浅水流方程式と平衡流砂量式を基本とした 河床変動計算モデルに関する検討

岩崎理樹¹・清水康行²・木村一郎³

¹正会員 北海道大学工学研究院 (〒 060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

E-mail: t.iwasaki@eng.hokudai.ac.jp

²正会員 北海道大学教授 工学研究院 (同上)

³正会員 北海道大学准教授 工学研究院 (同上)

本研究では、浅水流方程式と平衡流砂量式を基本とした河床変動モデルの特性と安定性について、微小な河床擾乱の伝搬計算を通じて検討を行った。方程式系を線形化することで、河床擾乱の伝搬を示す双曲型微分方程式を導出し、河床擾乱の伝搬特性について明らかにした。この時、平衡流砂量式の枠組みでモデル化される流砂量に対する局所勾配の影響は河床擾乱を拡散させる作用を持つ。双曲型方程式を安定的に計算する条件である Péclet 数が 2 以下となる条件を満たすように格子幅を設定すれば、流砂量の空間微分に対して風上化を導入せずとも、方程式が持つ不安定性を合理的に散逸させつつ、安定的な河床変動計算を実行できることを示した。

Key Words : *shallow water flow model, equilibrium bed load formula, computational model, bed slope effect, Péclet number*

1. はじめに

計算機と数値計算技術の発達により、河川工学分野においても河川流とそれに伴う河床変動・河岸侵食過程を再現する数値計算モデルの構築が積極的に行われてきた。河床変動モデルの構築は、不等流モデルと平衡流砂量式を基本とした河川の縦断的な河床変動を扱う一次元モデル¹⁾に始まり、平面的な河床変動を計算する二次元モデルへの拡張^{2),3)}が行われ、工学的なツールとして大きく発展してきた。同時に、流体モデルや流砂モデルの深化に伴い、精緻な乱流モデルを組み合わせた鉛直二次元モデル⁴⁾や三次元モデル⁵⁾と、非平衡流砂モデルを組み合わせたより実現象を表現可能なモデルの開発が展開されている。近年では、土粒子の移動をラグランジュ的に追跡することにより、河床の連続体仮定や流砂モデルを陽に用いずに地形変動を計算するモデル^{6),7),8)}も構築され、流体 - 土砂粒子移動に伴う地形変動現象がより深く理解されることが期待される。一方で、モデルの精密化、高度化及び計算の大規模化に伴う計算機負荷の増大は、長期間の河床変動計算はもとより一洪水を対象としても無視できるものではない。これは急速な計算機関連技術の発達をもってしても直ちに解決できる問題ではないため、工学的な適用範囲は限定されることとなる。それゆえ現段階においては、要求される現象に応じてモデルを選択せざるを得ず、そのような面からすれば、浅水流方程式と平衡流砂量式による河床変動モデルはバランスのとれた解

析ツールであると考えられる。また、このモデルは河川のリーチスケールの河床変動・河岸侵食を解析する際に重要となる、砂州や蛇行といった河川が潜在的に有する不安定現象を表現できることが解析的に明らかにされている^{9),10)}。これらの方程式をベースに、詳細な要素モデルを追加していくことで、ある程度の精度を持って大局的な河川の河床変動を表現できることが期待される。

しかしながら、数値計算力学を背景とした河床変動計算の安定性については、流れ場の計算と比較して十分に検討されていないと考えられる。そのような背景からか、河床変動モデルの離散化、安定性、高精度化については流砂モデルの選択と比較してそれほど重視されていない。黒木ら¹⁾は、流れ場を不等流、掃流砂運動を平衡流砂量式で表した河床変動モデルに対して、これらを連立させた方程式が、河床高に対する双曲型方程式であることを示した。この時、河床擾乱の伝搬方向はフルード数により規定され、常流の場合は下流、射流の場合は上流に伝わる小規模河床波的な性質を持つ。このような性質を利用し、河床連続式における流砂量の空間微分に対して、常流では後退差分、射流では前進差分とする風上化を導入することにより、安定的な河床変動計算が可能となることが示されている。また、大川ら¹¹⁾、西本ら¹²⁾は非定常浅水流方程式と平衡流砂量モデルを組み合わせた方程式系に対して Flux Difference Splitting (FDS) 法¹³⁾を適用することにより、常射流混在場においても安定的に計算可能な河床変動モデルを

提案した。これらのモデルではFDS法の性質より、理論的に流れ、流砂量の風上化が導入される点が有利である。特に西本らは、これらの方程式系を移流方程式として考えることにより、3つの特性速度があることを示した。すなわち、先に示した不等流モデルを仮定して得られる河床擾乱の伝搬機構とは別に、流れ場から規定される河床擾乱の伝搬機構を示し、この性質により、不等流モデルではフルード数が1となる臨界点において風上化が定義できないという従来の計算モデルの欠点を取り除かれることを示した。Goutière et al.¹⁴⁾も西本らと同様のモデル方程式から同様の伝搬機構について考察を行い、計算手法としてはHarten, Lax and van Leer (HLL) 法¹⁵⁾を用いることで、安定的な河床変動モデルを構築している。一方、Hudson et al.¹⁶⁾, Long et al.¹⁷⁾は河床変動方程式の風上差分を高精度化する為に、双曲型微分方程式の数値解法に用いられるWeighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) 法¹⁸⁾を流砂量の差分に適用し、より数値粘性の少ない計算法を提案している。また、Cordier et al.¹⁹⁾は、河床変動計算において、流れと河床変動の計算を分離して解く場合、CFL条件が厳しい条件において計算が不安定になることを示している。このような高精度で安定な河床変動計算法は二次元モデルへの拡張が行われ、砂州や分岐部の河床変動計算に適用されている²⁰⁾。

このように、河床変動の擾乱の伝搬を安定的に計算するには、河床変動方程式が持つ双曲型の性質を考慮し、河床連続式の流砂量空間微分を適切な形で風上化を導入することが重要であり、数多くの数値計算モデルでもこのような差分方法が適用されている²¹⁾。しかしながら、このような検討では通常数値安定性に関する議論に重点が置かれ、風上化が河床変動に対してどの程度の影響を与えるかについてはそれほど検討されていない。また、本来掃流砂を基本とした河床変動は拡散的であることが知られている。これは、流砂量に対して局所的な河床勾配の影響が作用するためである。したがって、不適切な風上化では数値拡散により河床は安定するものの、物理的な拡散作用による河床変動を十分に考慮することができない場合も起こり得る。このような観点から、双曲型方程式を安定化させるために必要な風上化による数値拡散と、本来流砂現象に内在する河床勾配の影響から導入される物理的な拡散作用の関連については議論しておくことが望ましいといえる。特に、ここで議論した河床擾乱の伝搬方向から分かるように、この性質は小規模河床波と同様のものであり、浅水方程式と平衡流砂量式からなる河床変動モデルでは減衰すべき不安定成分である。準三次元モデルや非平衡モデルの導入を図らずに、数値的な不安定性により小規模河床波のような河床波が計算され

