非構造三角形格子に基づく津波数値解析の GPGPUによる高速化

ON THE EFFICIENCY OF GPGPU ACCELERATION OF TSUNAMI
SIMULATIONS USING AN UNSTRUCTURED TRIANGULAR MESH SYSTEM

曾新翔¹・赤穂良輔²・石川忠晴³・中村恭志⁴

Xinxiang ZENG, Ryosuke AKOH, Tadaharu ISHIKAWA and Takashi NAKAMURA

¹学生会員 工修 東京工業大学大学院博士課程 総合理工学研究科 (〒226-8502横浜市緑区長津田町4259番)

²正会員 工博 東京工業大学大学院助教 総合理工学研究科 (〒226-8502横浜市緑区長津田町4259番)

³フェロー 工博 東京工業大学大学院教授 総合理工学研究科 (〒226-8502横浜市緑区長津田町4259番)

⁴正会員 理博 東京工業大学大学院准教授 総合理工学研究科 (〒226-8502横浜市緑区長津田町4259番)

In consequence of the huge spatial scale, the computation load of Tsunami simulation tends to be too large to afford. In order to overcome this difficulty, a rapid numerical simulator was constructed by applying the GPGPU technology to solve the 2-dimensional shallow water equations. This simulator is based on an explicit finite volume scheme combined with unstructured triangular meshes. With the power of GPGPU, this simulator can be used to simulate large scale Tsunami movement. Furthermore, by using unstructured meshes, complex boundary could also be represented well. And, the Recursive Spectral Bisection (RSB) method was used to enable GPU computations. The simulation results for the run-up Tsunami in Tone River caused by Tohoku earthquake (2011) are verified and validated, and show that it is sufficiently accurate for real-world simulations.

Key Words : GPGPU, Shallow water equations, Unstructured mesh, Finite volume method, Recursive Spectral Bisection (RSB), Tohoku Earthquake (2011)

1. 序論

平成23年東北地方太平洋沖地震(以下、東北地震)では観測史上最大級の津波により甚大な被害が生じた。津波の数値解析では、外洋を含む広大な領域を、局所的な地形変動に合わせた細かい計算メッシュで解く必要があるため、多大な計算負荷と時間が必要とされる。東北地震では河川を遡上した津波により浸水被害地域が拡大した。今後の河川遡上まで含めた解析ではより細かいメッシュの採用が予想され、増大する計算負荷の問題を解決することが求められている。実際、筆者らが近年開発を進めている非構造格子による津波解析モデルを利根川下流域での津波遡上計算に適用した際には、計算負荷低減のために河川と海洋を個別に解く工夫(ネスティング)を必要とし、高計算負荷の問題は解決できていなかった¹⁾。

一方、General-Purpose Computing on Graphics Processing Units (GPGPU)による高速並列計算が近年注目され、津波解析への適用も試みられつつある²⁾。GPGPUにより効率的な並列計算を実現するには、計算負荷の均一化、サブドメイン外部から参照する格子点数の最小化などの要

請を満たした領域分割が必要となる。三角形格子からなる非構造格子は地形形状の表現に優れる一方、格子の大きさや配置が不規則となるため、上記要請を完全に満足する領域分割は出来ないのが普通である。その一方、非構造格子へGPGPUを適用した例は数少なく^{3),4)}、非構造格子における領域分割の不完全性がGPGPUによる津波解析の高速化に与える影響について詳細な報告をした研究は見られない。そこで本研究では、筆者らの非構造三角形格子を用いた有限体積モデルにGPGPUを適用した津波数値解析モデルを新たに開発し、利根川下流域での津波遡上の再現計算によりGPGPUの有効性を検証するとともに、非構造格子における不完全な領域分割が高速化へ与える影響について調査することとした。

2. 計算モデル

(1) 基礎方程式

以下の二次元浅水方程式を基礎方程式とした。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{G} = \mathbf{S}_b + \mathbf{S} \quad (1)$$

図-1 計算領域。カラーコンターは検証計算の初期水位分布を表す。右下には利根川付近の地形を拡大して示す。

表-1 検証計算に使用したメッシュ

	メッシュ:①	②	③	④
総メッシュ数	34,060	139,119	266,194	452,901
メッシュ	海洋	7.5km	4.0km	7.5km
サイズ	利根川	150m	30m	25m
メモリー量[MB]	5	24	46	79

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで h は水深、 hu と hv はそれぞれ x と y 方向の線流量である。 g は重力加速度であり、 S_b は水底勾配の効果を表し、 S はレイノルズ応力と底面摩擦などを含むソース項である。底面摩擦はマニング則から決定し、レイノルズ応力は0方程式モデルに基づく水深平均値を使用した。詳細な定式化については文献¹⁾を参照されたい。

