対象として、CRD法の適用性を調べる。また、実河川にCRD法を適用する際の境界条件や抵抗項の取り扱いについて示す。

2. 計算法

(1) CRD法

二次元一階双曲型偏微分方程式を式(1)で表す。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \mathbf{F} + \mathbf{\Omega} = 0 \quad (1)$$

ここに、 ϕ は保存変量、 $\mathbf{F}$ は流束である。ガウスの発散定理を使えば、式(1)は式(2)に書き換えられる(簡単のため $\mathbf{\Omega} = 0$ とする)。

$$\int_A \frac{\partial \phi}{\partial t} dA + \Phi^T = 0 \quad (2)$$

図-1 CRD法における計算点(三角形の頂点におく)

(a) 点1に配分する (b) 点2,3に配分する

図-2 Residualの配分法—波動の伝播する $\mathbf{a}$ の方向に配分

$$\Phi^T = \int_T \nabla \cdot \mathbf{F} dA = \oint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{n}$$

ここに、 Φ^T はResidualと呼ばれる。 A は計算点の支配面積、 $\mathbf{n}$ は計算領域の境界線に外向きの垂直ベクトル、 T は計算要素（ここでは三角形）を表す。 Φ^T を式(3)に示す係数 β_i^T に応じて、計算点 i へ配分する。

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \beta_i^T \Phi^T \quad (3)$$

ここに、 n は時間ステップ、 $\sum_i \beta_i^T = 1$ である。

計算単位は、平面二次元計算では非構造の三角形格子を用いる。計算点は三角形の頂点（Cell-vertex）にとり（図-1）、1つの三角形格子（計算要素）ごとに独立してResidual Φ^T を計算する。

式(2)に左固有ベクトル L を作用させて固有ベクトル空間に変換し、 $L\Phi^T$ をInflow parameter $k_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i / 2$ の符号が正の方向に配分する（風上スキーム）。ここに、 $\mathbf{a}$ は波動の伝播速度、 $\mathbf{n}_i$ は辺に垂直で計算要素に内向きのベクトルである。図-2(a)のように $k_i > 0$ が1点の場合は点1に配分する。(b)のように2点に向かう場合には多くの方法が提案されているが、本論文では k_i の比に応じて配分する(4)式の方法を用いる。得られた配分に右固有ベクトル R を作用させて元の空間に戻し、 Δt 後の保存変数 ϕ を算定する。一次元計算でも同様である。

$$\text{LDA-scheme}^{(4)} \begin{cases} \beta_2 = k_2 / (k_2 + k_3) \\ \beta_3 = k_3 / (k_2 + k_3) \end{cases} \quad (4)$$

(2) 基礎方程式

一次元浅水流方程式は(1)式において、

$$\phi = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + g[A]H \end{pmatrix}, \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ fQ \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここに、 A は河積、 Q は流量、 g は重力加速度、 H は水位、 $f = gn^2q/h^{7/3}$ 、 n はマンニングの粗度係数、 q は単位幅流量、 h は水深である。なお、 $[\]$ は計算要素の平均を表し定数として扱う。

平面二次元計算の基礎方程式は、

$$\phi = \begin{pmatrix} h \\ q_u \\ q_v \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hv \\ q_u \mathbf{v} + g[h]H\mathbf{i} \\ q_v \mathbf{v} + g[h]H\mathbf{j} \end{pmatrix}, \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ fq_u \\ fq_v \end{pmatrix} \quad (6)$$

ここに、 $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ 、 u, v は x, y 方向の水深平均流速、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ は x, y 方向の単位ベクトル、 $q_u = uh$ 、 $q_v = vh$ である。

(3) Entropy Fix

一次元のCRD法では支配断面で膨張衝撃波を許すが、そのEntropy Fixとして一次元河床変動計算の利用⁸⁾を用いる。詳細は文献8)を参照。

(4) 抵抗項の取り扱い

水深がゼロに近く流速が速い場合、式(6)の抵抗項が非物理的な値となる。したがって、水深が極端に浅くなる計算点が発生する二次元計算においては、 Δt 後の保存変数 ϕ^{n+1} を算出する際に式(7)に示すように抵抗項を陰的に取り扱う。なお、一次元の場合は陽的な取り扱いで計算が安定している。

$$\begin{pmatrix} h \\ (1 + f\Delta t)q_u \\ (1 + f\Delta t)q_v \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} h \\ q_u \\ q_v \end{pmatrix}^n - \frac{\Delta t}{A_i} \beta_i^T \Phi^T \quad (7)$$

(5) 上流端条件、下流端条件

二次元計算においては、上下流端には下流からの擾乱が伝わらないように助走区間を設ける。上流端では勾配が緩い貯水槽のようなものを設け、上流端の計算点で任意の流量 (q_u , q_v) を与える。下流端の計算点では自由水面を想定し圧力水頭をゼロとする。