てしまえば、数値解の信頼性は著しく低下することとなる。また、このようなモデルの性能、適用範囲を理論的な背景の下で確立しておけば、将来的に流砂現象の素過程の解明が進み、これを利用した現在よりも合理的な流砂量モデルが構築された際に、より信頼性の高い河床変動モデルが構築できることとなる。

本研究は、一般に広く用いられる浅水方程式と平衡流砂量式を用いた河床変動モデルの計算法について、河床擾乱の伝搬機構に対する計算を通じて考察するものである。河床擾乱の伝搬機構と安定性を議論するために、方程式を線形化し、擾乱の伝搬を表現する双曲型の河床変動方程式を導出する。この線形化方程式から、風上化により導入される数値的な拡散作用と流砂に対する河床勾配の影響から導入される物理的な拡散作用の関係について明らかにし、格子幅を適切に選択すれば流砂量の空間微分に風上化を導入せずとも安定的な河床変動計算を行うことができることを示す。最後に、流砂量に対する河床勾配効果のモデル化の違いが、上記議論にどのような影響を及ぼすかについて、流砂量式としてMeyer-Peter and Müller式²²⁾に河床勾配項を導入したFredsoe式²³⁾とKovacs and Parker式²⁴⁾を取り上げ考察を行う。

2. モデルと安定性

(1) 基礎方程式

本研究では、簡単のために1次元の河床擾乱の伝搬機構について検討を行う。流れの支配方程式は、以下に示す1次元浅水方程式である。

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{u}\tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - g \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}} - C_f \frac{\tilde{u}|\tilde{u}|}{\tilde{h}} \quad (2)$$

ここに、 $\tilde{t}$: 時間、 $\tilde{x}$: 流下方向軸、 $\tilde{u}$: 水深平均流速、 $\tilde{h}$: 水深、 $\tilde{z}$: 河床高、 g : 重力加速度(=9.8m/s²)及び C_f : 抵抗係数であり、粗面の対数則を仮定すると以下のようになる。

$$C_f = \left[6 + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\tilde{h}}{k_s} \right]^{-2} \quad (3)$$

ここに、 κ : カルマン定数(=0.41)、 k_s : 河床面の相対粗度高さで、本研究では河床材料粒径の2.5倍とする。なお、 $\tilde{\cdot}$ は有次元の変数を意味する。

流砂モデルは、Fredsoe²³⁾が提案した河床勾配の影響を考慮したMeyer-Peter and Müller式²²⁾を用いる。

$$\frac{\tilde{q}_b}{\sqrt{s g \tilde{d}^3}} = A \left[\tau_* - \tau_{*c} \left(1 + \frac{1}{\mu_c} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}} \right) \right]^{3/2} \quad (4)$$

ここに、 $\tilde{q}_b$: 掃流砂量、 τ_* : シールズ数、 τ_{*c} : 限界シールズ数、 s : 土粒子の水中比重、 $\tilde{d}$: 土粒子の粒径及び

μ_c : クーロン動摩擦係数である. Fredsøe²³⁾は, 河床勾配の影響度合を表すパラメータを τ_{*c}/μ_c とし, これが 0.1 程度の値となることを述べている. 式 (4) の形では, このパラメータは限界掃流力と土粒子の摩擦係数 μ_c から決定される. μ_c は土粒子の安息角 ϕ に関連づけられ, $\mu_c = \tan \phi$ となるといわれている²⁴⁾. 土粒子の安息角はおおよそ $30 \sim 40^\circ$ であるため, μ_c は 0.58~0.84 程度の値をとることになる. Fredsøe は, $\tau_{*c} = 0.047$ としたため, μ_c は 0.47 と仮定していることになる²⁵⁾. この値は土粒子の安息角の観点からすると若干小さな値ではあるが, 非物理的な値ではないため, 本研究でも μ_c を 0.47 と設定した. なお, 限界シールズ数は岩垣式²⁶⁾により求めることとした. 従って, μ_c が固定値の場合, 河床勾配の影響度合を表すパラメータが限界シールズ数により変化することとなるが, Kovacs and Parker 式との比較を明確にするために, ここでは μ_c を固定値として扱うこととした.

河床連続式は掃流砂のみを考慮した以下の Exner 式を用いる.

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{1 - \lambda_p} \frac{\partial \tilde{q}_b}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad (5)$$

ここに, λ_p : 河床空隙率である.

(2) 線形化方程式

後に行う数値計算は前節に示した非線形方程式をそのまま用いるが, 基礎方程式の安定性や離散化について検討するために, 線形化方程式を導出する. これにより, 微小な河床擾乱の伝搬機構についての考察が可能となる. なお, ここでは簡単のため流れの方程式に対しては河床変動の時間スケールに対して流れの時間スケールが十分短いとする準定常近似を適用することにする.

まず, 基本変数に対して以下の無次元化を行う.

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{h}_0}{i_b} x, \quad \tilde{u} = \tilde{u}_0 u, \quad (\tilde{h}, \tilde{z}) = \tilde{h}_0 (h, z) \quad (6)$$

$$\tilde{t} = \tilde{T} t, \quad \tilde{q}_b = \tilde{q}_{b0} q_b \quad (7)$$

ここで, i_b : は平均河床勾配であり, 添え字 $_0$ は等流状態の値を意味する. また,

$$\tilde{T} = (1 - \lambda_p) \frac{\tilde{h}_0^2}{\tilde{q}_{b0} i_b} \quad (8)$$

$$\tilde{q}_{b0} = A \left[\tau_{*0} - \tau_{*c} \left(1 - \frac{i_b}{\mu_c} \right) \right]^{3/2} \sqrt{sgd^3} \quad (9)$$

$$\tau_{*0} = \frac{C_{f0} \tilde{u}_0^2}{sgd} \quad (10)$$

$$C_{f0} = \left[6 + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\tilde{h}_0}{k_s} \right]^{-2} \quad (11)$$

と定義する. これらを式 (1)~(5) に代入することにより, 以下の無次元化された式を導くことができる.

$$\frac{\partial u h}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{F_r^2} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{C_{f0}}{i_b} \frac{u|u|}{h C_{fh}} \quad (13)$$

$$q_b = \left[\frac{\tau_{*0} \frac{u^2}{C_{fh}} - \tau_{*c} \left(1 + \frac{i_b}{\mu_c} \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\tau_{*0} - \tau_{*c} \left(1 - \frac{i_b}{\mu_c} \right)} \right]^{3/2} \quad (14)$$

$$C_{fh} = \left(1 + \frac{1}{\kappa} C_{f0}^{1/2} \ln h \right)^{-2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial q_b}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

ここに, F_r : 等流状態のフルード数であり,

$$F_r = \frac{\tilde{u}_0}{\sqrt{g \tilde{h}_0}} \quad (17)$$

である.