(2) 非構造三角形格子

計算領域を図-1に示す。三角形非構造格子を用いて離散化を行う。表-1に示すように空間解像度の異なる4種類の格子(メッシュ①～④)を用いる。図-2には最も粗い①と最も細かい④を示す。①～④の全ての格子で海洋から沿岸に近づくにつれ細かい格子となるよう調整している。(a-2)及び(b-2)には利根川部分を拡大して示している。最も粗い①の場合には横断方向に十メッシュ以下で離散化されるため河岸線がいびつになっている。一方④では利根川部は15m程度の細かいメッシュが使用され、河岸線等地形が詳細に表現されている。

(3) 計算手法

赤穂らと同様に有限体積法を使用した¹⁾。図-3に概念図を示す。変数 $\mathbf{q}=(h, u, v)$ はメッシュ重心に配置され、境界面での数値流束を基に次式により計算される。

図-2 計算メッシュ。(a-1)と(b-1)はメッシュ①及び④の全体を示し、(a-2)及び(b-2)は利根川の一部の拡大であり、赤線が河岸線である。

図-3 三角形格子における数値流束と変数配置。

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n - \frac{\Delta t}{\Delta s} \left(\sum_{j=1}^3 (\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{n}_j dl_j) - \Delta s S_b \right) + \Delta t \mathbf{S} \quad (3)$$

ここで Δs は面積、 $\mathbf{n}_j$ 、 dl_j は辺 j 上の単位法線ベクトル及び辺長である。 $\mathbf{E}_j=(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ は辺 j を通過する数値流束テンソルであり、近似Riemann解法であるRoe法を用いて陽的に評価する^{1),5)}。

3. GPGPUに基づくプログラム実装

(1) GPGPUによる高速計算の原理

GPUは拡張カードとしてPCに組込まれる。PC上のCPUとは内部バス(PCI Express)を通じてデータ転送を行う。本研究ではGPGPU用に開発されたTesla C1060(Nvidia社)を使用した。通常画像描画用GPUでもGPGPUとして使用可能である。図-4にNvidia社GPUの内部構成の模式図を示す。図-4(a)に示すように、GPU上には数GBのGlobalメモリーがあり、変数 $\mathbf{q}$ などのデータは全てここに保存されて時間発展が計算される。演算を受け持つ複数のMulti-Processor(MP)が二個一組でGPU上に配置される。CPU上の演算coreに相当し、実際の数値演算を担当するStreaming Processor(SP)が各MP上に8個ずつ配置される(図-4(b))。Tesla C1060は30個のMPを持ち、総計240個のSPを並列実行することで計算の高速化を実現する。今回使用したTesla C1060は2008年末に発売され

図-4 GPUの内部構造の模式図.

たもので、GPGPU専用のGPUとしては第1世代に属する比較的古い装置である。Tesla C1060の理論演算性能は、単精度浮動小数型(いわゆる float 型)変数では933GFLOPSに達する一方、倍精度浮動小数型(いわゆる double 型)変数では78GFLOPSと大幅に悪化する難点を持っている。float 型変数を用いることは演算誤差の増大を引き起こす危険がある。しかしながら、今回の研究ではGPGPUの高速計算の潜在能力を示すため、あえて全て float 型変数を用いて計算を行うこととした。なお、2012年11月にはNvidia社より最新世代のTesla K20が発表されている。このGPUではdouble型変数の理論演算速度が大幅に改善され、Tesla C1060のfloat型演算性能を超える1.17TFLOPSに達するとされている。そのため、最新世代のTesla K20を使用すれば、double型変数を用いて計算したとしても、今回報告する結果と同程度の高速化を実現できる可能性がある。なお、Tesla C1060の価格は25万円程度(2008年発売時)であり、コストパフォーマンスが非常に高い点もGPGPUの特徴である。

(2) プログラム実装

図-4 (b)に示すように、各MP内には低容量だが非常に高速なSharedメモリーが実装されており、同じMP内のSP間ではSharedメモリー上に保存された値を相互に参照可能となっている。一方、異なるMP上のSharedメモリーの値は参照することは出来ない。この状況は、PCクラスター上で並列計算を行う場合の各"PC"が"MP"に相当し、各"PC"上のメモリーが"MP"内のSharedメモリーに相当すると考えれば理解し易い⁶⁾。実際のプログラムでは計算領域を幾つかの小領域(サブドメイン)に分割する領域分割法⁶⁾により並列計算を実現する。図-5に実際に分割された様子をサブドメインごとに色分けして示す。

