浅水方程式を用いたSPH粒子法の特性の 基礎的検討

FUNDAMENTAL STUDY ON THE CHARACTERISTICS OF SPH METHOD THROUGH THE SHALLOW WATER EQUATION

浦川翔大¹・多田毅²
Shodai URAKAWA, Tsuyoshi TADA

¹学生会員 防衛大学校 理工学研究科 地球環境科学 土木大講座
(〒239-8686 神奈川県横須賀市走水1-10-20)

²正会員 博(工) 防衛大学校准教授 建設環境工学科
(〒239-8686 神奈川県横須賀市走水1-10-20)

In this paper a smoothed particle hydrodynamics (SPH) numerical model for 1-D shallow water equations is presented for evaluating effectiveness of various SPH modification techniques and their combinations: artificial viscosity, symmetrization and correction methods of consistency condition error. Though it is known that the original SPH method has serious instability problem and poor accuracy without those techniques, there are quite few studies about quantitative error and effectiveness analysis of those techniques. We evaluate them through numerical examples of wave propagation. The result shows that at least the combination of artificial viscosity and a consistency correction method is required for the accuracy equivalent to the finite difference method.

Key Words : SPH, shallow water equation, error analysis, correction method

1. 序論

Smoothed Particle Hydrodynamics¹⁾(以下, SPH)を始めとする粒子法は, 格子を用いないメッシュフリー法として, 有限要素法, 有限差分法, 有限体積法などの従来の手法では計算自体が困難であった問題への応用が期待され, 着実に実績を積み重ねている. しかし, 現時点では誤差に関する定量的な議論は他の手法に比べ遅れていると言わざるを得ない. たとえば有限差分法では, 様々なスキームが提案され, 時間積分法との組み合わせに応じてその誤差の量と性質が詳細に研究されており, その成果は基礎方程式に依存しない形で報告されている. しかし粒子法では特定のスキーム, 特定の条件下での限定的な誤差解析が多い. そのような中でも, 例えばFatehiら²⁾は, SPHで用いられる様々なスキームについて, その打ち切り誤差のオーダーを見積もっている. また国内では, 石島ら³⁾は, MPS⁴⁾を題材として, 粒子法の勾配計算における打ち切り誤差の数学的な評価を行ったが, 得られた結果と実際の経験則との間には乖離が見られる. そもそも, 経験則自体が十分に体系化されていないため, どの手法を選ぶか, どのスキームや重み関数を選ぶか, どのような組み合わせをとるか, といった基本的な意思決定

も, 感覚的にまたは試行錯誤により行われているのが実情である. そこで本研究は, 有限差分法における誤差解析の実績が多い浅水方程式を基礎式とし, SPHの誤差の性質を調べ, その改善手法について比較検討を行う. それにより, 将来の定量的な誤差評価へと繋げることを目的としている. SPHを浅水方程式に適用すると, Navier-Stokes方程式での密度に相当する変量である水深が場所や時間により大きく変動するため, 非圧縮性流体の問題を例題とするよりも, より一般化された議論が可能となることが期待される.

SPHで浅水方程式を解く試みは, Rodriguezpazら⁵⁾に始まり, Vacondio⁶⁾では洪水流や津波の伝搬計算が実現されている. 浅水方程式を解くためには, 密度の定義式から変更する必要がある, また粒子密度(粒子間隔)が大きく変動するため, いずれの研究も浅水方程式に特化した独自の手法を用いている. そのため, これらの研究の手法を用いて, SPH自体の特性に関する汎用性を持った議論をすることは難しい. そこで本研究では, 特定の基礎方程式に依存する部分を可能な限り少なくしつつ, 大きな密度変化や粒子サイズの変化に対応した定式化を行い, 浅水方程式で得られた知見を他の問題にそのまま適用できるよう留意する.