ここで, 等流状態に対して以下のような摂動を与える.

$$(u, h, z) = (1, 1, -x) + (u_1, h_1, z_1) \quad (18)$$

ここで, 添え字 $_1$ は 1 次オーダーの摂動を意味する. この摂動を式 (12)~(16) に示す無次元方程式に代入し線形化を行えば, 以下の 1 次オーダーの方程式が得られる.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{1}{F_r^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{C_{f0}}{i_b} \left[2u_1 - \left(1 + \frac{1}{\kappa} C_{f0} \right) h_1 \right] \quad (20)$$

$$q_{b1} = 3 \frac{\tau_{*0}}{\theta_{01}} u_1 - \frac{3}{2\kappa} C_{f0}^{1/2} \frac{\tau_{*0}}{\theta_{01}} h_1 - \frac{3}{2} \frac{\tau_{*c} i_b}{\mu_c \theta_{01}} \frac{\partial z_1}{\partial x} \quad (21)$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{\partial q_{b1}}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

ここに,

$$\theta_{01} = \tau_{*0} - \tau_{*c} \left(1 - \frac{i_b}{\mu_c} \right) \quad (23)$$

である. 式 (19) を式 (20) に, 式 (19), (21) を式 (22) に代入すれば以下ようになる.

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = -\frac{1}{1 - F_r^2} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{F_r^2}{1 - F_r^2} \frac{C_{f0} C_{f2}}{i_b} h_1 \quad (24)$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} - 3 C_{f1} \frac{\tau_{*0}}{\theta_{01}} \frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{3}{2} \frac{\tau_{*c} i_b}{\mu_c \theta_{01}} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \quad (25)$$

$$C_{f1} = 1 + \frac{1}{2\kappa} C_{f0}^{1/2} \quad (26)$$

$$C_{f2} = 3 + \frac{1}{\kappa} C_{f0}^{1/2} \quad (27)$$

これらをまとめれば, 最終的に黒木ら¹⁾が示した河床変動方程式を線形化した微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{3}{1 - F_r^2} C_{f1} \frac{\tau_{*0}}{\theta_{01}} \frac{\partial z_1}{\partial x} \\ = \frac{F_r^2}{1 - F_r^2} S_o h_1 + \frac{3}{2} \frac{\tau_{*c} i_b}{\mu_c \theta_{01}} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (28)$$

$$S_o = \frac{3}{i_b} \frac{\tau_{*0}}{\theta_{01}} C_{f0} C_{f1} C_{f2} \quad (29)$$

(3) 河床擾乱の伝搬機構と安定条件

式(28)の微分方程式は、ソース項を含む移流拡散型の方程式であることがわかる。左辺第二項が、擾乱の伝搬を示す移流項となり、伝搬方向は従来の理論から明らかなように $F_r < 1$ の時は下流、 $F_r > 1$ の時は上流となる。また、右辺第二項は流砂量に対する局所勾配の影響から導出される項であり、常に正の拡散係数を持つ拡散項であるため、伝搬する河床擾乱は次第に拡散することとなる。

式(28)が示すように、浅水流方程式と平衡流砂量式を組み合わせた河床変動計算モデルにより計算を行う際には、流砂量空間微分の風上化と局所勾配による河床の拡散作用が重要な意味を持つ。移流拡散方程式を安定的に計算するためには、移流と拡散度合の比である Péclet 数、 P_e が 2 以下である必要がある。

$$P_e = \frac{\frac{3C_{f1}}{3} \frac{\tau_{*0}}{\theta_{01}}}{\frac{1}{2\mu_c\theta_{01}} \Delta x} = \frac{\mu_c C_{f1} \tau_{*0}}{i_b \tau_{*c} |1 - F_r^2|} \frac{2\Delta x}{|1 - F_r^2|} < 2 \quad (30)$$

この条件は、式(28)左辺第二項を風上化した際に現れる数値拡散項の係数が右辺第二項に示す流砂量に対する局所河床勾配の影響を考慮することにより得られる物理的な拡散項の係数より小さくなる条件である。すなわち、式(28)における河床擾乱の伝搬速度を

$$V_z = \frac{3}{1 - F_r^2} C_{f1} \frac{\tau_{*0}}{\theta_{01}} \quad (31)$$

と置くと、この移流項に対して風上差分を適用すれば、以下ようになる。

$$V_z \frac{\partial z_1}{\partial x} = V_z \frac{z_{1(i+1)} - z_{1(i-1)}}{2\Delta x} - \frac{|V_z|}{2} \Delta x \frac{z_{1(i+1)} - 2z_{1(i)} + z_{1(i-1)}}{\Delta x^2} \quad (32)$$

このように風上化により $|V_z|\Delta x/2$ の拡散係数を持つ数値拡散項が現れる。風上化による拡散作用が物理的な拡散作用よりも小さくなる条件は、式(28)、(32)より

$$\frac{3}{2} \frac{C_{f1}}{|1 - F_r^2|} \frac{\tau_{*0}}{\theta_{01}} \Delta x < \frac{3}{2} \frac{\tau_{*c} i_b}{\mu_c \theta_{01}} \quad (33)$$

であり、この条件は式(30)と等価である。陽解法における一次精度の風上差分は、CFL 条件を満たしている限り、時間とともに誤差が増幅しない TVD 条件を常に満足するため、式(30)は双曲型方程式である河床変動方程式を安定に計算するための必要条件であると考えることができる。

導入している無次元化より、

$$\tilde{\Delta x} = \frac{\tilde{h}_0}{i_b} \Delta x \quad (34)$$

であるから、 $P_e = 2$ となる臨界点を満たす条件は次式となる。

$$\tilde{\Delta x}_{P_e=2} = \frac{|1 - F_r^2|}{\mu_c C_{f1}} \frac{\tau_{*c}}{\tau_{*0}} \tilde{h}_0 \quad (35)$$

上式で定義される格子サイズを満足していれば、流砂量の空間微分に対して風上化を導入せずとも、河床勾配項による拡散効果により、河床の数値不安定性を抑制して解析できると考えられる。この条件によれば流砂量に風上化を導入しない場合、 μ_c が大きい (= 勾配の影響が小さい)、 F_r が 1 に近い、 τ_{*0} が大きい、水深が小さいほど、格子サイズを小さくとる必要がある。

なお、 $F_r=1$ では格子サイズが無限小となるうえ、流砂量の風上化を定義できなくなる。これは、西本ら¹²⁾、Goutière et al.¹⁴⁾ の解析から分かるように、流れのモデルに準定常仮定を導入したためであり、非定常項を残して解析すれば、このような不具合は取り除かれる。この点については、後の計算結果において確認することができる。