図-5 RSB法による領域分割の結果。サブドメインを色分けして示している。

図-6 GPGPUによる並列計算の概念図。

また、図-6に並列計算の概念図を示す。実際の解析は二次元空間で行われるが、図-6では説明のため一次元格子で概念を示している。図-6(a)に示すように、まず各サブドメインがMPに振分けられ、計算に必要な値 q^n がGlobalメモリーからMP内のSharedメモリーに読み込まれる。その後、MP内の複数のSPはSharedメモリー上の値を相互に参照しながら次時刻の値 q^{n+1} を計算する。最後に q^{n+1} が再度Globalメモリー上に書き込まれる。今回のモデルでは数値流束 E_j は陽的に前時刻の値 q^n のみを用いて計算されるため、異なるMP上での計算結果 q^{n+1} を相互に参照する必要は無い。そのため、各MPの計算は他のMPとは独立となり、完全に並列で実行されることになる。その一方、 E_j は境界面上で計算されることから、サブドメイン境界面での E_j (図-6(b) 青矢印)を計算するためにサブドメイン外に隣接する1格子(図-6(b) 青丸)の値 q^n も余分に"のりしろ"としてMP内へ読み込む必要が生じる。二次元空間における実際の"のりしろ"の格子点数は、サブドメインの境界線をどのように引くかで決まる。

以上のように並列計算は各MPを単位として行われる。そのため、効率的な計算の高速化には、計算負荷を各

図-7 茨城県沿岸における(a)最大波高分布の計算結果、及び(b)観測値との比較

MPに均等に配分するためサブドメインに含まれる格子数は同程度に調整すること、或は"のりしろ"の格子数を出来るだけ少なくするようサブドメインを分割することが要請される。本研究では非構造格子の領域分割法として、グラフ理論に基づくRecursive Spectral Bisection(RSB)法^{7,8)}を使用することとしたが、非構造格子の効率的な領域分割法は現在も模索されている段階にあり、格子の不均一性のため非構造格子で上記要請を完全に満足した領域分割を得ることは依然難しい状況にある。実際のプログラム実装ではGPUへのデータ転送や同期処理などの考慮が必要であり、GPGPUの為のコードを別途書く必要がある。本研究ではGPUメーカーであるNvidia社が開発したCUDAライブラリ⁹⁾を使用した。

4. 東北地震津波の再現計算と計算高速化の検討

(1) 計算条件

計算開始は2011年3月11日14:52とし、17:52までの3時間について計算を行った。時刻幅 Δt は0.4secとした。津波の初期波形は東北大学モデル(Version 1.0)を基に設定した¹⁰⁾。利根川河道内部は14:00~15:00の観測水位から時間方向に補間して、-0.49 T.P.mとした。初期水位分布は図-1に示されている。また水深が0.1mを超えた場合に水没するとして、水際線の移動を考慮している。水底摩擦に用いる Manning 係数は土地利用形態を元に、低水路・海洋部を0.02、高水敷・陸地を0.04と設定した。

(2) 観測結果との比較

以下、特にことわりの無い場合、最も細かいメッシュ④を使用した結果を示す。図-7には茨城県沿岸における最高水位分布と痕跡調査などによる推定値との比較を示す。推定水位にはばらつきが観られるが、図-7(b)に示すように計算結果は最大水位と概ね一致している。図-8には利根川において津波の水位データが観測された地点を黒丸で示す。"KP"は河口からの距離である。18.5KPには利

図-8 利根川下流域における水位観測点位置

根川河口堰がある。図-9に利根川付近を拡大して水位時間変化を示す。地震発生40分後には河口に第一波が到達(t1)し、上流に向け遡上していく(t2)。大凡100分後には河口堰に到達した第一波は堰で反射される一方、後続の第二波が河口から遡上開始している(t3)。その後14KP付近では反射波と第二波が重なり、水位が局所的に増大している(t5)。図-10には各観測点における水位時間変化の比較を示す。メッシュ④の結果を赤実線で示したが、第一波及び後続波の来襲時刻とその波高は観測結果と良く一致しており、河道部で15m程度の非常に細かいメッシュを使用することで、河川内を遡上する津波を良く再現できている。一方、図-10には最も粗いメッシュ①を使用した場合の結果も青実線で示しているが、数値拡散誤差に起因すると思われる波高の減衰が見受けられる。このことから、津波の河川遡上を評価する為には河道スケールに合わせた細かいメッシュの使用が必要であることが確認できる。また図-10(a)と(b)の両方で、上流の16.5KPと18.0KPにおける計算水位は観測結果より過小に計算されている(特に経過時間140分頃)ことが確認できる。この差異は細かいメッシュ④を用いた場合にも見られることから、使用するメッシュの粗細以外の何らかの原因が示唆される。原因の候補として、パラメータのキャリブレーション不足がある。例えば、河床摩擦における Manning 係数は河川の標準的な値(低水路0.02、高水敷0.04)を使用した、これらの値が過大であったため上流に達するまでに津波が大きく減衰した可能性がある。これらパラメータは観測値などを用いて調整することが可能であり、今後の検討が必要である。