2. SPHによる浅水方程式の計算方法

(1) 基礎方程式

本研究は、Navier-Stokes方程式を鉛直方向に平均化した浅水方程式を基礎式とした。ラグランジュ的に表現された1次元浅水方程式を式 (1), (2)に示す。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -g \frac{\partial (h_i + z_i)}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = -h_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \quad (2)$$

ここで u_i は粒子 i の速度, h_i と z_i はそれぞれ粒子 i の位置での全水深と地盤高である。

(2) SPHの概要

SPH法はメッシュレスのラグランジュ的手法であり、各物理量を空間的に離散化し、kernel関数により滑らかに分布させ、任意の地点での物理量をその分布関数の重ね合わせで表現する手法である。SPHは本質的には補間法であり、理論的な基礎は次式で表される。

$$f(x) = \int f(x') W(x - x', l) dx' \quad (3)$$

ここで W はカーネル関数と呼ばれ、位置 x' での物理量 $f(x')$ を空間中に分布させる働きを持つ。また l はスムージング長またはカーネル半径などと呼ばれ、物理量を分布させる範囲を規定する量である。実際の計算では、計算点 x を粒子の位置に限定し、式(3)の積分を次の数値積分によって近似する。

$$f_i = \sum_{j=1}^N f_j W(x_i - x_j, l) \omega_j \quad (4)$$

ここで N は、粒子 i を中心とした半径 l の範囲内に存在する粒子の数、 ω_j は粒子 j の受け持つ微小区間 (2次元の場合は微小面積、3次元の場合は微小体積) である。

SPHはMPSなどの他の粒子法と比較して、物理量の空間勾配の算出方法に特徴がある。物理量 f の空間勾配を算出する際、分布関数の勾配 ∇W の重ね合わせで表現を行う。

$$\nabla f_i = \sum_{j=1}^N f_j \nabla W(x_i - x_j, l) \omega_j \quad (5)$$

2階以上の勾配も同様に分布関数の勾配の重ね合わせで表現する。以上がSPHの基礎式であり、任意の物理量に適用できる。

カーネル関数 W は、原点を除く全域で微分可能であり、かつ次の条件を満たさなければならない。

$$\int W(x) dx = 1 \quad (6)$$

この条件を満たす様々な関数が提案されているが、本研究では、ガウス関数やSpline関数などの釣鐘型の代表として式(7)の6次多項式型を、安定性を優先する先鋭的な形状の代表として式(8)のSpiky型を採用した。

図-1 カーネル関数の形状

$$W(x, l) = \alpha_1 \begin{cases} (l^2 - x^2)^3, & 0 \leq x \leq l \\ 0, & l \leq x \end{cases} \quad (7)$$

$$W(x, l) = \alpha_2 \begin{cases} (l - x)^3, & 0 \leq x \leq l \\ 0, & l \leq x \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 α_1 と α_2 は式(6)の条件を満たすように設定される定数である。

(3) 浅水方程式のSPHによる計算法

一般に、Navier-Stokesの式をSPHで計算する場合、次の定義式が用いられる。

$$\rho_i \equiv \sum_j m_j W(x_i - x_j, l) \quad (9)$$

これは、粒子 j の持つ固有の質量 m_j がカーネル関数 W によって空間中に分布し、それらの重ね合わせで粒子 i の密度が計算されることを意味している。しかし、SPH本来の定義式(3)に忠実に定式化するのであれば、次のように定義されるべきであろう。

$$\omega \equiv m/\rho \quad (10)$$

この式(10)を式(4)に代入すれば式(9)が得られる。このように、基礎方程式の違いは ω の定義のみに集約される。同様に、浅水方程式を解くためには次の定義を用いる。

$$\omega \equiv V/h \quad (11)$$

$$h_i = \sum_j h_j W_j \omega_j \quad (12)$$

$$\nabla h_i = \sum_j h_j \nabla W_j \omega_j \quad (13)$$

$$W_j = W(x_i - x_j, l) \quad (14)$$

ここで V は各粒子が持つ固有の体積、 h は粒子の位置での全水深である。ここまでスムージング長 l は一定としてきたが、粒子ごとに異なる l を持つことを許すと、式(14)において粒子 i の値を用いる場合 (Gathering approach) と粒子 j の値を用いる場合 (Scattering approach) が考えられる。本研究では特に断らない限り l は一定とする。

まず運動方程式(1)で得られた加速度にしたがい粒子の位置を更新する。次に、連続式(2)を用いて水深を更新する。以上を繰り返すことで水深、粒子速度、粒子位置などの時間発展計算を行う。ここで、水深の更新には、式(2)による時間発展計算を行わず、式(9)を直接使うことも可能であるが、本研究では連続式による計算を行った。

(4) 対称化

SPHは式(4), (5)そのままでは精度が低く, また不安定であることが知られている. そこで, SPHの開発当初より様々な改良手法が提案されてきた.