3. 数値計算

前節に示した安定計算に要求される格子サイズと風上化による拡散の影響、局所勾配による拡散の影響についていくつかの数値計算により議論を行う。

(1) 数値計算法

数値計算に用いるモデルは、式(1)~(5)に示す非線形方程式である。すべての基礎式はスタッガード格子上で離散化される。流れのモデルについては、Jang and Shimizu²⁷⁾と同様に、運動方程式に分離解法を適用して、非移流項と連続式を連立計算したのちに、移流項について CIP 法を適用している。

流れのモデルの離散化については上記で統一し、河床変動モデルの離散化と流砂量式の組み合わせにより 3 つのモデルを作り、その結果を比較する。まず、式(5)に示す河床連続式中の流砂の空間微分に中央差分、式(4)に示す流砂量式には局所勾配の影響を考慮しない本来の Meyer-Peter and Müller 式を用いたものを Model 1 とする。次に、流砂の空間微分に式(28)から議論された風上差分、流砂量式に Model 1 と同様に Meyer-Peter and Müller 式を用いたものを Model 2 とする。最後に、流砂の空間微分に中央差分、流砂量式に勾配の影響を考慮した Meyer-Peter and Müller 式を適用したものを Model 3 とする。Model 1 と Model 2 の比較により、河床変動計算に対する風上化の影響を、Model 2 と Model 3 の比較により、数値的な拡散作用と物理的な拡散作用の関係を議論することができる。これらをまとめると表-1 のようになる。

また、流砂の空間微分について図-1 に示す変数配置

表-1 流砂空間微分の差分方法と流砂モデルの組み合わせ

	流砂空間微分の 差分方法	流砂への 河床勾配の影響
Model 1	中央差分	無
Model 2	風上差分	無
Model 3	中央差分	有

図-1 流砂量の定義点

を基に説明を行う。なお、次元量を示すは省略している。流砂の空間微分を中央差分とする場合は、セル境界で流砂量 q_{bx} を定義し以下のように離散化するのが合理的である。

$$\frac{\partial q_b}{\partial x} = \frac{q_{bx(i)} - q_{bx(i-1)}}{\Delta x} \quad (36)$$

一方で、風上差分を用いる場合、流砂量はセル中央で定義し以下のように離散化する。

$$\frac{\partial q_b}{\partial x} = \frac{q_{b(i)} - q_{b(i-1)}}{\Delta x} \quad F_r < 1 \quad (37a)$$

$$= \frac{q_{b(i+1)} - q_{b(i)}}{\Delta x} \quad F_r > 1 \quad (37b)$$

中央差分を用いる場合は、差分間隔を $2\Delta x$ とした

$$\frac{\partial q_b}{\partial x} = \frac{q_{b(i+1)} - q_{b(i-1)}}{2\Delta x} \quad (38)$$

という差分形式も考えられるが、式 (36) のほうがよりコンパクトなスキームであると共に、流砂量関数中の局所勾配を計算する際にスタッガード格子の利点を生かすことができるため、中央差分には式 (36) の形式を採用する。

(2) 計算条件

本研究では、一定勾配の河床に波長 2m、波高が水深の 1% 程度の微小擾乱を与え、この伝搬について計算を行う。式 (28) より、河床擾乱の伝搬速度は F_r と τ_{*0}/θ_{01} に影響を受けるが、 τ_{*0}/θ_{01} は τ_{*0} が大きくなるにつれて 1 に近づくため、影響度合いは小さい。そこで、 F_r を変化させた 4 ケースの数値計算を行った。また、風上化による河床の拡散作用と局所勾配による物理的な拡散作用の影響を見るためには、上述の $\tilde{\Delta x}_{Pe=2}$ と設定する格子幅の関係が重要となる。ここでは、 $\Delta x_{Pe=2}$ を $F_r = 1$ 以外のケースで 0.05m 程度になるように条件を調節し、設定格子幅を 0.01, 0.05 及び 0.2m と変

表-2 計算ケース

	F_r	τ_{*0}	$\tilde{d}(\text{mm})$	$\tilde{h}_0(\text{m})$	i_b
Case 1	0.64	0.48	0.8	0.62	1/1000
Case 2	0.89	1.4	2.68	3.72	1/600
Case 3	1	1.02	4	2.7	1/400
Case 4	1.15	3.37	2.6	5.78	1/400

化させ計算結果の違いを考察する。 $F_r = 1$ においては、河床擾乱の伝搬速度が無限大となるため、 $\tilde{\Delta x}_{Pe=2}$ 、風上化を定義することもできなくなる。これらをまとめると表-2 となる。なお、ここでは河床擾乱の伝搬計算に対するモデルの特性と安定性について議論するため、理論値や実験値とは比較を行わないこととする。これは、非線形の理論解が得難いことと、ここで検討する河床擾乱の伝搬を実験により再現することが困難であるためである。

4. 結果と考察

(1) 計算結果

a) Case 1, 2 ($F_r < 1$)

図-2, 3 に、それぞれの計算条件における河床擾乱の伝搬過程に関する結果を示す。流れが常流である Case 1, 2 では、式 (28) から示唆されるように、河床擾乱が下流に伝搬している様子が理解できる。この時、本来不安定である中央差分を用いた Model 1 の結果を見ると格子幅が小さい場合は、安定して計算が行われているが、格子幅が大きい場合は河床擾乱が振動し、特に Case 1 において不安定性が顕著である。この河床が振動する振幅は、フルード数が小さい Case 1 のほうが大きく、Case 2 では不安定性が次第に収束している様子が確認できる。一方、風上差分を用いた Model 2 では、河床擾乱の拡散度合は格子幅により大きく異なり、格子幅が小さいケースでは Model 1 に近く、格子幅が最大のケースでは河床はほぼ平坦に近づく。また、流砂量の差分に中央差分、流砂量式に Fredsøe 式を適用した Model 3 では、全体的に計算結果に対する格子幅依存性が小さいことがわかる。

b) Case 3 ($F_r = 1$)

図-4 に、フルード数が 1 の臨界条件である Case 3 の結果を示す。フルード数が 1 の条件では、河床擾乱は上下流に同一の速度、振幅を持って伝搬していることがわかる。この特性については、式 (28) からは説明できないが、西本らが非定常の浅水流方程式を用いて示した結果と同様である。計算結果から明らかのように、このケースでは計算格子幅にかかわらず、Model 1 と

図-2 Case 1 における河床擾乱の伝搬過程の計算結果. 格子幅がそれぞれ a) 0.01 m, b) 0.05 m 及び, c) 0.2 m である. なお, 縦軸は平均勾配を差し引いた標高である.