一次元のCRD法については文献4)に示した。

(6) 壁面条件

壁面の計算点において計算領域外へ向かう流速成分がゼロとなるように計算領域外から特性波 $\partial\omega$ を与える。

$$\partial\phi = R\partial\omega \quad (8)$$

図-3 豊平川大型水理模型実験の対象位置図

図-4 豊平川水理模型実験の河床高と実験水位縦断面図

3. 豊平川へのCRD法の適用

豊平川は大都市を流れる急流河川であり、昭和56年洪水では低水護岸や高水敷上の施設等で多数の被害が発生した。このことから、開発土木研究所（現：寒地土木研究所）では昭和56年洪水時の洪水流下特性を確認するため、縮尺1/50の大型水理模型実験を行っている。本論文では、平成元年と平成2年に行った昭和56年洪水の固定床水理模型実験^{9) 10)}について、一次元と平面二次元のCRD法を用いた同様の計算を行い適用性の検討を行う。なお、河床変動計算を利用した一次元計算を1D-CRDz、平面二次元計算を2D-CRDと記述する。計算の時間刻みにはCFL条件を用いた。

(1) 水理模型実験の概要

豊平川水理模型実験の対象区間はKP12.0からKP18.0である（図-3）。この区間は床止めが縦断的に連続しており、河床は1/150～1/280の急勾配である。河道は複断面であり、平均川幅の約200mに対して低水路幅は約90mと半分程度である。模型の河床形状は昭和56年8月洪水直後（昭和56年9月測量）の河川横断測量結果を用いている。対象流量は昭和56年8月洪水ピーク流量の1,417m³/s、

粗度係数は洪水痕跡水位からの逆算により低水路0.033、高水敷0.045を用いている。

実験結果の水位縦断面図を図-4に示す（実験水位は実際の水位に換算した値である）。実験水位と洪水痕跡水位と比較するとKP14.0を除いてほぼ一致している。3号床止、5号床止、6,7号床止の下流では、低水路河床高の落差により局所的に跳水が発生しているが、高水敷の水位が高いために低水路と高水敷では水位差が発生している。

(2) 計算条件

a) 一次元計算

実験結果から昭和56年8月洪水では流量の約90%が低水路部分を流れたと言われている。このため一次元計算は、低水路の河積のみで計算した場合（単断面）と合成粗度を用いて河道全体で計算した場合（複断面）の2ケースの計算を行い、低水路と高水敷の分担流量を推定する。河道断面は実験に用いた昭和56年9月測量（床止箇所以外は $\Delta x = 200\text{m}$ ）を用い、上流から1,417m³/sの一定流量を与え定常となるまで計算を行った。下流端水位はKP12.0の痕跡水位10.790mとし、粗度係数は模型実験条件と同様とした。

b) 平面二次元計算

平面二次元計算の計算格子は、一辺が10m程度の三角

図-5 河床高コンター図 (2D-CRD)

図-6 2D-CRDにおけるメッシュ図 (一部抜粋)

図-7 計算水位縦断面図

形格子とし (図-5, 図-6), 計算流量と粗度係数は比較のため模型実験と同様とした。

(3) 計算結果と実験値の比較

a) 計算水位

水位縦断の計算結果を図-7に示す。1D-CRDz (複断面) では、5号床止と6号床止下流の跳水部でやや実験値に比べて低くなったが、全川の的に実験値を良好に再現している。この跳水部の水位差は高水敷と低水路の流れの干渉の影響が含まれていないためと考えられる。1D-CRDz (単断面) は、1D-CRDz (複断面) と比較して平均0.3m程度の高い水位となった。この差は高水敷の流量の分担によるが、その流量を平均川幅と平均流速 (約 $200\text{m} \times \text{約} 4.0\text{m/s}$) から試算すると、17%程度の分担流量

があると推定される。なお、8号床止上流は1D-CRDz (単断面) の水位が高くなっているが、この区間は高水敷の分担流量が大きいと考えられる。

2D-CRDの水位は断面平均値である。4号床止より下流において実験値よりやや高いが、4号床止上流では良く一致している。5号床止、6,7号床止下流では高水敷平均水位と低水路平均水位の差が生じているが、計算結果もその特徴を捉えており適合性は良い。なお、4号床止下流で水位が全体的にやや高くなっていることについては、今後詳細に確認が必要と考えられる。

b) フルード数

フルード数の計算結果を図-8に示す。2D-CRDのフルード数は断面平均値である。1D-CRDz (単断面), 1D-CRDz (複断面), 2D-CRDともに3号床止, 5号床止,

図-8 Froude数縦断面

図-9 Froude数分布図 (2D-CRD)