i) 圧力勾配項の対称化

たとえば式(5)で圧力勾配を算定し粒子に働く力を求めた場合, 粒子 i と j との間で運動量が保存されず, 場全体を通した整合性が保たれなくなってしまう. そこで, p について対称である次式が広く用いられている.

$$\nabla p_i = -\frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W \quad (15)$$

同様の対称化を浅水方程式で行うと, 次式のようになる.

$$\nabla h_i = -\frac{1}{h_i} \sum_j V_j \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_j} \right) \nabla W \quad (16)$$

ii) 完全対称化

より一般的な対称化を行うために, 定義式(10)または定義式(11)などを導入する前の時点での, 以下の様な対称化を提案する.

$$\nabla f_i = \sum_j (f_j - f_i) \nabla W_{ij} \omega_{ij} \quad (17)$$

$$W_{ij} = \frac{W_i + W_j}{2} \quad \text{or} \quad W \left(x_i - x_j, \frac{l_i + l_j}{2} \right) \quad (18)$$

$$\omega_{ij} = (\omega_i + \omega_j) / 2 \quad (19)$$

式(17)内の f の対称化と Hernquist ら⁷⁾ および Evrard⁸⁾ によって提案されたカーネル対称化の式(18)に, 微小領域の対称化を加えることで, スムージング長や粒子の質量(体積)が粒子ごとに異なっても対称性を保つことができる.

(5) コンシステンシー条件の改善手法

前述したように, 1次元SPHにおいて離散化した方程式が元の微分方程式を正しく表現するためには, カーネル関数が以下に示す条件を満たす必要がある.

$$\int W(x) dx = 1 \quad (20)$$

$$\int x \nabla W(x) dx = 1 \quad (21)$$

$$\int x^2 \nabla^2 W(x) dx = 1 \quad (22)$$

当然, 式(7), (8)はこれらの条件を満たすように作られている. ところが, 実際の数値計算では, 離散化に起因する積分誤差が含まれるため, 物理量やその勾配など各階におけるコンシステンシー条件が保たれず, 深刻な精度の低下や不安定性が発生する. 物理量とその勾配のみ正確に算出するだけであれば, 1次のコンシステンシーが保たれていればよいが, 粘性項, 分散項といった物理量の2階微分を用いる計算を行う場合は2次のコンシステンシーまで保たれている必要がある. この問題は古くから

知られており, 非常に多くの改善手法が提案されているが, 本質的には皆, 後述するMSPHまたはSSPHの特別なケースとして説明することができる.

a) 正規化

式(4)を次のように正規化することで, 0次のコンシステンシー条件を保つことができる.

$$f_i = \frac{\sum_j f_j W_j \omega_j}{\sum_j W_j \omega_j} \quad (23)$$

これは, 重み付き平均に他ならない. この補正は境界付近の計算精度を改善するためにしばしば用いられる.

b) CSPM (Corrected Smoothed Particle Method)

Chen ら⁹⁾ によって開発されたCSPMは, Taylor展開を用いて高階の勾配まで正規化する手法である. 1次元問題において関数 $f(x)$ を位置 i の x 付近に関してTaylor展開を行うと,

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{(x - x_i)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \dots \quad (24)$$

と表記される. 粒子 x の影響範囲内においてカーネル関数 W を乗じて影響範囲内の積分を行った形は,

$$\begin{aligned} \int f(x) W_i(x) dx &= f(x_i) \int W_i(x) dx \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i \int (x - x_i) W_i(x) dx \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i \int (x - x_i)^2 W_i(x) dx + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

となる. 導関数の項を無視すれば, 補正カーネル近似は

$$f(x_i) = \frac{\int f(x) W_i(x) dx}{\int W_i(x) dx} \quad (26)$$

で表される. この式を離散化すれば式(23)となる. 同様に ∇W を乗じて2次以上の項を無視し, 対称化を施すと, 補正カーネル近似は,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{\int (f(x) - f(x_i)) \nabla W_i(x) dx}{\int (x - x_i) \nabla W_i(x) dx} \quad (27)$$

となる. 同様に, さらに高階の正規化も可能である. Koshizuka ら⁴⁾ のMPSは, この1次までのCSPMと同等のコンシステンシー補正レベルを持つ.