図-3 Case 2 における河床擾乱の伝搬過程の計算結果. 格子幅がそれぞれ a) 0.01 m, b) 0.05 m 及び, c) 0.2 m である. なお, 縦軸は平均勾配を差し引いた標高である.

Model 3 は非常に近い結果を示しており, 流砂への河床勾配の影響が計算結果に有意な差を与えていないことがわかる. また, 格子幅が粗いケースにおいてアンダーシュートがみられるものの, この不安定性は直ちに消失し, 安定した計算が実現されている.

c) Case 4 ($F_r > 1$)

図-5 に, 流れが射流条件である Case 4 の結果を示す. Model 1, 3 における結果は, 河床擾乱が上流側に伝搬することを除けば, 流れが常流の場合と同じような傾向が確認できる. しかしながら, 射流におけるケースでは, 風上差分を適用した Model 2 による計算結果は非常に不安定であった. $\Delta x = 0.05\text{m}, 0.2\text{m}$ のケースでは初期に与えた河床擾乱が上流側に移動しながら不

安定となり, 発散していることがわかる. この傾向は格子幅が小さいほど大きく, $\Delta x = 0.01\text{m}$ のケースでは数値解を得ることが困難であった.

(2) 河床勾配と風上化による河床拡散作用の関係

計算結果より, Case 3 以外のケースでは Model 1 の河床拡散作用が最も小さいことがわかる. 一方, 風上差分を適用した Model 2 では, 流れが射流の場合を除いて, 安定した計算となっている. しかしながら, Model 2 の計算結果は計算格子依存度が大きく, 風上化による河床の数値拡散の影響度合いの大きさがうかがえる. 最後に中央差分を用い, 勾配の影響を考慮した Model 3 の結果を見ると, Model 1, 2 とは異なり, 全体的に

図-4 Case 3における河床擾乱の伝搬過程の計算結果. 格子幅がそれぞれ a) 0.01 m, b) 0.05 m 及び, c) 0.2 m である. なお, 縦軸は平均勾配を差し引いた標高である.

格子幅の影響が小さい傾向にある. 特に着目すべきは, 式 (35) に示す $P_e = 2$ を満たす格子幅における結果が, Model 2 の計算結果とほぼ一致していることである. これは, 流砂への河床勾配の影響による物理的な河床の拡散作用と, 風上化による数値的な河床の拡散作用が一致したことに他ならない. 一方, 格子幅が大きいケースでは, Model 3 においても多少のアンダーシュートが生じており, 河床擾乱の伝搬が不安定になっている. これは, $P_e > 2$ となる格子幅では, 物理的な拡散の影響が計算を安定させるために必要な拡散作用を満たしていないためと考えられる. しかしながら, Model 1 で示したように, 従来指摘されている中央差分の不安定性が小さいためか, Model 3 の結果から粗い格子にお

図-5 Case 4における河床擾乱の伝搬過程の計算結果. 格子幅がそれぞれ a) 0.01 m, b) 0.05 m 及び, c) 0.2 m である. なお, 縦軸は平均勾配を差し引いた標高である. 本ケースでは, Model 2 による結果は非常に不安定であったことから, 数値解が発散したケースにおいては図中に結果を示していないことに注意を要する.

いても安定的な計算が実現されていることがわかる.

この原因については不明確であるが, 一つに格子系にスタッガード格子を採用しているためと考えられる. スタッガード格子上では, 水深や河床と流速や流砂量の定義点が一致しないため, 式 (28) の河床変動方程式を導出する際に行う代入演算が差分レベルでは正確には成り立たない. 特に, 式 (28) の導出過程から分かるように, 河床擾乱の伝搬に重要な枠割を持つ移流項は, 流砂量の空間微分と流れの方程式を合わせることで導入される. したがって, 差分レベルにおける誤差は擾乱の伝搬機構に少なからず影響を持つことが予想

される。言い換えれば、本来スタッガード格子系では、式 (28) から考察される流砂量に対する風上化や中央差分の理論が厳密には定義できないとも考えられる。これは射流において風上差分によって河床が発散したこととも関連すると考えられる。射流においては式 (20) から分かるように、フルード数の増加により運動方程式中の移流項のオーダーが増加する。これにより、運動方程式中の移流項のオーダーが水面勾配項よりも大きくなり、移流項が流体運動に与える影響が大きくなる。射流条件においては、移流項の離散化精度と上記スタッガード格子が持つ誤差が相互に増幅し、計算が不安定になっているものと推測される。しかしながら、流体の数値計算に対してはスタッガード格子は依然有効であるため、ここで示したような風上化の理論を用いず、流砂量に局所勾配の影響を加味したうえで、式 (35) に示す $Pe < 2$ を満たす格子幅を選択すれば、安定した河床変動計算を行うことができると考えられる。

このように計算結果の解釈には多少不明確な点は残るものの、式 (35) に示す $Pe < 2$ を満たす格子幅において流砂空間微分に中央差分を導入し、流砂量に対する局所勾配の影響を考慮したモデルを用いれば、数値拡散を小さく押さえつつ、物理的な河床拡散により数値不安定性を合理的に散逸できることが示された。Model 3 は、風上化による場合分けや計算格子依存度を排除することが可能となるため、河床変動計算モデルに対して有利な方法であると考えられる。

(3) 河床擾乱の伝搬特性について

$F_r = 1$ のケースでは、Model 1 と 3 の結果がほぼ等しく、河床勾配の影響が河床擾乱の拡散に影響を与えていないことが示唆される。また、 $F_r < 1$ の結果では、フルード数が 1 に近い Case 2 の方が、中央差分を適用した Model 1 における河床の不安定度合いが小さい。これらの結果は、フルード数が 1 に近づくにつれて、河床勾配の影響とは別の物理的な河床の拡散作用が存在していることを示唆している。

これを考察するために、Parker²⁸⁾を参考に河床変動方程式を再構築する。まず、式 (25) 右辺の流砂への河床勾配の影響を無視し、式 (24) に代入すると次式が得られる。

$$h_1 = \frac{i_b}{F_r^2 C_{f0} C_{f2}} \left[(1 - F_r^2) \frac{\theta_{01}}{3 C_{f1} \tau_{*0}} \frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{\partial z_1}{\partial x} \right] \quad (39)$$

これを再び式 (25) に戻せば、以下のような河床変動方程式が得られる。

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + B \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} = 0 \quad (40)$$

ここに、

$$B = -\frac{1 - F_r^2}{F_r^2} \frac{i_b}{C_{f0} C_{f2}} \quad (41)$$

$$C = -\frac{3 C_{f1}}{F_r^2} \frac{\tau_{*0}}{\theta_{01}} \frac{i_b}{C_{f0} C_{f2}} \quad (42)$$