(3) GPGPUによる計算高速化の検証

メッシュ①~④夫々について、3時間の再現計算に必要なとした実行時間を調べた。また比較の為、通常のGPGPUを用いないCPU(Core i7 920, 2.67GHz)による計算も行い、実行時間を比較した。結果を表-2に示す。一般に計算そのものに比べて途中結果などをファイルに書き出す操作は遅いことが知られている。そこで、途中結果の出力を行わない場合と行う場合のそれぞれについて実行時間を計測した。表-2には出力を行わない場合を括弧なしで示し、出力した場合(水位、流速を1分毎に出力)を括弧付きの数値で示した。

図-9 利根川下流域における水位計算結果

図-10 利根川内水位観測結果と計算結果の比較。観測地点ごとの時間変化について、緑四角で観測結果、赤実線でメッシュ④の計算結果、青実線でメッシュ①の計算結果を示す。

まず途中結果の出力を行わない純粋な計算のみで比較すると、どのメッシュ数でも概ね50倍程度計算が高速化されている。最も細かい④でも、GPGPUは3時間の解析を僅か20分で完了している。一方、CPUのみの場合には④で16時間、最も粗い①でも1時間強が必要となる。東北地震では津波第一波は30分後には沿岸に到達している。30分の計算に必要な時間に換算すれば、最も細かい④でGPGPU:3分強、CPU:5時間強であり、詳細なメッシュを使用してもGPGPUによりリアルタイム予報が実現できる可能性がある。一方、途中結果の出力を行った場合には、計算の高速化率は25倍程度に減少している。出力とそれ以外の計算に要した時間の内訳を表-3に示す。ファ

イルへの出力は並列化することは不可能であり高速化することは出来ない。そのため、出力が全体の実行時間に占める割合がGPGPUでは相対的に大きくなり、計算そのものと同程度の時間を出力に費やす結果となっている。またGPGPUで出力を行う場合には、ファイルへの書き込みに加え、GPU上のデータを低速な内部バスを通じて取得する必要がある。そのため出力に関する時間がGPGPUでは増加すると予想されたが、CPUのみの場合と同程度の時間で出力を終えており、今回の計算では有意な遅延は見られない。これは表-1に示すように、使用メモリー量が小さかった(最大でも80MB)ため、GPUからのデータ転送に費やす時間がファイル出力に比べ無視できるほど小さかったためと考えられる。以上の様に、GPGPUでは出力やデータ転送などの処理が全体の計算速度を律する可能性があり、途中結果の出力間隔を適切に取るなどの考慮が重要となることが示唆される。

次に領域分割が計算速度に与える影響について検討する。以下では、途中結果の出力を行わないとしている。まず、サブドメイン内に含まれるメッシュ数(サブメッシュ数)を変化させ、その実行時間への影響を調べた結果を図-11に示す。サブメッシュ数はサブドメイン毎にばらつくが、サブメッシュ数の平均値を横軸に示している。メッシュ①～④について各々色を変えて示している。平均サブメッシュ数が増加するに従い実行時間が減少し、効率的に計算が高速化されていくことが確認できる。平均サブメッシュ数が20メッシュ程度と200程度の場合を比較すると、①～④何れのメッシュでも4倍程度も計算速度が異なる。これには幾つかの原因が考えられる。

非構造格子の領域分割ではサブメッシュ数にはバラツキが生じやすい。多いサブメッシュ数のサブドメインは他よりも計算に長い時間を必要とするため、サブメッシュ数の不均一は全体の計算効率を悪化させる可能性がある。バラツキの指標としてサブメッシュ数の標準偏差を考える。図-12には平均サブメッシュ数に対する標準偏差の変化を実線で示した。平均サブメッシュ数が多い、即ち大きいサブドメインで分割する場合ほどサブメッシュ数の標準偏差(バラツキ)が大きくなっている。ひとつのMP上で実行される計算の大凡の総量は平均サブメッシュ数に、MP間の計算量の差異はバラツキ(標準偏差)に比例すると考えられる。そこで、平均サブメッシュ数に対する標準偏差の割合を見てみると、図-12破線で示す様に大きなサブドメイン(サブメッシュ数)を用

表-2 実行時間の比較. 括弧内の数字は途中結果を1分毎に出力した場合.