6,7号床止下流でフルード数がいずれも1.7程度となり概ね一致している。2D-CRDのフルード数の平面分布を図-9に示す。全川的にはフルード数1.0以下の常流で流れるが、床止周辺部（主に低水路）で射流が発生している。

c) 低水路と高水敷の分担流量

図-10は、低水路と高水敷の分担流量の2D-CRDと実験結果との比較である。8号床止上流では計算値と実験値に乖離が見られるが、これは上流端の境界条件の違いによると考えられる。KP17.2より下流区間で比較を行った。実験値では低水路の分担流量が95%程度となっているが、計算値は約87%とやや小さい。しかし、上記a)の1D-CRDzの結果とは近い値となっている。図-11は計算値と実験値の流速を比較したものであるが、高水敷の流速は概ね一致している。このことから、分担流量の計算値と実験値の乖離は、実験の低水路流速がやや大きく測定されたためと考えられる。

d) 床止周辺の流れ

落差の大きい5号床止、6,7号床止に着目して、2D-CRDの流れの適用性を確認した（図-12）。

計算水位のコンター図ではいずれの床止においても床止下流の低水路で水位低下が生じている。このため、流速ベクトル図に示すように、高水敷から低水路へ流入する流れ（落ち込み流）が発生している。また、床止下流から200m程度下流では逆に低水路から高水敷への乗り上げが生じている。これらの流向は実験においても確認されていて、流れの特徴を良く捉えている。床止下流の

図-10 2D-CRDにおける低水路と高水敷の分担流量

図-11 流速縦断面図

高水敷と低水路の横断水位差（5号床止で約2.5m、6号床止で約1.5m）についても同様に、その値と形状において計算と実験は概ね一致している。

4. おわりに

本論文では、不連続解を持つ流れの多次元解析法として開発されたCRD法を急流都市河川の豊平川に適用し、実河川・実スケールでの適用性について検討した。

一次元計算では、複断面の合成粗度を用いた単断面的な計算法においても実験水位をよく表していた。ただし、床止下流の跳水部における水位がやや低くなる傾向がみられた。平面二次元計算では、床止下流における高水敷から低水路への落ち込み流や乗り上げについて、実験結果の流れの特徴を表しており、床止下流の横断水位も実験値とよく適合していた。

このことから、急勾配で縦断的に床止が連続する複雑な流れにおいても、CRD法を用いた一次元、平面二次元の計算の適合性は良く、充分、実用に適した計算法であると考えている。

謝辞：本研究では、株式会社水工リサーチの工藤久良、岡田操、加藤一夫、小川芳樹各位に豊平川水理模型実験のデータを整理して頂いた。ここに記して感謝の意を表します。

図-12 5号床止～6,7号床止周辺の計算結果

参考文献

- 1) 山海堂, 改定護岸の力学的設計法, 国土技術研究センター編, 2007.
- 2) 例えば崇田徳彦, 清水康行, 渡邊康玄: MacCormack法を用いた常・射流計算, 北海道開発局開発土木研究所月報, No.448, pp.23-32, 1990.
- 3) 清水康行, 藤田睦博, 平野道夫: 連続床止め工を有する複断面河道における流れと河床変動の計算, 水工学論文集, 第43巻, pp.683-688, 1999.
- 4) H.Paillere, and H.Deconinck.: Compact Cell Vertex Schemes on Unstructured Meshes. In "Euler and Navier-Stokes Solvers Using Multi-Dimensional Upwind Schemes and Multigrid Acceleration" Edited by Herman Deconinck and Barry Koren, Vieweg, 1997
- 5) 西本直史, 森明巨, 板倉忠興, 金澤克己: FDS法による1次元開水路流れの数値解析, 土木学会論文集, No.670/II-54, pp.25-36, 2001.

- 6) 秋山壽一郎, 重枝未玲, 鬼束幸樹, 白川寛樹: 平面2次元数値モデルによる急流都市河川の流況解析, 水工学論文集, 第48巻, pp.631-636, 2004.
- 7) Arpad Csik., Mario Ricchiuto, and Herman Deconinck.: A Conservative Formulation of the Multidimensional Upwind Residual Distribution Schemes for General Nonlinear Conservation Laws, Journal of Computational Physics, 179, pp.286-312, 2002.
- 8) 堀江克也, 岡村誠司, 小林雄介, 兵藤誠, 樋田祥久, 西本直史, 森明巨: CRD法を用いた常流・射流混在流れの数値解析, 水工学論文集, 第55巻, pp.1189-1194, 2011.
- 9) 北海道開発局開発土木研究所, 財団法人河川環境管理財団: 平成元年度豊平川大型水理模型実験業務報告書, 1989.
- 10) 北海道開発局開発土木研究所, 財団法人河川環境管理財団: 平成2年度豊平川大型水理模型実験業務報告書, 1990.

(2011. 9. 30受付)