である。このような処理により、ソース項がない x, t に関する偏微分方程式となる。式 (40) の特性方程式は次式である。

$$-B dx dt + C dt^2 = 0 \quad (43)$$

従って、以下の二本の特性曲線を得る。

$$t = \text{const}, \quad x - \frac{C}{B} t = x - C_z t = \text{const} \quad (44)$$

すなわち、式 (40) は二本の独立した特性曲線を持つ双曲型の偏微分方程式である。ここに、波動の伝搬速度 C_z は、

$$C_z = \frac{3 C_{f1}}{1 - F_r^2} \frac{\tau_{*0}}{\theta_{01}} \quad (45)$$

であり、式 (28) の左辺第二項に示す移流項の伝搬速度と同様である。一方で、 $F_r \rightarrow 1$ の時、 $B \rightarrow 0$ であるから、特性方程式は

$$dt = 0 \quad (46)$$

に近づく。この時特性曲線は一本となり、方程式は楕円型の性質を持つようになる。特に、 $F_r = 1$ において、

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + C \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} = 0 \quad (47)$$

の拡散方程式となるため、移流成分による不安定性は取り除かれ、河床擾乱は次第に拡散していくことになる。これは、流れを等流とした場合に得られる方程式と同一であり、等流条件に内在する河床の拡散作用であると考えられる。この時、河床擾乱は西本ら¹²⁾が示しているように上下流方向に同一の振幅、波速を持って伝搬していく。一方、河床変動方程式は双曲型の性質を持たなくなるため不安定成分が消失し、流れの計算が安定していれば、安定した河床変動計算が行えると考えられる。式 (28) と (40) を比較するとわかるように、基本勾配が安息角程度の急斜面にならない限り、この拡散係数 C は流砂への局所勾配の影響から導出される拡散係数よりもかなり大きい。その結果、Case 3 において、Model 1 と Model 3 の差が小さかったものと考えられる。このような楕円型方程式の性質により、フルード数が 1 に近いケースで、河床擾乱伝搬の不安定性が小さくなったものと考えられえ。

しかし一方で、この拡散項が 0 の場合は z_1 は常に変化しないことから、単に拡散作用を持つ項ではなく、双曲型方程式のソース項のような働きをすると考えられる。 F_r が 1 近傍以外では、ソース項の役割が強くなり、拡散項の性質は小さくなる。このことは、Case 1, 2 において勾配項の影響を明確に確認できることから明らかである。従って、フルード数が 1 近傍の点を除いては、風上化もしくは流砂への河床勾配項の導入による河床の拡散作用を考慮することが重要となる。

(4) 流砂量式の違いによる影響

既に議論したように、流砂量式への局所勾配の影響は、物理的な河床の拡散問題だけでなく、数値的な安定性の問題からも重要な要素である。一方、局所勾配の影響を考慮した流砂量式はこれまでに数多くのモデルが提案されている^{(24),(29),(30),(31),(32),(33)}。ここでは、その中でも Kovacs and Parker 式⁽²⁴⁾を取り上げ、上記議論に対する Fredsøe 式⁽²³⁾との違いについて考察する。

微小な勾配について線形化された Kovacs and Parker 式は以下のものである⁽³⁴⁾。

$$\frac{\tilde{q}_b}{\sqrt{sg\tilde{d}^3}} = \frac{a^{1/2}}{\mu_c} \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu_c} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}}} \left[\tau_* - \tau_{*c} \left(1 + \frac{1}{\mu_c} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}} \right) \right] \times \left[\tau_*^{1/2} - \tau_{*c}^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2\mu_c} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{x}} \right) \right] \quad (48)$$

ここで、基本流砂量を

$$\tilde{q}_{b0} = \frac{a^{1/2}}{\mu_c} \frac{1}{1 - \frac{i_b}{\mu_c}} \left[\tau_{*0} - \tau_{*c} \left(1 - \frac{i_b}{\mu_c} \right) \right] \times \left[\tau_{*0}^{1/2} - \tau_{*c}^{1/2} \left(1 - \frac{i_b}{2\mu_c} \right) \right] \sqrt{sg\tilde{d}^3} \quad (49)$$

と定義し、無次元化、線形化を行うと、流砂量の擾乱成分は以下ようになる。

$$q_{b1} = -2C_{f1}C_{ib}^2 \left(\frac{\tau_{*0}}{\theta_{01}} + \frac{\tau_{*0}^{1/2}}{2\theta_{02}} \right) h_1 - C_{ib} \frac{i_b}{\mu_c} \left[1 + C_{ib} \left(\frac{\tau_{*c}}{\theta_{01}} + \frac{\tau_{*c}^{1/2}}{2\theta_{02}} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial x} \quad (50)$$

$$\theta_{02} = \tau_{*0}^{1/2} - \tau_{*c}^{1/2} \left(1 - \frac{i_b}{2\mu_c} \right) \quad (51)$$

$$C_{ib} = 1 - \frac{i_b}{\mu_c} \quad (52)$$

Fredsøe 式と同様の式展開により、以下の線形化された河床変動方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{2C_{f1}C_{ib}^2}{1 - F_r^2} \left(\frac{\tau_{*0}}{\theta_{01}} + \frac{\tau_{*0}^{1/2}}{2\theta_{02}} \right) \frac{\partial z_1}{\partial x} \\ = \frac{2F_r^2}{1 - F_r^2} \frac{C_{f0}C_{f1}C_{f2}C_{ib}^2}{i_b} \left(\frac{\tau_{*0}}{\theta_{01}} + \frac{\tau_{*0}^{1/2}}{2\theta_{02}} \right) h_1 \\ + \frac{C_{ib}i_b}{\mu_c} \left[1 + C_{ib} \left(\frac{\tau_{*c}}{\theta_{01}} + \frac{\tau_{*c}^{1/2}}{2\theta_{02}} \right) \right] \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (53)$$

ここで流砂量式に Fredsøe 式を用いた場合に得られる線形化河床変動方程式(式(28))と大きく異なる点は、右辺第二項に示す拡散項の拡散係数にシールズ数に依存しない部分があることである。この影響が安定計算に与える影響を考察するために、上記方程式より $P_e = 2$

図-6 規格化された限界シールズ数 τ_{*c}/τ_{*0} と流砂量式に Fredsøe 式、Kovacs and Parker 式を適用した場合の $P_e=2$ を満たす格子幅の比。図中の赤丸の点は $F_r = 1$ に相当する点を示しており、この点では $P_e=2$ を満たす格子幅が 0 となるため、不連続点となる。

図-7 規格化された限界シールズ数 τ_{*c}/τ_{*0} と流砂量式に Fredsøe 式、Kovacs and Parker 式を適用した場合の $P_e=2$ を満たす格子幅。