c) MSPH (Modified Smoothed Particle Hydrodynamics)

MSPHはZhang ら¹⁰⁾ によって開発された. CSPMと同様に, Taylor展開に基づいて微分演算を再定義することにより精度を改善する手法である. 以下に示す行列式で書かれた連立方程式を解くことにより, 粒子 x_i 上の物理量の微分を求めることができる. この行列の対角成分のみを取り出し対称化したものがCSPMに相当する. また2次元以上の場合, CSPMでは粒子が整列配置していない場合には精度が低下するが, MSPHは粒子がランダム

図-2 計算条件

に配置されていてもコンシステンシーが保たれる。

$$\begin{pmatrix} \int f(x)W_i dx \\ \int f(x)\nabla W_i dx \\ \int f(x)\nabla^2 W_i dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int W_i dx & \int XW_i dx & \frac{1}{2!}\int X^2 W_i dx \\ \int \nabla W_i dx & \int X\nabla W_i dx & \frac{1}{2!}\int X^2 \nabla W_i dx \\ \int \nabla^2 W_i dx & \int X\nabla^2 W_i dx & \frac{1}{2!}\int X^2 \nabla^2 W_i dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \end{pmatrix}_i \quad (28)$$

$X = x - x_i$

d) SSPH (Symetric Smoothed Particle Hydrodynamics)

SSPHはBatraら¹¹⁾によって開発された手法であり、SPHの補正手法としてMSPHに続いて発表されたものであるが、それ以前よりエレメントフリーガラーキン法などで使われている最小二乗法や、その後発表されたMPSの精度改善手法(入部ら¹²⁾, Khayyerら¹³⁾, 玉井ら¹⁴⁾)と数学的には基本的に等価である。MSPHが非対称な行列式を用いているのに対してSSPHは対称な行列式で計算できる形になっている。またカーネル関数の微分を使用しないため、カーネル関数が微分可能である必要はなく、どのような関数でも用いることが可能になる。

$$\begin{pmatrix} \int f(x)W_i dx \\ \int f(x)XW_i dx \\ \int f(x)X^2 W_i dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int W_i dx & \int XW_i dx & \frac{1}{2!}\int X^2 W_i dx \\ \int W_i X dx & \int XW_i X dx & \frac{1}{2!}\int X^2 W_i X dx \\ \int W_i X^2 dx & \int XW_i X^2 dx & \frac{1}{2!}\int X^2 W_i X^2 dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \end{pmatrix}_i \quad (29)$$

$X = x - x_i$

SSPHはMSPHよりも計算負荷が低くカーネル選択の自由も高いが、得られる補正効果はMSPHとほとんど同一であるため、本論文ではMSPHの結果のみを示す。

図-3 人工粘性の効果

図-4 対称化の効果

3. 精度改善手法の効果の検討

(1) 計算条件

孤立波の伝搬計算を図-2の条件で行い、SPHと有限差分法による結果を比較した。水路両端は壁面とし、初期条件は、水路全域で流速ゼロとして図-2に示した初期波形を与えた。SPHでは、初期の粒子間隔を全域で0.1mとし、粒子の体積を水深に応じて変化させることで初期水位を与えた。スムージング長は0.3mで固定とし、時間刻みは0.05s、時間積分はクランク・ニコルソン法を用いている。カーネル関数は特に断らない限り、式(7)の6次多項式を用いた。また、壁面の境界条件はミラー粒子を用いて実装した。有限差分法は、スタガード・リープフロッグ法を用い、格子間隔0.25m、時間刻み0.01s、移流項は1次風上とした。

(2) 標準SPHの結果

標準SPHを用いた結果と、人工粘性を付加した計算結果を図-3に示す。標準SPHでは全域で振動が発生し、計算が途中で破綻する場合も多い。通常、SPHの不安定さを低減させるために人工粘性を付加することが多い。そこで、Monaghan¹⁾と同様の人工粘性を加えたが、粒子間隔が広がる傾向にある部分で特に振動が抑えられていない。これは、引張力の働く部分で特に問題になるTensile instabilityと呼ばれる現象である。