		メッシュ:①	②	③	④
使用サブドメイン数		256	1,024	2,048	4,096
実行時間	GPGPUを使用(A)	1.3 (2.5)	5.2 (9.7)	10.9 (20.0)	21.4 (37.1)
[min]	CPUのみ(B)	71.2 (72.3)	246.7 (251.6)	535.4 (544.6)	964.2 (979.8)
計算高速化率 $[(B)/(A)]$		54.8 (28.9)	47.4 (25.9)	49.1 (27.2)	45.1 (26.4)

表-3 出力と計算に関する実行時間.

		メッシュ:①		②		③		④	
		GPGPU	CPU	GPGPU	CPU	GPGPU	CPU	GPGPU	CPU
実行時間[min]	計算 (A)	1.3	71.2	5.2	246.7	10.9	535.4	21.4	964.2
	出力 (B)	1.2	1.1	4.5	4.9	9.1	9.2	15.7	15.6
出力の総実行時間に占める割合 [= (B) / (A+B)]		48%	1.5%	46%	1.9%	46%	1.7%	42%	1.6%

図-11 サブメッシュ数に対する計算速度の変化.

いた方が割合は小さくなる. これは大きなサブドメインを用いた方が, サブメッシュ数のバラツキによる計算量の不均一が総計算量に対して相対的に小さくなることを意味している. その結果, 図-11で示すように大きなサブドメインを用いた方が高速化されたものと考えられる. また, 数値流束をメッシュ辺上で計算するため, 各サブドメイン縁部に隣接する1メッシュを余分に"のりしろ"としてMP上に読み込ませている. そのためサブメッシュ数が減少するにつれ, サブメッシュ数に対するこの"のりしろ"の個数が相対的に大きくなり, 計算速度が低下したことも原因と考えられる. 以上のことから, GPGPUを用いた計算の高速化ではサブドメインを或る程度大きく取ることが重要であることが示唆される.

4. 結論

非構造三角形格子に基づく津波数値解析へのGPGPUの有効性について検討を行った. GPGPUによる2次元浅水方程式コードを開発し, 東北地震の津波再現計算を行った. 計算結果は観測水位と概ね一致し, 細かい計算メッシュを用いた解析が津波の河川遡上等, 局所的な地形変動が重要となる現象に有効であることを示した. また, 計算の高速化の程度は領域分割の影響を受けることを示し, 比較的大きなサブドメインの方が計算は高速化されることを確認した. 通常のCPUのみを用いた解析と実行時間を比較し, GPGPUを用いることで50倍程度の高速化が実現可能であることを示した.

図-12 サブメッシュ数の標準偏差(実線)と標準偏差の平均サブメッシュ数に対する割合(破線).

参考文献

- 1) 赤穂良輔, 石川忠晴: 平成23年東北地方太平洋沖地震津波における利根川下流の津波遡上再現計算, 水工学論文集, **56**, pp.1_1543-I_1548, 2012.
- 2) 青木尊之: 双曲型方程式のGPUによる高速計算, 応用数理, **20**, pp.6-18, 2010.
- 3) Castro, M. J., Ortega, S., Asunción, M., Mantas, J. M., Gallardo, J. M.: GPU computing for shallow water flow simulation based on finite volume schemes, *High Performance Computing*, **339**, pp.165-184, 2011.
- 4) 曾新翔, 赤穂良輔, 中村恭志: 非構造格子に基づく浅水波方程式解法のGPGPUによる高速化, 第25回計算力学講演会, 神戸, pp.273-275, 2012.
- 5) R. J. Leveque: *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002.
- 6) 中村恭志, 川田重夫: MPIによる並列プログラミングと分散PSEシステム, 物理探査学会誌, **57**, pp.591-603, 2004.
- 7) H. D. SIMON: Partitioning of unstructured problems for parallel processing, *Computing Systems in Engineering*, **2**, pp.135-148, 1991.
- 8) A. Pothen, H. Simon, and K.-P. Liou: Partitioning sparse matrices with eigenvectors of graphs, *SIAM J. Mat. Anal. Appl.*, **11**, pp.430-452, 1991.
- 9) Nvidia: http://www.nvidia.com/object/cuda_home_new.html.
- 10) 今村文彦, 越村俊一, 大家隆行, 馬淵幸雄, 村嶋陽一: 東北地方太平洋沖地震を対象とした津波シミュレーションの実施 東北大学モデル(version1.0), 東北大学大学院工学研究科付属災害制御研究センター, 2011.

(2012.9.30受付)