を満たす格子幅を求めると以下ようになる。

$$\tilde{\Delta x}_{P_e=2} = \frac{|1 - F_r^2|}{\mu_c C_{ib} C_{f1}} \frac{1 + C_{ib} \left(\frac{\tau_{*c}}{\theta_{01}} + \frac{\tau_{*c}^{1/2}}{2\theta_{02}} \right)}{\frac{\tau_{*0}}{\theta_{01}} + \frac{\tau_{*0}^{1/2}}{2\theta_{02}}} \tilde{h}_0 \quad (54)$$

流砂量式に Fredsøe 式、Kovacs and Parker 式を用いた場合に得られる $P_e = 2$ を満たす格子幅がどのような関係にあるか、またそれが水理条件によりどのように変化するかを調べる。ここでは、仮想的な条件として、 $i_b = 1/200$, $\tilde{d} = 0.1\text{m}$, $\mu_c = 0.47$ を共通パラメータとし、流量を変動させることで、水理条件を変化させた。

図-6 は、両者の格子幅の比と規格化された限界シールズ数 τ_{*c}/τ_{*0} の関係である。図より、掃流力の小さい条件では両者の格子幅の差は小さいものの、掃流力の増大に伴い両者の差が次第に大きくなることが理解され、

Kovacs and Parker 式のほうが計算を安定化させるために必要な格子幅を大きくとれることがわかる. なお図中において流量, すなわちフルード数の増加は右から左に推移し, 赤丸は $F_r = 1$ に相当する点を示している. $F_r = 1$ の点においては, 式 (28), 式 (54) から分かるように河床の伝搬速度が無大となるため, $P_e = 2$ を満たす格子幅は 0 となる. これは, 図-7 に示す水深で無次元化した $P_e = 2$ を満たす格子幅と τ_{*c}/τ_{*0} の関係からも理解される. 従ってこの点は厳密には不連続点となるが, 前節で説明したようにこの点近傍では, 河床変動方程式が持つ双曲型の性質が消失する. 従って, 安定計算のために必要な格子幅を議論する必要性は小さく, 安定計算のために非現実的な小さい格子幅を用いる必要はないと考えられる.

ここで議論したように流砂量式は安定計算に必要な $P_e < 2$ を満たす格子幅に大きく影響する. このような違いは, 山口・泉³⁵⁾が説明しているように, 流砂量に対する局所勾配の影響を如何にモデル化しているかに起因する. すなわち, Fredsøe 式では勾配の影響は限界シールズ数を補正する形で考慮されている. これは, シールズ数の増大に従い勾配の影響が小さくなることを意味しており, シールズ数の大きい領域では局所河床勾配に起因する河床の拡散作用は相対的に小さくなる. 一方, Kovacs and Parker 式では限界シールズへの補正とともに, 分母に勾配項があることから流砂量自体に対して勾配の影響が作用する. したがって, シールズ数の増加に伴い流砂量が増加しても, 普遍的に勾配の影響が作用することになる. このように流砂量式に対する勾配の影響のモデル化により, ここで議論している安定的な計算に必要な格子幅に大きな影響が現れる. 勾配の影響はそれ自体物理的なものであり, 現象を再現するためには, 物理的な背景より導出された適切な流砂量式を用いることが必要である. どちらの式が流砂量を正しく表しているかは, 本論文の主旨ではないが, 流砂量自体に勾配の影響が含まれている式系のほうが安定した計算には適している. しかしながら, 安定計算に必要とされる格子幅は水深スケール以下であり, 要求される条件はそれほど容易ではないことに注意が必要である.

5. 結論

本研究では, 浅水流方程式と平衡流砂量式を基本とした河床変動モデルの計算法について, 河床擾乱の伝搬計算を通じて考察を行った. 方程式系を線形化することで, 河床変動に対する双曲型の方程式を導出し, 河床擾乱の伝搬特性について明らかにした. この方程式の安定性は, 移流と拡散の比を表す Péclet 数により規

定される. この方程式に対し, 数値不安定性を回避するために導入される風上差分と, 流砂量式から導入される物理的な拡散作用の相互関係を考察すると共に, 上記議論に対する流砂量式依存性について検討した. 得られた結論を以下に示す.

- 河床変動式中の流砂空間微分に中央差分, 流砂量式に局所勾配の影響を考慮したモデルを, $P_e < 2$ を満たす格子幅の下で離散化すれば, 数値拡散を抑制しつつ, 物理的な河床拡散により数値不安定性を合理的に散逸させることができる.
- 流砂量式中に勾配の影響を考慮せず, 流砂空間微分に中央差分, 風上差分を適用した場合, 河床擾乱の伝搬に対する格子依存度が大きい. また, スタッガード格子を適用した場合, 厳密には流砂空間微分に風上差分を定義することができず, 条件によっては数値解が発散することが示唆された.
- フルード数が 1 近傍では, 河床変動方程式が持つ双曲型の性質が小さくなり, 楕円型の方程式になる. そのため, 流砂空間微分の離散化に対する数値的問題を考慮せずとも, 流れ場が安定的に解ければ, 河床擾乱の伝搬を安定的に計算できる.
- Fredsøe 式のような限界シールズ数のみに勾配の影響を考慮した流砂量式では, シールズ数が大きくなるに従い勾配の影響が小さくなり, 移流に対する拡散の影響が相対的に小さくなるため, $P_e < 2$ を満たす格子幅条件が厳しくなる. 一方, Kovacs and Parker 式のように, 限界シールズ数のみならず流砂量全体に対して勾配の影響を考慮した流砂量式では, シールズ数の増加に伴い流砂量が増加しても, 流砂量全体に対する勾配の影響は普遍であるため, $P_e < 2$ を満たすためには有利な流砂量式である.

参考文献

- 1) 黒木幹男, 岸力, 清水康行: 河床変動の数値計算法に関する研究, 第 17 回自然災害科学総合シンポジウム講演論文集, pp.175-178, 1980.
- 2) Struiksma, N., Olesen, K.W., Flokstra, C. and de Vriend, H.J.: Bed deformation in curved alluvial channels, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 23, pp.57-79, 1985.
- 3) Shimizu, Y. and Itakura, T.: Calculation of bed variation in alluvial channel, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 115, No. 3, pp.367-384, 1989.
- 4) Giri, S. and Shimizu, Y.: Numerical computation of sand dune migration with free surface flow, *Water Resources Research*, Vol.42, w10422, doi:10.1029/2005WR004588, 2006.
- 5) Nabi, M., de Vriend, H. J., Mosselman, E., Sloff, C. J. and Shimizu, Y.: Detailed simulation of morphodynamics: 1. Hydrodynamic model, *Water Resources Research*, Vol. 48, W12523, doi:10.1029/2012WR011911, 2012.