図-5 コンシステンシー補正の効果

(3) 対称化の効果

対称化は、運動量などの保存性を保証するだけでなく、計算を安定化させる効果も持つ。圧力勾配項を式(16)で対称化した結果と、式(17)で完全対称化した結果を図-4に示す。両者に大きな違いはみられない。そうであれば、可変スムージング長への対応やコンシステンシー改善手法との親和性などから、完全対称化を選択すればよい。

またどちらの場合も人工粘性は付加していないにもかかわらず、標準SPHで発生している不規則で激しい振動は解消できているが、細かい振動は残っている。さらに、波長1m強の大きな振動が発生していることが目に付く。これは、SPHが中央差分に相当することに起因する数値分散である。大上ら¹⁵⁾はこの数値分散がソリトンであることを示し、この誤差を制御することでK-dV方程式を解けることを示唆している。この数値振動は人工粘性で抑制することができるが、本研究ではこの分散誤差の性質も含めて検討するために、特に断らない限り人工粘性は付加しない。

(4) コンシステンシー補正手法の効果

コンシステンシー補正手法を適用した結果を図-5に示す。1次元問題であることからCSPMとMSPHの間に大きな差はみられず、いずれも完全対称化のみの場合よりも差分法の結果に近づいている。このことから、コンシステンシー条件が保たれない場合は波速が正しく計算されないことがわかる。また、波の後部の細かい振動も抑制されている。

(5) カーネル関数の影響

カーネル関数による違いを検証するために、標準SPHで多項式カーネルとSpikyカーネルを使い比較を行った結果を図-6に示す。Spikyカーネルは原点付近で急勾配となるため粒子が凝集し難く、計算が安定することが知られており、図-6でもその傾向が見られる。しかし、波の進行が著しく遅れている。これは、図-7の原点付近に強く表れているように、Spikyカーネルの離散化誤差は正負が打ち消し合い難く、勾配が常に過小評価されてし

図-6 標準SPHにおけるカーネル関数の影響

図-7 Spikyカーネルの離散化誤差

まうためであると考えられる。

そこで、両カーネルにコンシステンシー補正を施した結果を図-8に示す。離散化誤差が減少した結果、波の進行速度はどちらも同一となった。そうであれば、安定性に勝るSpikyカーネルを採用すればよい。また分散誤差の波長が異なるのは、両カーネルの実効スムージング長(2次モーメント)が異なるためである。

(6) まとめ

最後に、1次元風上差分の数値粘性と同程度の人工粘性を付加して数値分散を抑制し、実用上の典型的な条件で比較した結果を図-9に示す。現在最も広く使われている、釣鐘型カーネルと圧力項の対称化の組み合わせは、波速が若干遅くなることがわかる。また、安定性の向上を狙いSpikyカーネルを採用する場合、コンシステンシー条件の補正手法が不可欠であることがわかる。

5. おわりに

本論文では、1次元浅水方程式を例に、SPHの様々な改良手法の効果と、それらの組み合わせについて検討した。その結果、コンシステンシー条件の補正が安定性および精度に対して最も影響が大きいことが確認された。また、これまではSPHに一般的にみられる不安定さを抑制するために人工粘性が不可欠であったが、対称化とコンシステンシー条件を保つことで人工粘性なしでも不安定さが激減すること、その一方で人工粘性を加えないと分散誤差が顕在化することが明らかとなった。現時点では、定量的な議論がなされないまま、必要に迫られて人工粘性を導入しているのが実情である。今後、精度保証を伴う実用的な粒子法の確立のためには、分散誤差の性

図-8 MSPHによるコンシステンシー補正後の
カーネル関数の影響

質の解明と、解に悪影響を与えないような人工粘性の導入方法を検討することが不可欠である。

さて、SSPHの対角成分のみを取り出して対称化し、カーネル関数として原点で無限大に発散するSpiky型の関数を与え、微小領域 ω を全て1.0に設定(各粒子の占有面積を重みとして考慮しないことに相当)すれば、KoshizukaらのMPS⁴⁾と完全に等価である。本論文の計算結果を見れば、無補正のSPHに比べMPSの方が安定かつ高精度であることは容易に理解でき、他の粒子法よりも後発であるにもかかわらず広く普及していることもうなずける。その後MPSの対称化手法としてKhayyerら¹⁶⁾が、コンシステンシー条件改善手法として入部ら¹²⁾、Khayyerら¹³⁾、玉井ら¹⁴⁾などが出てきたのも当然の流れである。