- 6) 関根正人：土砂粒子の運動の解析を基礎とした河床波の形成過程シミュレーションの試み，土木学会論文集，No.691，pp.85-91，2001.
- 7) Hajivalie, F., Yeganeh, A., Houshanghi, H. and Gotoh, H. : Euler-Lagrange model for scour in front of vertical breakwater, *Applied Ocean Research*, Vol. 34, pp. 96-106, 2012.
- 8) 笠原孟，清水康行，木村一郎，山口里実：個別要素法を用いた河床変動計算，土木学会論文集 B1（水工学），Vol. 68，No. 4，pp.L1201-L1206，2012.
- 9) Callander, R.A. : Instability and river channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 36, pp.465-480, 1969.
- 10) Ikeda, S., Parker, G. and Sawai, K. : Bend theory of river meanders. Part1. Linear development, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 112, pp.363-377, 1981.
- 11) 大川秀典，清水康行，藤田睦博，橋本識秀：FDS 法を用いた開水路の河床変動計算，水工学論文集，第 42 巻，pp.685-690，1998.
- 12) 西本直史，森明巨，板倉忠興，田原達人：FDS 法による 1 次元河床変動解析，土木学会論文集，No. 677/II-55，pp.103-113，2001.
- 13) Roe, P.L. : Approximate Riemann Solvers, parameter vectors and difference schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp.357-372, 1981.
- 14) Goutière, L., Soares-Frazão, S., Savary, C., Laraichi, T. and Zech, Y. : One-dimensional model for transient flows involving bed-load sediment transport and changes in flow regimes, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 134, No. 6, pp.726-735, 2008.
- 15) Harten, A., Lax, P.D. and van Leer, B. : On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Review*, Vol. 25, pp.35-61, 1983.
- 16) Hudson, J., Damgaard, J., Dodd, N., Chesher, T. and Cooper, A. : Numerical approaches for 1D morphodynamic modelling, *Coastal Engineering*, Vol. 52, pp.691-707, 2005.
- 17) Long, W., Kirby, J.T. and Shao, Z. : A numerical scheme for morphological bed level calculations, *Coastal Engineering*, Vol. 55, pp.167-180, 2008.
- 18) Liu, X.D., Osher, S. and Chan, T. : Weighted essentially non-oscillatory schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol. 115, pp.200-2012, 1994.
- 19) Cordier, S., Le, M.H. and Morales de Luna, T. : Bed-load transport in shallow water models: Why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help, *Advances in Water Resources*, Vol. 34, No. 8, pp.980-989, 2011.
- 20) Siviglia, A., Stecca, G., Vanzo, D., Zolezzi, G., Toro, E.F. and Tubino, M. : Numerical modelling of two-dimensional morphodynamics with applications to river bars and bifurcations, *Advances in Water Resources*, Vol. 52, pp. 243-260, 2013.
- 21) Lesser, G.R., Roelvink, J.A., van Kester, J.A.T.M. and Stelling, G.S. : Development and validation of a three-dimensional morphological model, *Coastal Engineering*, Vol. 51, pp.883-915, 2004.
- 22) Meyer-Peter, E. and Müller, R. : Formulas for bed-load transport, *IAHSR, Report on the Second Meeting*, Vol. 3, pp.39-64, 1948.
- 23) Fredsøe, J. : On the development of dunes in erodible channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 64, pp.1-16, 1974.
- 24) Kovacs, A. and Parker, G. : A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 267, pp.153-183, 1994.
- 25) 泉典洋，山口里実：デューン - 平坦床遷移再考，土木学会論文集 B，Vol. 62，No. 4，pp.360-375，2006.
- 26) 岩垣雄一：限界掃流力の流体力学的研究，土木学会論文集，Vol. 41，pp. 1-21，1956.
- 27) Jang, C.L. and Shimizu, Y. : Numerical simulation of relatively wide, shallow channels with erodible banks, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 131, No. 7, pp.565-575, 2005.
- 28) Parker, G. : Morphodynamics e-Book: 1D Sediment Transport Morphodynamics with Applications to Rivers and Turbidity Currents, 2004.
- 29) 福岡捷二，山坂昌成：直線水路の交互砂州，水理講演会論文集，第 27 巻，pp.703-708，1983.
- 30) 芦田和男，江頭進治，劉炳義：蛇行流路における流砂の分級および河床変動に関する数値解析，水工学論文集，第 35 巻，pp.383-390，1991.
- 31) 関根正人，小野了：降雨による斜面浸食過程に関する数値解析，水工学論文集，第 46 巻，pp.647-652，2002.
- 32) Parker, G., Seminara, G. and Solari, L. : Bed load at low Shields stress on arbitrarily sloping beds: Alternative entrainment formulation, *Water Resources Research*, Vol. 39, No. 7, pp.1183-1192, 2003.
- 33) Chen, X., Ma, J. and Dey, S. : Sediment transport on arbitrary slopes: Simplified model, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 136, No. 5, pp.311-317, 2010.
- 34) 泉典洋，Pornprommin, A.：振幅展開法を用いた砂州の弱非線形解析，土木学会論文集，No.712/II-60，pp.73-86，2002.
- 35) 山口里実，泉典洋：デューン - 平坦床遷移過程にみられる亜臨界分岐現象，土木学会論文集，No. 740/II-64，75-94，2003.

(2013. 6. 6 受付)

A MORPHODYNAMIC MODEL BASED ON A SHALLOW FLOW MODEL AND AN EQUILIBRIUM BEDLOAD TRANSPORT MODEL FOR CALCULATING BED EVOLUTION IN RIVERS

Toshiki IWASAKI, Yasuyuki SHIMIZU and Ichiro KIMURA

The performance and stability of a numerical model which consist of a shallow water flow model and an equilibrium bedload transport model for calculating bed evolution in rivers is discussed. Such system equations which are generally adopted for calculating reach-scale river bed evolution have a hyperbolic feature. This fact has implied that upwind schemes to the space derivative of bedload transport in Exner equation are useful numerical methods to avoid bed instabilities in calculating the propagation of a small disturbance. Whereas, a bed diffusion effect which is essentially included in bedload dominated bed evolution has been modelled in equilibrium bedload transport models by considering the local slope effect to the bedload transport. The relation between the numerical and physical diffusion effect to the bed evolution should be investigated to understand the performance and stability of the model. A hyperbolic differential equation controlling the bed evolution was derived from the linearized system equations to understand the numerical characteristic of the propagation of the bed disturbance. We defined a Péclet number, P_e , as the ratio between the advective effect which controls the propagation of the bed disturbance and the diffusive effect associated with the bed slope effect. The effect of physical diffusion of the bed exceeds the effect of numerical diffusion by the upwind scheme to the bedload transport in the condition which $P_e < 2$. The series of computations which focus on the propagation of hump type bed disturbance were conducted. The numerical results show that the calculation of propagating the bed disturbance can be physically stable without the upwind scheme when the grid size which satisfies $P_e < 2$ is used. The grid size which is required such physically stable computation depends on how the bed slope effect is modelled in the bedload transport model.