さらに言えば、SPHが他の粒子法と異なる点は、物理量の重み付き平均を取る際に、あらかじめ重みの合計が1.0になるような関数を採用し、重み関数の微分を用いて平均量の微分を求めること、さらに重みとして各粒子の受け持つ領域の広さも考慮することの3点に集約される。そしてSSPHを用いれば、違いは最後の1点のみとなる。それもプログラム中では $\omega = m/\rho$ とするか $\omega = 1$ とするか、スイッチひとつで切り替え可能であり、天文学物理や浅水方程式などのように粒子数密度によほど大きな偏りがない限り、結果に大きな差は生じない。

粒子法には、分布の重ね合わせ、重み付き移動平均、粒子間相互作用などの異なる概念から組み立てられた多くの手法が存在し、それぞれが別個の発展を遂げている。今後はより本質的な議論を深め、各手法の共通点や手法固有の利点を明確にし、問題に応じた手法、補正法などを適切に選択できるよう情報を整理する必要がある。

謝辞：本研究は科学研究費補助金（基盤研究(B)24360195）を用いて行った。ここに感謝します。

参考文献

- 1) Monaghan, J. J. : Smoothed particle hydrodynamics, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol.30, No.8, 543-574, 1992
- 2) Fatehi, R. and Manzari, M. T. : Error estimation in smoothed particle hydrodynamics and a new scheme for second derivatives,

図-9 人工粘性を加えた場合の各手法の比較

Computers & Mathematics with Applications, Vol.61, No.2, 482-498, 2011.

- 3) 石島清宏, 木村正人 : メッシュフリー粒子法における差分公式の打ち切り誤差解析, 日本応用数理学会論文誌, Vol.20, No.3, 165-182, 2010.
- 4) Koshizuka, S., Tamako, H. and Oka, Y., A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation, Computational Fluid Dynamics Journal, Vol.4, 29-46, 1995.
- 5) Rodriguezpaz, M. and Bonet, J. : A corrected smooth particle hydrodynamics formulation of the shallow-water equations, Computers & Structures, Vol.83, No.17-18, 1396-1410, 2005.
- 6) Vacondio, R., Rogers, B. D., Stansby, P. K., Mignosa, P. : SPH Modeling of Shallow Flow with Open Boundaries for Practical Flood Simulation, Journal of Hydraulic Engineering, Vol.138, No.6, 530-541, 2012.
- 7) Hernquist, L. and Katz, N. : TREESPH - A unification of SPH with the hierarchical tree method, The Astrophysical Journal Supplement Series, Vol.70, 419-446, 1989.
- 8) Evrard, A.E. : Beyond N-body - 3D cosmological gas dynamics, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol.235, 911-934, 1988.
- 9) Chen, J.K., Beraun, J.E. and Carney, T.C. : A corrective smoothed particle method for boundary value problems in heat conduction. Int. J. Numer. Method Engng. Vol.20, 1081-1106, 1995.
- 10) Zhang, G.M. and Batra, R.C. : Modified smoothed particle hydrodynamics method and its application to transient problems, Computational Mechanics, Vol. 34, 137-146, 2004.
- 11) Batra, R.C. and Zhang G.M. : SSPH basis functions for meshless methods, and comparison of solutions with strong and weak formulations. Computational Mechanics, Vol.41, 537-545, 2008.
- 12) 入部綱清, 仲座栄三 : MPS法における勾配計算の高精度化とその応用, 土木学会論文集B2 (海岸工学), Vol.66, No.1 046-050, 2010.
- 13) Khayyer, A. and Gotoh, H. : Enhancement of stability and accuracy of the moving particle semi-implicit method, Journal of Computational Physics, Vol.230, 3093-3118, 2011.
- 14) 玉井佑, 越塚誠一, 柴田和也 : MPS法における高精度粒子間相互作用モデルの開発, 計算工学講演会論文集, Vol.17,C-2-2, 2012.
- 15) 大上芳文, Cheer, A. Y. : 粒子法の分散誤差によるソリトンについて, 日本機械学会論文集(B編), Vol.59, 3460-3465, 1993.
- 16) Khayyer, A. and Gotoh, H. : Modified Moving Particle Semi-implicit methods for the prediction of 2D wave impact pressure, Coastal Engineering, Vol.56, 419-440, 2009.

(2012. 9. 30受付)